





Nachrichten

von der

Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

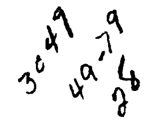
Aus dem Jahre 1887.

Nro. 1—21.

Göttingen,
Dieterichsche Verlags-Buchhandlung.
1887.



Man bittet die Verzeichnisse der Accessionen zugleich als Empfangsanzeigen für die der Königl. Societät übersandten Werke betrachten zu wollen.



Register

über

die Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

und

der Georg-Augusts-Universität

aus dem Jahre 1887.

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg - Augusts - Universität

zu Göttingen.

9. Februar. №. 1. 1887.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung den 8. Januar 1887.

Erläuterungen zur Theorie der sogen. allgemeinen complexen Größen.

Von

R. Dedekind, ausw. Mitgl.

Seit dem Erscheinen der auf diese Theorie bezüglichen Abhandlung des Herrn Weierstraß (im Jahrgange 1884 dieser Nachrichten, S. 395) und der meinigen (1885, S. 141) habe ich bei mündlichen und brieflichen Unterhaltungen öfter die Erfahrung gemacht, daß die in beiden Schriften niedergelegten Auffassungen nicht mit hinreichender Deutlichkeit von einander unterschieden werden. Da vielleicht meine Darstellung hieran die Schuld trägt, so erlaube ich mir noch einmal auf denselben Gegenstand zurückzukommen. Es handelt sich um die Auslegung des bekannten Ausspruches von Gauß:

»Der Verf. hat sich vorbehalten, den Gegenstand, welcher in der vorliegenden Abhandlung eigentlich nur gelegentlich berührt ist, künftig vollständiger zu bearbeiten, wo dann auch die Frage, warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Größen liefern können, ihre Beantwortung finden wird.« (Gauß Werke, Bd. II. S. 178).

Herr Weierstraß faßt (S. 410—411 l. c.) seine Ansicht in folgende Worte:

»Wenn ich nun mit dem Ergebniß der vorstehenden Untersuchung die im Anfange angeführte Gaußische Bemerkung, daß complexe Größen mit mehr als zwei Haupteinheiten in der allgemeinen Arithmetik unzulässig seien, zusammenhalte, so scheint es mir, daß Gauß diese Unzulässigkeit als dadurch begründet angesehen habe, daß das Product zweier Größen, sobald $n > 2$, verschwinden kann, ohne daß einer seiner Factoren den Werth Null hat. Denn hätte er diesen Umstand nicht als ein unübersteigliches Hinderniß für die Einführung der allgemeinen complexen Größen in die Arithmetik betrachtet, so würde es ihm schwerlich entgangen sein, daß sich eine Arithmetik dieser Größen begründen läßt, in welcher alle Sätze entweder mit denen der Arithmetik der gewöhnlichen complexen Größen identisch sind oder doch in der letzteren ihr Analogon finden. Er würde dann auch ohne Zweifel seinen Ausspruch dahin modificirt haben, daß die Einführung der allgemeinen complexen Größen in die Arithmetik zwar nicht unstatthaft, wohl aber überflüssig sei. In der That geht aus dem oben (Seite 407) ausgesprochenen Satze hervor, daß die Arithmetik der allgemeinen complexen Größen zu keinem Resultate führen kann, das nicht aus Ergebnissen der Theorie der complexen Größen mit einer oder mit zwei Haupteinheiten ohne Weiteres ableitbar wäre.«

Von dieser Auffassung weicht die meinige (vgl. S. 142, 147, 156 l. c.) erheblich, nämlich in dem Hauptpuncte ab, daß ich den Größen, welche im Vorstehenden allgemeine complexe Größen genannt werden, den Charakter der Neuheit gänzlich versage; es handelt sich in unserem Jahrhundert nicht mehr um ihre Zulassung, sie sind vielmehr schon lange und mit großem Erfolge in die allgemeine Arithmetik zugelassen; sie bilden, wie gesagt, keine neue oder — um buchstäblich genau mit Gauß zu reden — keine andere Art von Größen, sondern sie sind geradezu identisch mit den überall in der Algebra eingebürgerten mehrwerthigen gewöhnlichen Zahlen; es ist unmöglich, jene von diesen zu unterschei-

den, und die letzteren bieten bei folgerichtiger Ausbildung ihres Begriffes auch schon die erwähnte Erscheinung dar, daß ein Product aus nicht verschwindenden Factoren sehr wohl verschwinden kann. In allem Diesen glaube ich die Bedeutung und die volle Bestätigung des Ausspruches von Gauß zu erkennen.

Da ich den in meiner Schrift gegebenen allgemeinen Beweisen, auf welche ich diese meine Auffassung gründe, und welche, wie ich gern hinzufüge, dem Wesen nach auch in den analytischen Entwickelungen des Herrn Weierstraß enthalten sind, Nichts hinzuzufügen habe, so begnüge ich mich, die beiden verschiedenen Auffassungen durch einige Beispiele zu erläutern, weil diese oft eine weit größere überzeugende Kraft besitzen, als eine allgemeine Theorie.

Jedes Beispiel für unsere Untersuchung ist dann ein vollkommen bestimmtes, sobald die Producte von je zwei der Haupteinheiten linear durch die letzteren dargestellt sind. Ich wähle zunächst ein System von drei Haupteinheiten e_1, e_2, e_3 mit folgenden Grundformeln

$$\begin{aligned} e_1^2 &= -2e_1 - e_2 - 2e_3 \\ e_2^2 &= -2e_1 - 2e_2 - e_3 \\ e_3^2 &= -e_1 - 2e_2 - 2e_3 \\ e_2e_3 &= e_1 + e_2 \\ e_3e_1 &= e_2 + e_3 \\ e_1e_2 &= e_1 + e_3. \end{aligned}$$

Dieselben erfüllen, wie man sich leicht überzeugt, alle die Bedingungen, welche sich aus dem sogen. associativen Gesetz der Multiplication ergeben. Behält man ferner die von mir (l. c. S. 147) gewählten Bezeichnungen bei, so findet man

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_2 = \sigma_3 = -1 \\ \tau_{11} &= \tau_{22} = \tau_{33} = 5 \\ \tau_{23} &= \tau_{31} = \tau_{12} = -2 \\ \Delta &= 49, \end{aligned}$$

und weil die Determinante Δ nicht verschwindet, so sind auch die von Herrn Weierstraß aufgestellten Zulässigkeits-Bedingungen erfüllt; mithin würden die Größen e_1, e_2, e_3 wirklich die Haupteinheiten eines zulässigen Systems complexer Größen von der Form

$$\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3$$

bilden, wo die Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 alle reellen Werthe durchlaufen. Allein ich kann nicht glauben, daß Gauß hierin eine neue (andere) Art von Größen erblickt haben würde. In der That, es ist unmög-

lich, irgend eine Eigenschaft, eine Thatsache anzugeben, durch welche diese Größen e_1, e_2, e_3 sich von den dreiwerthigen Kreistheilungs-Perioden

$$e_1 = r + r^{-1},\ e_2 = r^2 + r^{-2},\ e_3 = r^3 + r^{-3}$$

unterscheiden, wo r unbestimmt jede Wurzel der Gleichung

$$r^6 + r^5 + r^4 + r^3 + r^2 + r + 1 = 0$$

bedeutet.

Genau so verhält es sich, wie ich gezeigt habe, in **jedem** anderen Beispiele. Ich führe noch die beiden folgenden an:

$$e_1^2 = e_1 + e_2 + e_3,\ e_2^2 = e_3,\ e_3^2 = e_3,$$
$$e_2 e_3 = e_2,\ e_3 e_1 = e_2 + e_3,\ e_1 e_2 = e_2 + e_3$$

und

$$e_1^2 = e_1 + e_2 + e_3,\ e_2^2 = e_3,\ e_3^2 = -e_3,$$
$$e_2 e_3 = -e_2,\ e_3 e_1 = -e_2 + e_3,\ e_1 e_2 = e_2 + e_3.$$

Alle Bedingungen der Weierstraß'schen Theorie sind erfüllt, aber ich kann die Haupteinheiten e_1, e_2, e_3 nicht für eine neue Art von Größen ansehen, weil sie schlechterdings nicht zu unterscheiden sind von den gewöhnlichen mehrwerthigen Größen

$$e_1 = 1 + r,\ e_2 = r,\ e_3 = r^2,$$

wo r jede Wurzel der cubischen Gleichung

$$r^3 - r = 0$$

im ersten Fall, im zweiten der Gleichung

$$r^3 + r = 0$$

bedeutet.

Um die Erscheinung des Verschwindens von Producten aus nicht verschwindenden Factoren im Reiche der gewöhnlichen, aber mehrwerthigen Zahlen zu erläutern, schicke ich folgende Bemerkung voraus. Ist r eine n-werthige [1]) Zahl, d. h. bedeutet r unterschiedslos jeden der n von einander verschiedenen bestimmten Zahlwerthe

$$r',\ r'' \ldots r^{(n)},$$

so wird folgerichtig, wenn $\varphi(t)$, $\psi(t)$ ganze Functionen einer Veränderlichen t mit bestimmten (d. h. einwerthigen) Coefficienten sind, die Behauptung

$$\varphi(r) = \psi(r)$$

1) Wenn man lieber will, so mag man r eine **veränderliche Größe** nennen, deren **Gebiet** auf n bestimmte, von einander verschiedene Werthe r', $r'' \ldots r^{(n)}$ beschränkt ist.

stets und nur dann für wahr gelten, wenn die n Bedingungen

$$\varphi(r') = \psi(r'),\ \varphi(r'') = \psi(r'') \ldots \varphi(r^{(n)}) = \psi(r^{(n)})$$

sämmtlich erfüllt sind, d. h. wenn die ganze Function $\varphi(t) - \psi(t)$ durch die ganze Function

$$f(t) = (t - r')(t - r'') \ldots (t - r^{(n)})$$

theilbar ist.

Ist daher z. B. r eine zweiwerthige Größe, welche unterschiedslos jeden der beiden Werthe ± 1 bedeutet, so verschwindet weder die Größe $r + 1$ noch $r - 1$, aber ihr Product $r^2 - 1$ verschwindet.

Man sage nicht, dies sei nur künstlich herbeigezogen, um den bisher in die allgemeine Arithmetik eingeführten Größen eine Eigenschaft zuzusprechen, die eigentlich nur einer ganz neuen Art von Größen beigelegt werden dürfte. Dem ist keineswegs so. Daß diese Eigenschaft der gewöhnlichen mehrwerthigen Größen selten oder vielleicht niemals ausdrücklich erwähnt ist, findet seinen Grund darin, daß sie bei den meisten Beispielen wegen der besonderen Beschaffenheit derselben gar nicht zum Vorschein kommt, während sie bei allgemein gehaltenen Untersuchungen selbstverständlich ist und gerade deshalb kaum Erwähnung verdient. In der That, eins der bekanntesten Beispiele mehrwerthiger Zahlen wird von der Theorie derjenigen Zahlengebiete geliefert, die ich endliche Körper genannt habe; hier liegt die Sache so, daß r jede Wurzel einer sogen. irreducibelen Gleichung $f(r) = 0$ bedeutet, deren Coefficienten rationale Zahlen sind, und außerdem werden auch nur rationale Coefficienten in den aus r gebildeten Größen $\varphi(r)$ geduldet; es ist lediglich eine Folge dieser besonderen Beschränkungen, daß ein Product aus zwei nicht verschwindenden Factoren $\varphi(r)$ ebenfalls niemals verschwinden kann. Der bekannteste specielle Fall ist wohl der der Kreistheilung, welchen Gauß in der siebenten Section der Disquisitiones Arithmeticae behandelt hat; im Art. 339 wird, wenn n eine Primzahl bedeutet, unter r jede Wurzel der Gleichung $R = 0$ verstanden, wo

$$R = r^{n-1} + r^{n-2} + \text{etc.} + r + 1,$$

und im Art. 341 wird bewiesen, daß diese Gleichung irreducibel ist; so lange r diese Bedeutung einer $(n-1)$-werthigen Größe behält, gilt der Satz, daß ein Product aus zwei nicht verschwindenden, rational gebildeten Factoren $\varphi(r)$ ebenfalls nicht verschwindet, und bei Umformungen von Zahlen $\varphi(r)$ in $\psi(r)$ dürfen alle und nur solche Glieder weggelassen werden, die den Factor R enthalten. Aber aus nahe liegenden Gründen führt Gauß, was bemerkt zu werden ver-

dient, die meisten (doch nicht alle) solchen Umformungen so aus, daß sie auch noch für $r = 1$ gültig bleiben, wodurch der Grad der Mehrwerthigkeit erhöht wird; in allen diesen Fällen ist daher weder der Factor R noch der Factor $r - 1$ als verschwindend anzusehen, wohl aber ihr Product $r^n - 1$. Dies wird freilich nirgends ausdrücklich erwähnt, aber thatsächlich verhält es sich so.

Auch die Geometrie kann leicht Veranlassung zur Betrachtung mehrwerthiger Größen geben, bei welchen dieselbe Erscheinung auftritt. Sind z. B. drei Puncte M', M'', M''' durch ihre Cartesischen Coordinaten gegeben,

$$\begin{array}{lll} M' & \text{durch} & 1,\quad 0,\ 0 \\ M'' & \text{»} & 2,\quad 1,\ 1 \\ M''' & \text{»} & 0, -1,\ 1 \end{array}$$

und handelt es sich darum, alle algebraischen Flächen zu bestimmen, welche durch alle drei Puncte gehen, so läuft dies darauf hinaus, alle die rationalen Gleichungen zwischen drei Größen e_1, e_2, e_3 aufzustellen, welche durch jedes der drei obigen Systeme von je drei Coordinaten befriedigt werden. Diese Größen e_1, e_2, e_3 bilden daher ein solches mehrwerthiges System, wie ich es im ersten Theile meiner Abhandlung (S. 143—147) betrachtet habe, und zwar sind die Grundformeln für die Multiplication diejenigen, welche sich oben im zweiten meiner drei Beispiele finden. Die einzige für e_1, e_2, e_3 geltende lineare Gleichung

$$e_1 - e_2 = 1$$

entspricht der durch die drei Puncte M', M'', M''' gelegten Ebene; von den drei linearen Größen

$$e_1 - e_2 - e_3,\ e_2 + e_3,\ e_2 - e_3,$$

welche den durch den Nullpunct und je zwei der Puncte M', M'', M''' gelegten Ebenen entsprechen und nach Herrn Weierstraß zweckmäßig Theiler der Null genannt werden können, verschwindet keine, wohl aber verschwinden die Producte aus je zwei verschiedenen von ihnen, was sich geometrisch von selbst versteht.

Nachdem ich versucht habe, meine Deutung des Ausspruches von Gauß durch die vorstehenden Beispiele zu erläutern, glaube ich zu Gunsten derselben noch Folgendes anführen zu dürfen. Die Grundlage für die Untersuchungen des Herrn Weierstraß (und ebenso der meinigen) über die Zulässigkeit allgemeiner complexer Zahlen, welche linear aus n Haupteinheiten gebildet sind, besteht in der Forderung, daß die (von der Ordnung der Factoren unabhängigen) Producte aus je zwei Haupteinheiten sich wieder linear durch die

Haupteinheiten darstellen lassen, und es darf wohl als sicher angenommen werden, daß Gauß von derselben Grundlage ausgegangen ist. Vergleicht man nun hiermit den Art. 345 der Disquisitiones Arithmeticae, in welchem Gauß den für die Kreistheilung äußerst wichtigen Satz aufstellt, daß die Producte aus je zwei sogen. Perioden sich linear durch die Perioden darstellen lassen, so springt die Aehnlichkeit jener arithmetischen Untersuchung über allgemeine complexe Größen mit dieser, freilich sehr speciellen algebraischen Untersuchung über mehrwerthige Größen der Kreistheilung so in die Augen, daß ich glauben möchte, Gauß müßte dieselbe sofort bemerkt haben und dadurch auf den Gedanken gekommen sein, daß jene hypothetischen complexen Größen auch nichts Anderes sind als gewöhnliche, aber mehrwerthige Größen. Doch sind dies natürlich nur Wahrscheinlichkeitsgründe, welche die Streitfrage nicht entscheiden können, und darüber wird man vermuthlich auch nicht mehr hinauskommen, weil jeder weitere Anhalt zu fehlen scheint.

Ueber die Dampfdichte des Zinks.

Von

Justus Mensching und **Victor Meyer.**

Während unter den nichtmetallischen Elementen nicht weniger als elf sind, bei denen die Dampfdichte hat bestimmt werden können, ist diese Constante bis jetzt nur bei zwei Metallen, dem Quecksilber und Cadmium ermittelt. Wie bekannt, ist bei beiden das Molekulargewicht mit dem Atomgewicht identisch gefunden worden, und dieses Resultat macht es im hohen Maaße wünschenswerth, noch eine größere Anzahl von Metallen in der angegebenen Richtung zu prüfen. Denn da bei den meisten Metalloiden die Moleküle aus mehreren Atomen bestehen, (die Halogen-Moleküle übrigens in den monatomen Zustand erst bei sehr hohen Hitzegraden übergehen) so ist es nach den beim Quecksilber und Cadmium erlangten Resultaten ganz unmöglich, auf Analogien fußend, irgend welche Schlüsse über die muthmaßlichen Molekulargrößen der übrigen Metalle abzuleiten.

St. Claire-Deville und Troost, welchen wir bekanntlich die Kenntniß der Dampfdichte des Cadmiums verdanken und welche im Laufe ihrer berühmten Arbeiten Dampfdichtebestimmungen bei weit über 1000° C. liegenden Temperaturen ausgeführt haben, bestimmten

dennoch die Dampfdichte des Zinks nicht, obwohl dessen relativ niedriger Siedepunkt (cr. 950° C) diese Forscher ohne Zweifel zu dem Versuche angereizt haben wird. In ihren Publicationen haben wir indessen keine Notiz gefunden, aus welcher hervorgeht, daß sie das Experiment angestellt haben — eine auffällige Unterlassung in den Arbeiten der Forscher, welche kühn genug waren, den Dampf siedenden Zinks als Erhitzungsmittel bei Dampfdichtebestimmungen anzuwenden. — Als der eine von uns in Gemeinschaft mit Carl Meyer 1879 seine Untersuchungen über Dampfdichtebestimmungen bei Gelbglühhitze begann, richteten wir alsbald unser Augenmerk auf das Zink. Allein wir fanden bei dem Versuche unerwartete Schwierigkeiten, welche wir damals nicht zu überwinden vermochten. Bei der Wiederaufnahme der seit längerer Zeit unterbrochenen Versuche sind wir indessen jetzt zum Ziele gelangt. Die Erhitzung nahmen wir, wie bei allen ähnlichen Versuchen, in der von V. u. C. Meyer beschriebenen Porcellanbirne vor [1]), welche mit der in der Abhandlung von V. Meyer und S. Pond [2]) abgebildeten Mahlmann'schen Fallvorrichtung verbunden war. Da es bei der leichten Oxydirbarkeit des Zinks unumgänglich notwendig ist, jede Spur von Sauerstoff auszuschließen, so wird die Füllung des Apparates mit reinstem Stickstoff in der Kälte vorgenommen, der Apparat luftdicht verschlossen in den noch kalten Ofen gesetzt und, während das Gasentbindungsrohr unter eine Sperrflüssigkeit taucht, angewärmt.

Der Stickstoff wurde durch wiederholtes langsames Leiten über glühende Kupferdrehspähne und Durchleiten durch Chromchlorür und alkalische Pyrogallussäurelösung von jeder Spur Sauerstoff befreit.

Das Einleiten des Stickgases geschieht mittelst einer dünnen Röhre, welche durch den Hahn der Fallvorrichtung auf den Boden des Apparates geführt wird, und oben durch einen Gummipfropfen denselben luftdicht verschließt, indem das Gasentbindungsrohr in die Sperrflüssigkeit taucht. Man leitet nun längere Zeit einen nicht zu langsamen Strom trocknes Stickgas durch den Apparat, bis sicher alle Luft verdrängt ist (cr. 20 Minuten), ziehet dann, ohne das Gasometer zu schließen, die Röhre bis kurz über den Hahn heraus, und verschließt den Apparat durch Drehung desselben.

Das abgewogene compacte Zinkstückchen befindet sich ohne Eimerchen in dem kleinen, ebenfalls mit reinstem Stickstoff gefüllten Warteraum der Fallvorrichtung. Die Erhitzung der mit 2 übereinander gestülpten hessischen Tiegeln umgebenen Birne geschah in

1) Ber. XII. pag. 1112.
2) Ber. 1885 pag. 1624.

einem Schmelzofen, der mit dem Hauptschornsteine des Laboratoriums in Verbindung steht und mit einer Mischung von Holzkohle und Coke geheizt wird. Der von uns benutzte Ofen hat einen Feuerraum von 640^{mm} Höhe und 330^{mm} Durchmesser; derselbe wird durch einen kreisförmigen Deckel von 460^{mm} Durchmesser und 80^{mm} Dicke verschlossen, welcher in zwei Hälften zerschnitten ist; die eine liegt fest und besitzt eine Durchbohrung, durch die der Hals des Porcellanapparates geht; die andere ist mit einem eisernen Bande und zwei Griffen versehen, so daß sie leicht verschiebbar ist und das Nachschütten des Heizmaterials gestattet. Das Zugloch befindet sich 50^{mm} unterhalb der festliegenden Deckelhälfte und besitzt einen Durchmesser von 140^{mm} und eine Höhe von 100^{mm}. Der Aschenraum, durch welchen auch die Luft zutritt, ist so breit wie der Ofen und 250^{mm} hoch und läßt sich durch eine eiserne Thür fest verschließen, um ein langsames Erkalten des Ofens und des darin befindlichen Apparates zu bewerkstelligen. Dieser sehr geräumige Ofen, — es ist derselbe, welchen Wöhler bei seinen Arbeiten über das Bor benutzt hat — ist in mancher Beziehung selbst den so bequemen Perrot'schen Gasöfen vorzuziehen. Er giebt, wenn man das Heizmaterial etwa auf die Hälfte herunterbrennen läßt, nachdem der Ofen längere Zeit bei ganzer Füllung in voller Glut erhalten worden, eine während längerer Zeit sehr constante Temperatur von ca 1400° C. Durch den heftigen Luftzug in das Zugloch, ferner durch den sehr starken Deckel aus Chamotte und einen darüber angebrachten trichterförmigen Eisenblechschirm wird die Wärmeausstrahlung nach oben fast gänzlich vermieden. Irgend welche Belästigung durch Hitze ist in dem im Souterrain gelegenen Arbeitsraume nicht bemerklich. — Das Nachschütten des Kohlengemisches muß sehr vorsichtig und in kleinen Portionen geschehen, da die durch das kalte Heizmaterial bewirkte Abkühlung stets ein Zurücksteigen der Sperrflüssigkeit veranlaßt, aus welchem Grunde das Gasentbindungsrohr an einer Stelle zu einer kleinen Kugel aufgeblasen sein muß. Erst, wenn der Ofen bis in die Höhe des Zuglochs geheizt ist, kann derselbe vollends gefüllt werden. — Daß bei dieser Art des Operirens — der beschriebenen Art der Stickstoffeinführung, der für diese Zwecke uns neuen Anwendung des Ofens und Heizmaterials etc. — dieselben Resultate gewonnen werden, wie V. und C. Meyer sie erhielten, beweisen Dichtebestimmungen mit reinem Schwefel, welche wir zur Controle und zu unserer Uebung anstellten und welche zu den für die Molekularformel S_2 berechneten Werthen führten. —

Mit dem beschriebenen Apparate gelingt, wenn alle Vorbereitungen sorgfältig getroffen sind, die Dampfdichtebestimmung des Zinks

mit der größten Leichtigkeit. Das Metall verdampft rasch und regelmäßig, und die Stickstoffentwickelung hört nach beendeter Verdampfung ebenso plötzlich auf, wie sie begonnen hat. — Um bei den Ablesungen des Stickstoffvolumens Meniscusfehler zu vermeiden, arbeiten wir stets in der Weise, daß wir zuerst einige Luftblasen in das Gasmeßrohr eintreten laßen, dann den die unteren Meniscus notiren und nach der Dampfdichtebestimmung wiederum den unteren Meniscus ablesen.

Versuch I wurde bei nicht voller —,

Versuch II bei ganzer Hitze des Ofens angestellt.

I Subst. 0,0238₉ Volumen 8,2 CCm. Barom. 736^{mm}. Temper. 7,8° C.
II » 0,0220 » » » 7,7 » » » 742 » » » 9° C.

Gefundene Dichte: I. II.
2,41 2,36.

Diese Ergebnissse führen zu der Molekularformel Zn, für das Zink, welche den Werth 2,25 verlangt.

Sonach zeigen die drei bis jetzt einzig in Bezug auf ihre Dampfdichte bekannten Metalle Quecksilber, Cadmium und Zink die gleiche Beziehung: ihre Moleküle bestehen aus je einem Atom.

Wir werden uns bemühen, noch andere Metalle dem Versuche zugänglich zu machen. Mit Magnesium haben wir bereits vielfach, aber immer erfolglos gearbeitet. Mit Stickstoff verbindet es sich bekanntlich, aber auch in einer Wasserstoffatmosphäre vermochten wir dasselbe nicht zu verdampfen. Dagegen hoffen wir mit dem Germanium, desssen Siedepunkt nach den Beobachtungen Winkler's dem des Zinks nahe zu liegen scheint, Erfolg zu haben.

Göttingen, Universitäts-Laboratorium.

Ueber einige Beziehungen zwischen hydrodynamischen und electrischen Erscheinungen.

Von

Eduard Riecke.

Ein besonderes Interesse werden stets diejenigen Untersuchungen für sich in Anspruch nehmen, durch welche verschiedenartige Gebiete der Physik mit einander in Beziehung gesetzt werden. Dieß kann geschehen durch neue experimentelle Thatsachen, wenn diese einen Einfluß von Körpern oder von Zuständen derselben auf Erscheinungen verrathen, welche bis dahin als von ihnen unabhängig betrachtet worden waren; der Zusammenhang der Erscheinungen kann aber auch

ein nur formaler sein, bedingt durch die Analogie der Gesetze, welche für sonst unvergleichbare Vorgänge gelten. Die Beziehungen der ersten Art, die Erscheinungen des Elektromagnetismus, die magnetische Drehung der Polarisationsebene, die Erzeugung von Wärme durch Arbeit sind von fundamentaler Bedeutung für die Wissenschaft; aber auch die Verfolgung der formalen Analogieen wird nicht ohne Nutzen sein, da dieselben die Uebertragung der für eine gewisse Gruppe von Erscheinungen gefundenen Gesetze auf ganz andere Gebiete gestatten.

Den Gegenstand der folgenden Betrachtungen bilden einige der zwischen Hydrodynamik und Elektricität bestehenden Beziehungen. Die vier ersten Abschnitte betreffen die Bewegung einer reibungslosen Flüssigkeit, welche den Raum erfüllt, der zwischen gewissen geschlossenen Flächen hindurch bis ins Unendliche sich erstreckt. Für eine gewisse stationäre Strömung werden die Drucke bestimmt, welche auf die als Quell- oder Saug-flächen auftretenden Grenzflächen der Flüssigkeit wirken. Dabei ergiebt sich eine vollkommene Uebereinstimmung dieser Kräfte mit gewissen elektrostatischen Wirkungen. Der zweite, dritte und vierte Abschnitt behandelt oscillatorische Strömungen der Flüssigkeit von ähnlicher Beschaffenheit wie diejenigen, welche bei den bekannten Versuchen von Bjerknes auftreten. Es war zu hoffen, daß diese Betrachtungen zu einer einfacheren physikalischen Anschauung über die Ursachen der eigenthümlichen Bewegungen führen würden, welche Bjerknes auf Grund seiner theoretischen Untersuchungen vorhergesagt hatte und welche er nachher in einer Reihe schöner Versuche verwirklicht hat. Die Rechnung ergab jedoch daß in unserem Falle die verschiedenen Componenten des wirkenden Druckes eine Resultante erzeugen, welche den von Bjerknes beobachteten Kräften in gewissen Fällen entgegengesetzt ist, in anderen gleich gerichtet sein kann. Die Untersuchungen von Bjerknes haben deßhalb ein so allgemeines Interesse erregt, weil sie einen Weg zu eröffnen schienen zu der Reduktion der Fernwirkungen insbesondere der Gravitation auf die Wirkungen von Druck und Spannung bei unmittelbarer Berührung, eine Reduktion, welche vielen als eines der nächsten und hauptsächlichsten Ziele der Wissenschaft erscheint. Die Untersuchungen von Bjerknes verlieren aber auch dann nicht ihr Interesse, wenn man jener Analogie mit den Gesetzen der Fernwirkung nur eine formale Bedeutung beilegt.

Der fünfte Abschnitt zeigt, daß die zwischen hydrodynamischer und galvanischer Strömung bestehende Analogie auch bei Berücksichtigung der inneren Reibung erhalten bleibt und behandelt insbesondere die Strömung einer reibenden Flüssigkeit zwischen zwei

parallelen einander in geringer Entfernung gegenüberstehenden Platten.

I.

Es sei gegeben eine inkompressible Flüssigkeit, welche den ganzen Raum erfüllt mit Ausschluß gewisser Hohlräume, deren Begrenzung durch die im Folgenden gemachten Angaben bestimmt wird. Im Raume sei eine beliebige Anzahl von festliegenden Punkten vertheilt; diesen werden gewisse Zahlen A_1, A_2, A_3 . . . zugeordnet, welche ebensowohl positive als negative Werthe besitzen können. Die Punkte selbst werden im Folgenden gleichfalls durch A_1, A_2, A_3 . . . bezeichnet. Betrachten wir die Zahlen A_1, A_2, A_3 . . . als elektrische Ladungen der entsprechenden Punkte, so ist das Potential des ganzen Punktsystems gegeben durch

$$V = \frac{A_1}{r_1} + \frac{A_2}{r_2} + \frac{A_3}{r_3} + \ldots$$

wo unter r_1, r_2, r_3 die Entfernungen eines beliebigen Raumpunktes von den Punkten A_1, A_2, A_3 zu verstehen sind. Wir ordnen nun jedem der Punkte A eine Fläche konstanten Potentiales zu, welche denselben rings umschließt. Diese Flächen, welche wir uns starr und unbeweglich denken wollen, mögen die Grenzflächen der Flüssigkeit bilden. Die ihnen entsprechenden Potentialwerthe werden durch C_1, C_2, C_3 . . . bezeichnet. Das Geschwindigkeitspotential der Flüssigkeit sei identisch mit dem elektrischen Potential V. Bezeichnen wir mit n_1, n_2 . . . die ins Innere der Flüssigkeit hineingehenden Normalen der Flächen $V = C$, so sind die Geschwindigkeiten in der Richtung derselben gegeben durch $\frac{\partial V}{\partial n_1}$, $\frac{\partial V}{\partial n_2}$ . . . Die Flüssigkeit wird demnach aus denjenigen Oberflächen, für welche die Constante C einen negativen Werth besitzt ausströmen, in diejenigen Flächen, welchen positive Werthe von C angehören, einströmen, sie muß an den Grenzflächen der ersten Art stets von neuem erzeugt werden, an den Grenzflächen der zweiten Art immer von neuem verschwinden.

Der Druck, welchen die Flüssigkeit auf ein Element irgend einer Grenzfläche ausübt, ist gegeben durch

$$p = -\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2$$

wenn wir die Dichte der Flüssigkeit durch μ bezeichnen und den in der Flüssigkeit herrschenden konstanten Druck gleich Null setzen. In der That übt also die Flüssigkeit in Folge ihrer Bewegung einen Zug auf das betreffende Element der Oberfläche aus, dessen Größe

durch $\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2$ bestimmt ist und dessen Richtung mit der in das Innere der Flüssigkeit hineingehenden Normale zusammenfällt.

Nehmen wir an, die Flächen $V = C$ wären hergestellt aus Metall und denken wir uns dieselben bedeckt mit elektrischem Fluidum, dessen Dichtigkeit in einem beliebigen Oberflächenelement gegeben ist durch $-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n}$ so besitzt die so hergestellte elektrische Ladung die folgenden Eigenschaften.

1. Die gesammte Ladung irgend einer Fläche ist gleich der elektrischen Masse A des von ihr umschlossenen Punktes.

2. Für jeden Punkt, welcher in dem von der Flüssigkeit erfüllten Raume liegt, ist das Gesammtpotential der Oberflächenbelegungen gleich dem Potential der elektrischen Massen A_1, A_2, A_3 . . . Denn es ist:

$$\frac{1}{4\pi}\int V\frac{\partial\frac{1}{r_p}}{\partial n}d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{r_p}\frac{\partial V}{\partial n}d\sigma = V_p$$

wenn wir unter r_p die Entfernung eines Oberflächenelementes $d\sigma$ von einem beliebigen Punkte p des Flüssigkeitsraumes verstehen, unter V_p den Werth des Potentiales V in dem Punkte p. In dem ersten Integral hat aber V an den Grenzflächen der Flüssigkeit die konstanten Werthe C_1, C_2, C_3 . . . somit zerfällt das erste Integral in ebensoviele einzelne Integrale, als der Flüssigkeitsraum Grenzflächen besitzt und wir erhalten:

$$\frac{1}{4\pi}\int V\frac{\partial\frac{1}{r_p}}{\partial n}d\sigma = \frac{C_1}{4\pi}\int\frac{\partial\frac{1}{r_p}}{\partial n_1}d\sigma_1 + \frac{C_2}{4\pi}\int\frac{\partial\frac{1}{r_p}}{\partial n_2}d\sigma_2 + \ldots = 0.$$

Damit ist gezeigt daß in der That

$$-\frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{r_p}\frac{\partial V}{\partial n}d\sigma = V_p$$

3. Das Potential der Oberflächenbelegung, deren Dichtigkeit gleich $-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n}$ ist, hat im Inneren einer jeden Grenzfläche denselben konstanten Werth C wie an der Fläche selbst.

Wenn wir also den Conduktoren, deren Grenzflächen durch die Gleichungen $V = C$ bestimmt sind, die Elektricitätsmengen A mittheilen, so sind dieselben im Gleichgewicht, wenn die Dichtigkeit in einem beliebigen Oberflächenelement gegeben ist durch $-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n}$.

Die von der Ladung aller Conduktoren auf die Einheit der elektrischen Masse an irgend einer der Grenzflächen ausgeübte Kraft ist gleich $-\frac{\partial V}{\partial n}$, wenn dieselbe sich an der äußeren, gleich Null, wenn sie sich an der inneren Seite dieser Oberfläche befindet, im Mittel also gleich $-\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial n}$. Auf jedes Element der Oberfläche der Conduktoren wird somit ein elektrischer Zug in der Richtung der äußeren Normale ausgeübt, welcher bezogen auf die Flächeneinheit gleich ist $\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2$.

Dieser elektrische Zug hat dieselbe Größe wie der früher betrachtetete hydrodynamische, wenn wir die Dichtigkeit der Flüssigkeit gleich $\frac{1}{4\pi}$ setzen.

Wenn die Entfernungen der starren Oberflächen, welche die Flüssigkeit ausströmen oder einsaugen, groß sind im Vergleich mit ihren Dimensionen, so werden die Resultanten der hydrodynamischen Drucke gleich sein den elektrischen Kräften, mit welchen die Punkte A_1, A_2, A_3 . . . auf einander wirken.

II.

Wir gehen über zu der Untersuchung von Strömungen, welche ein von der Zeit abhängendes Geschwindigkeitspotential besitzen, bei welchen also die Strömung nicht blos die Folge einer den Flüssigkeitstheilchen einmal ertheilten Geschwindigkeit ist, sondern durch beschleunigende Druck- oder Zug-kräfte mit bestimmt wird, welche auf die Oberfläche der Flüssigkeit wirken.

Wir betrachten zunächst den Fall, daß das Geschwindigkeitspotential gegeben ist durch

$$\varphi = \frac{A}{r}\cos\frac{2\pi t}{T}$$

wo r die Entfernung eines beliebigen Raumpunktes von dem im Raume festliegenden Punkte A bezeichnet. Die Bewegungsrichtung ist eine radiale bald gegen den Punkt A hin, bald von demselben weg gerichtet.

Zur Zeit $t = 0$ sei die Oberfläche der Flüssigkeit gebildet von zwei koncentrischen Kugeln, deren Mittelpunkt zusammenfällt mit dem Punkte A und welche die Radien a und b besitzen mögen. In Folge der Bewegung der Flüssigkeit sind ihre Grenzflächen einer fortwährenden Veränderung unterworfen bestehend in einer abwech-

selnden Contraktion und Dilatation der dieselben bildenden Kugeln. Die Geschwindigkeit eines Flüssigkeitstheilchens ist gegeben durch

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{A}{r^2}\cos\frac{2\pi t}{T}.$$

Bezeichnen wir durch r_a den jeweiligen Halbmesser der inneren, durch r_b den der äußeren Kugel, so ergiebt sich aus der vorstehenden Gleichung

$$r_a^3 = a^3 - \frac{3T}{2\pi} A \sin\frac{2\pi t}{T}$$

$$r_b^3 = b^3 - \frac{3T}{2\pi} A \sin\frac{2\pi t}{T}$$

die größten Werthe

$$r_a^3 = a^3 + \frac{3T}{2\pi}, \qquad r_b^3 = b^3 + \frac{3T}{2\pi}$$

erreichen diese Radien für

$$t = \frac{3}{4}T, \quad \frac{7}{4}T \ldots$$

die größte Contraction der Grenzflächen findet statt zu den Zeiten

$$t = \frac{T}{4}, \quad \frac{5T}{4}, \ldots$$

Die Werthe der Radien sind dann gegeben durch

$$r_a^3 = a^3 - \frac{3T}{2\pi}, \qquad r_b^3 = b^3 - \frac{3T}{2\pi}.$$

Sind die Bewegungen klein, so sind die Amplituden der Schwingung für die innere und äußere Grenzfläche gegeben durch

$$\frac{T}{\pi}\frac{A}{a^2}, \qquad \frac{T}{\pi}\frac{A}{b^2}.$$

Bezeichnen wir durch n_a und n_b die jeweiligen Abweichungen der Grenzflächen von den dem Ruhezustand entsprechenden Kugeln a und b, so ergiebt sich:

$$n_a = -\frac{T}{2\pi}\frac{A}{a^2}\sin\frac{2\pi t}{T}, \qquad n_b = -\frac{T}{2\pi}\frac{A}{b^2}\sin\frac{2\pi t}{T}.$$

Ein beliebiges Element der inneren Grenzfläche der Flüssigkeit besitzt zur Zeit $t = 0$ den Inhalt $d\omega_a$; zu irgend einer anderen Zeit ist dann seine Fläche gegeben durch

$$d\omega_a' = d\omega_a\left(1 + \frac{2n_a}{a}\right)$$

Ebenso ist

$$d\omega_b' = d\omega_b\left(1 + \frac{2n_b}{b}\right).$$

Der Druck der Flüssigkeit ist:

$$p = c + \frac{2\pi}{T}\mu\frac{A}{r}\sin\frac{2\pi t}{T} - \frac{\mu}{2}\frac{A^2}{r^4}\cos^2\frac{2\pi t}{T}.$$

Insbesondere ergiebt sich für die innere Grenzfläche, wenn wir berücksichtigen, daß der Druck hier abhängig ist von n_a und wenn wir dementsprechend nach Potenzen von n_a entwickeln

$$p_a = c + \frac{2\pi}{T}\mu\frac{A}{a}\sin\frac{2\pi t}{T} - \frac{\mu}{2}\frac{A^2}{a^4}\left(1 - 3\sin^2\frac{2\pi t}{T}\right).$$

Ebenso wird für die äußere Grenzfläche

$$p_b = c + \frac{2\pi}{T}\mu\frac{A}{b}\sin\frac{2\pi t}{T} - \frac{\mu}{2}\frac{A^2}{b^4}\left(1 - 3\sin^2\frac{2\pi t}{T}\right).$$

Zu dem konstanten Druck c, welcher in der ruhenden Flüssigkeit herrschen würde, kommen somit noch veränderliche Drucke hinzu, welche als Ursache oder Folge der Bewegung zu betrachten sind. In erster Linie sind dieß die Drucke

$$\frac{2\pi}{T}\mu\frac{A}{a}\sin\frac{2\pi t}{T} \quad \text{und} \quad \frac{2\pi}{T}\mu\frac{A}{b}\sin\frac{2\pi t}{T}$$

welche proportional der Amplitude der Schwingung und dem Radius der betreffenden Kugelfläche sind. Dieselben sind positiv in den Zeitintervallen

$$t = 0 \text{ bis } t = \frac{T}{2}, \quad t = T \text{ bis } t = \frac{3}{2}T \ldots$$

sie werden also während dieser Zeiten hervorgebracht durch Kräfte, welche auf die beiden Grenzflächen der Flüssigkeit wirken und welche in das Innere der Flüssigkeit hinein gerichtet sind. In den Zeitintervallen

$$t = \frac{T}{2} \text{ bis } t = T, \quad t = \frac{3}{2}T \text{ bis } t = 2T \ldots$$

sind die Drucke

$$\frac{2\pi}{T}\mu\frac{A}{a}\sin\frac{2\pi t}{T} \quad \text{und} \quad \frac{2\pi}{T}\mu\frac{A}{b}\sin\frac{2\pi t}{T}$$

negativ, werden also erzeugt durch äußere nach den angrenzenden Räumen hin gerichtete Zugkräfte.

Betrachten wir ein beliebiges Element der inneren Grenzfläche, so wirkt auf dieses einmal der konstante Druck c, sodann der Druck

$$\frac{2\pi}{T}\mu\frac{A}{a}\sin\frac{2\pi t}{T}$$

welcher abwechselnd positive und negative Werthe besitzt. Im Mittel wird aber dieser Druck während eines längeren Zeitraumes nicht verschwinden wegen der gleichzeitigen Veränderungen, welche die Fläche des betrachteten Elementes erleidet. Wir bestimmen ein beliebiges Element der inneren Grenzfläche dadurch, daß wir seinen Flächeninhalt zur Zeit $t = 0$ gleich $d\omega_{\bullet}$ setzen. Dasselbe Element hat zu einer späteren Zeit den Inhalt

$$d\omega'_{\bullet} = d\omega_{\bullet}\left(1 - \frac{TA}{\pi a^3}\sin\frac{2\pi t}{T}\right).$$

Die auf dasselbe zur Zeit t ausgeübte Kraft hat somit den Werth

$$\left\{c + \mu\frac{2\pi}{T}\frac{A}{a}\sin\frac{2\pi t}{T} - \frac{\mu}{2}\frac{A^2}{a^4}\left(1 - 3\sin^2\frac{2\pi t}{T}\right)\right\}\left\{1 - \frac{TA}{\pi a^3}\sin\frac{2\pi t}{T}\right\}d\omega_{\bullet}.$$

Der mittlere Druck, welchen das Element $d\omega_{\bullet}$ während der Periode von $t = 0$ bis $t = nT$ erleidet ist gegeben durch

$$\bar{p}_{\bullet} = \frac{1}{nT}\int_0^{nT}\left\{c + \mu\frac{2\pi}{T}\frac{A}{a}\sin\frac{2\pi t}{T} - \frac{\mu}{2}\frac{A^2}{a^4}\left(1 - 3\sin^2\frac{2\pi t}{T}\right)\right\}$$
$$\times\left\{1 - \frac{TA}{\pi a^3}\sin\frac{2\pi t}{T}\right\}dt.$$

Vernachlässigen wir bei der Berechnung dieses Integrals die dritte Potenz der Schwingungsamplitude, so ergiebt sich als Mittelwerth des auf das Element $d\omega_{\bullet}$ ausgeübten Druckes

$$\bar{p}_{\bullet} = c - \frac{3}{4}\mu\frac{A^2}{a^4}.$$

Ebenso wird für die äußere Grenzfläche

$$\bar{p}_{\iota} = c - \frac{3}{4}\mu\frac{A^2}{b^4}.$$

Die Constante c läßt sich so bestimmen, daß der mittlere Druck auf der äußeren oder inneren Oberfläche gleich Null wird. Im ersteren Falle ist

$$\bar{p}_{\bullet} = -\frac{3}{4}\mu A^2\left(\frac{1}{a^4} - \frac{1}{b^4}\right)$$

im zweiten Fall

$$\bar{p}_{\iota} = \frac{3}{4}\mu A^2\left(\frac{1}{a^4} - \frac{1}{b^4}\right).$$

Der mittlere Druck entspricht im ersten Falle einem von dem inneren Hohlraum aus auf die Oberfläche der Flüssigkeit wirkenden Zuge, im zweiten Fall einem von dem äußeren Raum ausgeübten Druck.

III.

Wir betrachten nun den Fall einer ins Unendliche sich erstreckenden Flüssigkeit, in welcher eine beliebige Anzahl blasenförmiger Hohlräume eingeschlossen ist. Das Geschwindigkeitspotential sei gegeben durch

$$\varphi = V \cos \frac{2\pi t}{T}$$

wo

$$V = \frac{A_1}{r_1} + \frac{A_2}{r_2} + \frac{A_3}{r_3} + \dots$$

also ebenso, wie im ersten Abschnitte das Geschwindigkeitspotential selber, identisch ist mit dem elektrostatischen Potentiale der Punkte A, wenn wir unter A die in denselben koncentrirten elektrischen Massen verstehen. Zur Zeit $t = 0$ sei die Flüssigkeit begrenzt durch Flächen konstanten Potentiales $V = C_1$, $V = C_2$, $V = C_3 \dots$ welche je einen der Punkte A vollständig umschließen. Auf irgend einer der Grenzflächen liege das Element $d\omega$; die in das Innere der Flüssigkeit hineingehende Normale sei n, die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in der Richtung derselben ist:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\partial V}{\partial n} \cos \frac{2\pi t}{T}.$$

Die Abweichung, welche das Element $d\omega$ zur Zeit t von dem entsprechenden Element der Fläche $V = C$ besitzt, berechnen wir unter der Voraussetzung, daß dieselbe sehr klein bleibt. Dann ergiebt sich durch Entwicklung nach Potenzen von n

$$\frac{dn}{dt} = \left(\frac{\partial V}{\partial n_0} + \frac{\partial^2 V}{\partial n_0^2} n\right) \cos \frac{2\pi t}{T}$$

wo unter $\frac{\partial V}{\partial n_0}$ und $\frac{\partial^2 V}{\partial n_0^2}$ diejenigen Werthe zu verstehen sind, welche diese Differentialquotienten an der Fläche $V = C$ besitzen. Führen wir die abkürzenden Bezeichnungen ein:

$$\frac{\partial V}{\partial n_0} = \alpha, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial n_0^2} = \beta$$

so ergiebt sich:

$$n = \frac{\alpha}{\beta}\left\{e^{\frac{\beta T}{2\pi}\sin\frac{2\pi t}{T}} - 1\right\}$$

oder durch Entwicklung von $e^{\frac{\beta T}{2\pi}\sin\frac{2\pi t}{T}}$

$$n = \frac{T}{2\pi}\frac{\partial V}{\partial n_0}\sin\frac{2\pi t}{T}$$

wenn $T\frac{\partial^2 V}{\partial n_0^2}$ gegen 1 vernachlässigt wird.

Zur Zeit $t = 0$ ist $n = 0$, d. h. es fällt das Element $d\omega$ der Grenzfläche zusammen mit dem entsprechenden Element der Oberfläche $V = C$. Bei einem positiven Werthe von A ist im Allgemeinen $\frac{\partial V}{\partial n}$ negativ. Die Grenzfläche der Flüssigkeit weicht dann mit wachsender Zeit gegen die Fläche $V = C$ nach innen zurück, um zur Zeit $t = \frac{T}{4}$ ein Maximum der Contraktion zu erreichen; zur Zeit $t = \frac{T}{2}$ geht die Grenzfläche durch die Fläche $V = C$ hindurch, um sich dann nach außen hin von derselben zu entfernen. Das Maximum der Dilatation findet statt zur Zeit $t = \frac{3}{4}T$.

Die Grenzfläche der Flüssigkeit ist in einer oscillirenden Bewegung begriffen, deren Gleichgewichtslage durch die Fläche $V = C$, deren Amplitude durch

$$\frac{T}{\pi}\cdot\frac{\partial V}{\partial n} \quad \text{gegeben ist.}$$

Verstehen wir unter $d\omega_0$ den Inhalt desjenigen Elementes der Fläche $V = C$, mit welchem das Element $d\omega$ der Grenzfläche der Flüssigkeit für $t = 0, \frac{T}{2}, T \ldots$ zur Deckung gelangt, bezeichnen wir ferner durch ρ_1 und ρ_2 die Hauptkrümmungsradien des Elementes $d\omega_0$, so ist:

$$d\omega = d\omega_0 + d\omega_0\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)n$$

oder

$$d\omega = d\omega_0 + d\omega_0\frac{T}{2\pi}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)\frac{\partial V}{\partial n_0}\sin\frac{2\pi t}{T}.$$

Der Druck der Flüssigkeit ist gegeben durch

$$p = c + \mu\frac{2\pi}{T}V\sin\frac{2\pi t}{T} - \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2\cos^2\frac{2\pi t}{T}$$

Hier ist sowohl V als $\frac{\partial V}{\partial n}$ abhängig von n; durch Entwicklung nach Potenzen von n ergiebt sich mit derselben Vernachlässigung wie früher für den auf das Element $d\omega$ ausgeübten Druck

$$p = c + \mu\frac{2\pi}{T}C\sin\frac{2\pi t}{T} - \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)^2\left(1 - 3\sin^2\frac{2\pi t}{T}\right).$$

Der mittlere Druck, welchen das Element $d\omega$ während der Periode von $t = 0$ bis $t = nT$ erleidet, ist gegeben durch

$$\bar{p}\,d\omega_e = \frac{1}{nT}\int_0^{nT} p\,d\omega\,dt.$$

Woraus

$$\bar{p} = c + \frac{\mu}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)C\frac{\partial V}{\partial n_e} + \frac{\mu}{4}\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)^2.$$

Man kann diesem Ausdruck noch eine andere Form geben mit Benutzung eines von Beltrami bewiesenen Satzes. Wir haben schon im ersten Abschnitte gezeigt, daß das Potential V für alle außerhalb der Flächen C liegenden Punkte identisch ist mit dem Potential der Elektricitätsmengen A, wenn dieselben auf den als leitend betrachteten Flächen C im Gleichgewichte sich befinden; das Potential der so bestimmten Oberflächenvertheilung hat dann auch im ganzen Inneren jener Flächen die konstanten Werthe C. Nun gilt für jede beliebige Oberflächenvertheilung elektrischer Massen der Satz[1]):

$$\frac{\partial^2 V}{\partial n^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial n'^2} = 4\pi h\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right).$$

Da bei der Gleichgewichtsvertheilung der elektrischen Massen auf den Flächen C die Differentialquotienten nach der inneren Normale verschwinden, so ist für diese

$$h = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n_e}$$

und

$$\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)\frac{\partial V}{\partial n_e} = -\frac{\partial^2 V}{\partial n_e^2}.$$

Für den mittleren Druck, welcher auf ein Element der Grenz-

1) Beltrami. Intorno ad alcuni nuovi teoremi di Neumann sulle funzioni potenziali. Ann. d. Mat. Ser. II. T. X. 46.

flächen der Flüssigkeit ausgeübt wird, ergiebt sich somit der Ausdruck

$$\bar{p} = c - \frac{\mu}{2} C \frac{\partial^2 V}{\partial n_e^2} + \frac{\mu}{4} \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)^2.$$

Dieser Druck stellt sich dar als eine Summe von drei Componenten, von welchen die erste dem konstanten in der ruhenden Flüssigkeit herrschenden Drucke entspricht, die beiden anderen abhängig sind von der Lage des betreffenden Oberflächenelementes.

Die dritte Componente ist wesentlich positiv und stellt daher eine Vermehrung des konstanten in der ruhenden Flüssigkeit herrschenden Druckes c dar; $\frac{\partial V}{\partial n_e}$ ist um so größer je näher die aufeinanderfolgenden Flächen konstanten Potentiales an einander rücken; die durch die dritte Componente bedingte Druckvermehrung ist daher in den einzelnen Stellen der Grenzfläche dem Quadrate des Abstandes von der benachbarten Potentialfläche umgekehrt proportional.

Das Vorzeichen des zweiten Terms wird bestimmt durch das Vorzeichen des konstanten Potentialwerthes C und das Vorzeichen von $\frac{\partial V}{\partial n_e}$. Besitzen beide dasselbe Zeichen, so ist die zweite Druckkomponente gleichfalls positiv, besitzen sie entgegengesetztes Zeichen, so ist sie negativ. Der letztere Fall tritt ein, wenn eine Grenzfläche der Flüssigkeit den ihr zugeordneten Punkt A so umschließt, daß A und C dasselbe Vorzeichen besitzen. Unter dieser Voraussetzung bedingt also die zweite Druckkomponente stets eine Verminderung des konstanten Druckes c und zwar ist diese Verminderung an einer beliebigen Stelle der Grenzfläche dem Abstand der benachbarten Potentialfläche umgekehrt proportional. Ob nun im Ganzen eine Verminderung oder eine Vermehrung des konstanten Druckes c zu stande kommt, das hängt ab von dem Verhältniß der zweiten und dritten Druckkomponente. Ueberwiegt die zweite Komponente, so wird der Druck c vermindert. An einer bestimmten Grenzfläche der Flüssigkeit ist der Druck am größten da, wo der Abstand derselben von der benachbarten Potentialfläche am größten, er wird um so kleiner, je kleiner jener Abstand ist. Wird die betrachtete Grenzfläche gebildet durch die Oberfläche eines festen Körpers, der in der Flüssigkeit pulsirt, so wird der letztere getrieben von den Stellen mit größerem Abstand der

Potentiallinien zu den Stellen mit kleinerem Abstand, also entgegengesetzt wie bei den Versuchen von Bjerknes.

Ueberwiegt hingegen die dritte positive Druckkomponente über die zweite, so findet allenthalben an der Grenzfläche eine Vermehrung des konstanten Druckes c statt, welche um so größer ist, je geringer der Abstand der benachbarten Potentialfläche. Es wird somit in diesem Falle der Körper von den Stellen, an welchen die benachbarten Potentialflächen sich dichter zusammenschließen zu den Stellen mit größerem Abstand dieser Flächen getrieben.

Dasselbe tritt natürlich dann ein, wenn C und $\frac{\partial V}{\partial n_e}$ gleiches Vorzeichen besitzen und in Folge hiervon die zweite Druckkomponente ebenfalls positiv ist. Auch in diesem Falle ist der Sinn der auf den Körper wirkenden translatorischen Kräfte derselbe wie bei Bjerknes.

IV.

Die in dem vorhergehenden Abschnitte enthaltenen Betrachtungen mögen noch etwas weiter ausgeführt werden in dem Fall, daß nur zwei Hohlräume im Inneren der Flüssigkeit vorhanden sind, und daß die Dimensionen derselben sehr klein sind im Vergleich zu der Entfernung der ihnen zugeordneten Punkte A_1 und A_2.

Die Entfernung der Punkte A_1 und A_2 möge bezeichnet werden durch R. Den Punkt A_1 nehmen wir zum Anfangspunkt, die Richtung $A_1 A_2$ zur x Axe eines Systems rechtwinkliger Coordinaten. Den Abstand eines beliebigen Raumpunktes von dem Punkte A_1 bezeichnen wir durch r, den Abstand desselben von der x Axe durch y. Der Werth des Potentiales V in diesem Punkte ist dann:

$$V = \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{\sqrt{R^2 - 2Rx + r^2}}$$

oder durch Entwickelung nach Kugelfunktionen

$$V = \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{R}\left\{1 + \frac{x}{R} + \frac{3x^2 - r^2}{2R^2}\right\}.$$

Setzen wir $V = C_1$, so ergiebt sich als Gleichung der den Punkt A_1 umhüllenden Fläche konstanten Potentiales

$$C_1 = \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{R}\left\{1 + \frac{x}{R} + \frac{3x^2 - r^2}{2R^2}\right\}$$

oder mit $x = r\cos\varphi$

$$C_1 = \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{R}\left\{1 + \frac{r\cos\varphi}{R} + \frac{r^2(3\cos^2\varphi - 1)}{2R^2}\right\}.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{A_1}{C_1 R - A_2} = \alpha$$

so ergiebt sich

$$\frac{r}{R} - \alpha\frac{A_2}{A_1}\cos\varphi\,\frac{r^2}{R^2} - \alpha\frac{A_2}{A_1}\,\frac{3\cos^2\varphi - 1}{2}\,\frac{r^3}{R^3} = \alpha$$

oder wenn wir nach Potenzen von α entwickeln und die höheren Potenzen von der fünften an vernachlässigen

$$\frac{r}{R} = \alpha + \alpha^2\frac{A_2}{A_1}\cos\varphi + \alpha^4\frac{A_2}{A_1}\,\frac{3\cos^2\varphi - 1}{2}.$$

Die Fläche konstanten Potentiales ist in dem vorliegenden Falle eine Rotationsfläche, deren Rotationsaxe die x Axe ist. Der Krümmungsradius des Meridianschnittes wird gegeben durch

$$\frac{\rho_1}{R} = \alpha + \alpha^4\frac{A_2}{A_1}\,\frac{5-9\cos^2\varphi}{2}.$$

Der zweite Hauptkrümmungsradius durch

$$\frac{\rho_2}{R} = \alpha - \alpha^4\frac{A_2}{A_1}\,\frac{1+3\cos^2\varphi}{2}.$$

Somit

$$\frac{R}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) = \frac{1}{\alpha}\left\{1 - \alpha^3\frac{A_2}{A_1}\Big(1 - 3\cos^2\varphi\Big)\right\}.$$

Es wird ferner

$$\alpha^2 R^2\frac{\partial V}{\partial n_e} = -A_1\left\{1 - 3\alpha^2\frac{A_2}{A_1}\cos\varphi - 2\alpha^3\frac{A_2}{A_1}\Big(3\cos^2\varphi - 1\Big)\right\}$$

da

$$C_1 = \frac{A_1 + \alpha A_2}{\alpha R}$$

so ergiebt sich

$$\frac{\mu}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)C_1\frac{\partial V}{\partial n_e} = -\frac{\mu A_1^2}{\alpha^4 R^4}\left\{1 + \alpha\frac{A_2}{A_1} + \alpha^3\frac{A_2}{A_1}\right\}$$
$$+\frac{3\mu A_1 A_2}{\alpha^2 R^4}\cos\varphi\left\{1 + \alpha\left(\frac{A_2}{A_1} + \cos\varphi\right)\right\}$$

$$\frac{\mu}{4}\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)^2 = \frac{\mu A_1^2}{4\alpha^4 R^4}\left\{1+4\alpha^3\frac{A_2}{A_1}\right\} - \frac{3\mu A_1 A_2}{2\alpha^2 R^4}\cos\varphi\left\{1+2\alpha\cos\varphi\right\}.$$

Der ganze Druck, welcher auf ein beliebiges Element der betrachteten Grenzfläche ausgeübt wird, ist daher

$$c+\frac{\mu}{2}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)C_1\frac{\partial V}{\partial n_e}+\frac{\mu}{4}\left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)^2 = c-\frac{\mu A_1^2}{4\alpha^4 R^4}\left\{3+4\alpha\frac{A_2}{A_1}\right\}$$
$$+\frac{3\mu A_1 A_2}{2\alpha^2 R^4}\left\{1+2\alpha\frac{A_2}{A_1}\right\}\cos\varphi.$$

Hiebei ist in der ersten Klammer α^4, in der zweiten Klammer α^2 vernachlässigt gegen 1.

Haben A_1 und A_2 das gleiche Vorzeichen, pulsiren also die beiden im Inneren der Flüssigkeit befindlichen Körper mit gleicher Phase, so erreicht der Druck seinen größten Werth für $\varphi = 0$, d. h. in demjenigen Punkte P, welcher auf der die Punkte A_1 und A_2 verbindenden Linie liegt. Beim Uebergang zu irgend einem anderen Punkt der Fläche C_1 nimmt der veränderliche Theil des Druckes ab wie der Cosinus des Winkels φ, den der Radius Vektor der betrachteten Stelle mit $A_1 A_2$ bildet. Der Druck ist also am kleinsten an derjenigen Stelle der Oberfläche, welche von der Verlängerung von $A_1 A_2$ getroffen wird. Der Körper C_1 wird somit von der inneren dem Körper C_2 zugewandten Seite nach außen getrieben. Da die Verhältnisse bei C_2 sich ganz analog gestalten, so kommt eine gegenseitige Abstoßung der beiden Körper zu Stande, während nach Bjerknes zwei mit derselben Phase pulsirende Kugeln sich anziehen.

Sind im Gegentheil die Vorzeichen von A_1 und A_2 verschieden, so ist das dem $\cos\varphi$ proportionale Glied mit negativem Vorzeichen behaftet, der Druck ist am kleinsten an der Stelle P, am größten an der gegenüberliegenden Stelle. Die beiden Körper werden von Außen nach Innen getrieben und an Stelle der Abstoßung derselben tritt eine Annäherung, während zwei mit entgegengesetzter Phase pulsirende Kugeln sich abstoßen.

V.

Wir betrachten endlich noch die Strömung einer Flüssigkeit mit Berücksichtigung der inneren Reibung. Wenn die Flüssigkeit den ganzen Raum erfüllt, so werden die hydrodynamischen Differentialgleichungen auch in diesem Falle dadurch befriedigt, daß die Strömung ein Geschwindigkeitspotential besitzt, welches der Gleichung $\Delta\varphi = 0$ genügt. Es ergiebt sich hieraus, daß auch eine mit innerer Reibung behaftete Flüssigkeit im unbegrenzten Raume diselben Strö-

mungsverhältnisse darbietet, wie die elektrischen Flüssigkeiten, wenn die Elektroden an die Stelle der Quell- und Saug-Flächen der Flüssigkeit gesetzt werden.

Die Analogie der Strömung einer reibenden Flüssigkeit mit der galvanischen Strömung bleibt erhalten, wenn die Flüssigkeit nur nach 2 Dimensionen in die Unendlichkeit sich erstreckt, während sie nach der dritten begrenzt wird von zwei parallelen in kleinem Abstande einander gegenüberstehenden Platten. Um dieß zu beweisen, machen wir die Mittelebene der Flüssigkeitsplatte zur xy Ebene eines rechtwinkeligen Coordinatensystems. Die Dicke der Platte sei $2c$. Die Bedingungsgleichungen sind unter der Voraussetzung kleiner Geschwindigkeiten

$$\frac{\partial p}{\partial x} = k\Delta u, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = k\Delta v$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$u = v = 0$ für $z = \pm c$.

Wir setzen

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

und erhalten zur Bestimmung von p und φ die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

$$k\Delta\varphi = p.$$

Machen wir für φ den Ansatz

$$\varphi = \Phi_1 \cos\frac{z\pi}{2c} + \Phi_3 \cos\frac{3z\pi}{2c} + \Phi_5 \cos\frac{5z\pi}{2c} + \ldots$$

so wird:

$$\Delta\varphi = -\frac{\pi^2}{4c^2}\Phi_1 \cos\frac{z\pi}{2c} - \frac{9\pi^2}{4c^2}\Phi_3 \cos\frac{3z\pi}{2c} - \frac{25\pi^2}{4c^2}\Phi_5 \cos\frac{5z\pi}{2c} - \ldots.$$

Nehmen wir an, daß p nur abhängig ist von x und y, so können wir setzen:

$$p = \frac{4}{\pi} p \cos\frac{z\pi}{2c} - \frac{4}{3\pi} p \cos\frac{3z\pi}{2c} + \frac{4}{5\pi} p \cos\frac{5z\pi}{2c} - + \ldots$$

und erhalten dann:

$$\Phi_1 = -\frac{16c^2}{\pi^3 k}p, \quad \Phi_3 = \frac{16c^2}{27\pi^3 k}p, \quad \Phi_5 = -\frac{16c^2}{125\pi^3 k}p \; \ldots$$

$$\varphi = -p\frac{16c^2}{\pi^3 k}\left\{\cos\frac{z\pi}{2c} - \frac{1}{27}\cos\frac{3z\pi}{2c} + \frac{1}{125}\cos\frac{5z\pi}{2c} - + \ldots\right\}.$$

Die Curven konstanten Geschwindigkeitspotentiales fallen somit zusammen mit den Horizontalschnitten der Flächen konstanten Drucks, wenn wir die xy Ebene und die beiden die Platte begrenzenden Ebenen uns horizontal gestellt denken.

Bei einer Einströmungs- und einer Ausströmungsstelle setzen wir:

$$p = M \log\frac{a}{b}$$

wo b die Entfernuug des betrachteten Punktes von einer durch den Einströmungspunkt gezogenen Vertikallinie bezeichnet, a seine Entfernung von einer durch den Ausströmungspunkt gezogenen Vertikalen. Die Curven φ = Constaus sind dann identisch mit den Curven, deren Punkte beim Durchgang eines elektrischen Stroms durch die Platte dasselbe elektrostatische Potential besitzen; die hydrodynamischen Strömungslinien identisch mit den galvanischen.

Für die Stromstärke, d. h. für das Volumen der Flüssigkeit, welches in der Zeiteinheit durch die Platte hindurchströmt, ergiebt sich der Werth

$$Q = \frac{128c^3 M}{\pi^3 k}\left\{1 + \frac{1}{81} + \frac{1}{625} + \ldots\right\}.$$

Zur experimentellen Prüfung des gefundenen Satzes wurden zwei kreisförmige Glasplatten von 200 mm. Durchmesser gegen die beiden Seiten eines Messingringes gepreßt; die Dichtung des so hergestellten Hohlraumes wurde durch zwischengelegte Gummiringe erreicht. Der Einfluß und Abfluß der Flüssigkeit wurde durch zwei im Abstand von 75 mm. senkrecht in die obere Glasplatte eingesetzte Messingröhren vermittelt. Die Flüssigkeit, verdünnter Akohol strömte unter angemessenem Drucke aus einem tubulirten Cylinder in die Platte ein. Die Strömungslinien wurden mit Hülfe kleiner in dem Alkohol suspendirter Wachstheilchen bestimmt. An der Einströmungsstelle entwickelt sich ein Wirbel, dessen störender Einfluß noch bis gegen die Mitte zwischen der Einströmungs- und Auströmungs-Stelle sich bemerklich macht; von da ab aber erwiesen sich die gegen die Ausströmungstelle konvergirenden Stromlinien als

kreisförmig. Nur die äußersten derselben waren abgeplattet in Folge der kreisförmigen Begrenzung der Flüssigkeitsplatte.

Die Analogie der Strömung einer reibenden Flüssigkeit mit der galvanischen Strömung erstreckt sich endlich auch auf den Fall der Strömung durch ein Capillarrohr einerseits, einen linearen Leiter andererseits. Denn nach dem Gesetze von Poisseuille ist das gesammte Volumen einer Flüssigkeit, welches in der Zeiteinheit durch den Querschnitt einer cylindrischen Röhre hindurchgeht, gegeben durch

$$Q = \pi \frac{p_o - p_i}{8kl} R^4.$$

Setzen wir

$$Q = \frac{p_o - p_i}{W}, \qquad W = \frac{8kl}{\pi R^4}$$

und bezeichnen wir W als den hydrodynamischen Widerstand der Röhre, so ergeben sich die Sätze:

Bei einer Reihe von hinter einander liegenden Röhren ist die in der Zeiteinheit durchfließende Flüssigkeitsmenge gleich der Druckdifferenz an den Enden des Systems dividirt durch die Summe sämmtlicher Widerstände.

Bei einer Theilung des Stromes zwischen verschiedenen neben einander liegenden Röhren verhalten sich die den einzelnen entsprechenden Stromstärken wie die reciproken Werthe der Widerstände[1]).

Das Poisseuille'sche Gesetz läßt endlich noch eine ganz analoge Verallgemeinerung zu wie das Ohm'sche. Sind nämlich p, u, v, w Integrale der Gleichungen

$$\frac{\partial p}{\partial x} = k\Delta u, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = k\Delta v, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = k\Delta w$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

so werden dieselben auch befriedigt durch $\alpha p + \beta$, αu, αv, αw, wo α und β Constante sind. Für einen Hohlraum von beliebiger Form gilt somit der Satz:

Der Quotient aus der Druckdifferenz in der Ein- und Ausströmungsstelle und aus der Stärke des Stromes ist eine Constante, welche als der hydrodynamische Widerstand des Raumes bezeichnet werden kann.

---

1) Eine experimentelle Prüfung dieses Satzes wurde ausgeführt in einer Breslauer Dissertation des Herrn J. B. Rostalski. Beibl. d. Ann. d. Phys. II. 1878.

Es sei beispielsweise in dem zuvor betrachteten Falle der Strömung zwischen zwei parallellen Platten die Einströmungsfläche gegeben durch eine Fläche konstanten Druckes für welche $a = a_1$ und $b = b_1$, die Ausströmungsfläche durch eine Fläche konstanten Druckes mit $a = a_2$ und $b = b_2$, so ist:

$$\frac{p_1 - p_2}{Q} = \frac{\pi^2 k}{128 c^3} \log \frac{a_1 b_2}{b_1 a_2}$$

Der hydrodynamische Widerstand einer solchen Platte wird also durch den rechts stehenden Ausdruck bestimmt.

Eine neue Classe auf einander abwickelbarer Flächen.

Von

J. Weingarten, Corresp.

Die Anzahl der Fälle, in denen es bisher gelungen ist, die Gesammtheit aller Flächen, welche auf eine gegebene Fläche abwickelbar sind, vollständig darzustellen, ist, wenn wir nicht irren, auf drei beschränkt. Nur für die auf eine Ebene abwickelbaren Flächen und für zwei Classen von Flächen, welche auf specielle Rotationsflächen abwickelbar sind, ist diese Darstellung bisher durch endliche Gleichungen gegeben worden. Bei dieser kleinen Zahl von Beispielen dürfte die Mittheilung einer neuen Classe von auf einander abwickelbaren Flächen, unter deren Individuen sich Rotationsflächen nicht vorfinden, vielleicht einiges Interesse darbieten. Das Quadrat des Linienelementes der dieser neuen Classe angehörenden Flächen kann auf die Form

$$(\alpha^{\frac{2}{3}} + \beta^{\frac{2}{3}})\,(d\alpha^2 + d\beta^2)$$

gebracht werden, aus welcher man nach einem bekannten Liouvilleschen Theorem erkennt, dass die geodätischen Linien für jede dieser Classe angehörende Fläche durch Quadraturen bestimmbar sind, eine Eigenschaft, welche in gleicher Weise den drei bis jetzt bekannt gewesenen Classen von auf einander abwickelbaren Flächen zukommt.

Für die Darstellung dieser Flächenclasse ist es am einfachsten,

zum Ausgangspunkte die nachstehenden Grundgleichungen der Geometrie der krummen Flächen

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial p} &= M\frac{\partial X}{\partial p}+N\frac{\partial X}{\partial q}, & \frac{\partial x}{\partial q} &= M'\frac{\partial X}{\partial p}+N'\frac{\partial X}{\partial q}\\
\frac{\partial y}{\partial p} &= M\frac{\partial Y}{\partial p}+N\frac{\partial Y}{\partial q}, & \frac{\partial y}{\partial q} &= M'\frac{\partial Y}{\partial p}+N'\frac{\partial Y}{\partial q}\\
\frac{\partial z}{\partial p} &= M\frac{\partial Z}{\partial p}+N\frac{\partial Z}{\partial q}, & \frac{\partial z}{\partial q} &= M'\frac{\partial Z}{\partial p}+N'\frac{\partial Z}{\partial q}
\end{aligned}\right\} \quad 1)$$

$$M+N' = \rho+\rho', \quad MN'-M'N = \rho\rho'$$

zu wählen, in denen x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes P einer krummen nicht auf eine Ebene abwickelbaren Fläche als Functionen zweier unabhängigen Veränderlichen p, q betrachtet, X, Y, Z die Coordinaten der Abbildung von P auf die Gaussische Kugel, ferner ρ und ρ' die Hauptkrümmungsradien der Fläche im Punkte P bezeichnen, während M, M', N, N' Coefficienten darstellen, die aus vier geeigneten der ersten sechs der vorstehenden Gleichungen bestimmt werden können.

Bestimmt man die Lage eines Punktes P der betrachteten Fläche durch den algebraischen Werth p des vom Anfangspunkte der Coordinaten auf die Tangentialebene im Punkte P gefällten Perpendikels und durch den Abstand q dieses Anfangspunktes vom Punkte P, — eine Bestimmung, welche voraussetzt, dass diese Fläche nicht eine Rotationsfläche sei, deren Axe durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems geht — d. h. giebt man den unabhängigen Veränderlichen p, q die durch die Gleichungen

$$p = Xx+Yx+Zz, \qquad q^2 = x^2+y^2+z^2$$

vorgeschriebene Bedeutung, so ergeben sich durch die aus diesen Gleichungen fliessenden Folgerungen

$$1 = x\frac{\partial X}{\partial p}+y\frac{\partial Y}{\partial p}+z\frac{\partial Z}{\partial p}, \qquad 0 = x\frac{\partial x}{\partial p}+y\frac{\partial y}{\partial p}+z\frac{\partial z}{\partial p}$$

$$0 = x\frac{\partial X}{\partial q}+y\frac{\partial Y}{\partial q}+z\frac{\partial Z}{\partial q}, \qquad q = x\frac{\partial x}{\partial q}+y\frac{\partial y}{\partial q}+z\frac{\partial z}{\partial q}$$

vermöge der Gleichungen 1) die nachstehenden Bestimmungen:

$$M = 0, \qquad M' = q$$

$$N = -\frac{1}{q}\rho\rho', \qquad N' = \rho+\rho'$$

und die Gleichungen 1) gehen über in

$$
2)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial p} &= -\frac{1}{q}\rho\rho'\frac{\partial X}{\partial q}, & \frac{\partial x}{\partial q} &= q\frac{\partial X}{\partial p} + (\rho+\rho')\frac{\partial X}{\partial q},\\
\frac{\partial y}{\partial p} &= -\frac{1}{q}\rho\rho'\frac{\partial Y}{\partial q}, & \frac{\partial y}{\partial q} &= q\frac{\partial Y}{\partial p} + (\rho+\rho')\frac{\partial Y}{\partial q},\\
\frac{\partial z}{\partial p} &= -\frac{1}{q}\rho\rho'\frac{\partial Z}{\partial q}, & \frac{\partial z}{\partial q} &= q\frac{\partial Z}{\partial p} + (\rho+\rho')\frac{\partial Z}{\partial q},
\end{aligned}
\right.
$$

welche Gleichungen für jede Fläche bestehen, die weder auf eine Ebene abwickelbar, noch eine Rotationsfläche ist, deren Axe durch den Coordinatenanfangspunkt hindurch geht.

Wir setzen nunmehr voraus, dass die zu betrachtende Fläche, unter Ausschluss der Ebene und der Rotationsflächen, deren Axe durch den Coordinatenanfangspunkt hindurchgeht, eine Minimalfläche sei, d. h. dass in jedem Punkte derselben die Gleichung

$$\rho + \rho' = 0$$

gelte. Alsdann folgt aus der zweiten Reihe der Gleichungen 2), daß die Differentialausdrücke

$$
3)\quad \left\{
\begin{aligned}
x\,dp + qX\,dq &= d\xi\\
y\,dp + qY\,dq &= d\eta\\
z\,dp + qZ\,dq &= d\zeta
\end{aligned}
\right.
$$

vermöge der eingeführten Voraussetzung die vollständigen Differentiale dreier Functionen ξ, η, ζ der Veränderlichen p, q darstellen, welche die Gleichung

$$4)\qquad d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = q^2\,dp^2 + 2pq\,dp\,dq + q^2\,dq^2$$

erfüllen. Durch die Substitutionen

$$q + p = \sqrt{3}\,\alpha^{\frac{2}{3}}, \qquad q - p = \sqrt{3}\,\beta^{\frac{2}{3}}$$

geht diese Gleichung in

$$5)\qquad d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = (\alpha^{\frac{2}{3}} + \beta^{\frac{2}{3}})(d\alpha^2 + d\beta^2) \quad \text{über.}$$

Jeder speciellen Minimalfläche entspricht hiernach vermöge der Gleichungen 3) eine specielle Fläche, für welche das Quadrat des Linienelements die durch die Gleichungen 4) oder 5) angegebene Form besitzt.

Umgekehrt ist durch die zu der Gesammtheit aller Minimalflächen gehörenden auf die angegebene Weise bestimmten Flächen die Gesammtheit aller Flächen, für welche das Quadrat des Linienelementes die durch die Gleichung 4) angegebene Form besitzt, erschöpft. Denn

bildet man vermittelst dreier Functionen ξ, η, ζ, welche die Gleichung 4) befriedigen, die Relationen

$$x = \frac{\partial \xi}{\partial p}, \quad y = \frac{\partial \eta}{\partial p}, \quad z = \frac{\partial \zeta}{\partial p}$$

$$X = \frac{1}{q}\frac{\partial \xi}{\partial q}, \quad Y = \frac{1}{q}\frac{\partial \eta}{\partial q}, \quad Z = \frac{1}{q}\frac{\partial \zeta}{\partial q}$$

und betrachtet die drei ersten als die Gleichungen einer Fläche (x, y, z), so folgt aus den offenbar identisch erfüllten Gleichungen

$$X dx + Y dy + Z dz = 0, \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

daß X, Y, Z die Coordinaten der Abbildung des Punktes (x, y, z) der gedachten Fläche auf die Gaussische Kugel darstellen. Diese Fläche erweist sich ferner in Folge der ohne Weiteres ersichtlichen Beziehungen

$$Xx + Yy + Zz = p, \quad x^2 + y^2 + z^2 = q^2,$$

$$\frac{\partial x}{\partial q} = q\frac{\partial X}{\partial p}, \quad \frac{\partial y}{\partial q} = q\frac{\partial Y}{\partial p}, \quad \frac{\partial z}{\partial q} = q\frac{\partial Z}{\partial p}$$

und in Folge der Gleichungen 2) als eine Minimalfläche, zu welcher die Fläche (ξ, η, ζ) in der durch die Gleichungen 3) ausgedrückten Beziehung steht.

Der Inbegriff aller Individuen der neuen Flächenclasse deckt sich daher mit dem Inbegriff der aus der Gesammtheit aller Minimalflächen auf die angegebene Weise entstehenden Flächen.

Universität.

Neunter Bericht über die Königl. Universitäts-Polikinik für Ohrenkrankheiten.

Von

Prof. **K. Bürkner.**

Im Jahre 1886 wurden in der Poliklinik für Ohrenkrankheiten an 1185 Patienten 8981 Consultationen ertheilt, woraus sich gegen das Vorjahr ein Zuwachs von 136 Patienten und 1612 Consulationen ergiebt.

1092 Kranke wurden in regelmäßige Behandlung genommen, während 93 Kranke theils wegen völliger Unheilbarkeit oder wegen fehlender Ohrenkranhheit abgewiesen, theils andren Instituten zugeführt werden mußten.

Geheilt wurden	717	Patienten	= 60,5%
Gebessert	173	»	= 14,6%
Ungeheilt blieben	11	»	= 0,9%
Ohne Behandlung entlassen wurden	93	»	= 7,9%
Vor beendigter Kur blieben aus .	173	»	= 14,6%
In Behandlung verblieben. . . .	14	»	= 1,2%
Gestorben sind	4	»	= 0,3%
	1185		100,0.

Es war somit von den sämmtlichen zur Untersuchung gekommenen Patienten Heilung zu verzeichnen in 60,5%, Besserung in 14,6%. Von den überhaupt in Behandlung genommenen 1092 Kranken wurden, nach Abrechnung der noch in der Kur befindlichen 82,6% geheilt oder wesentlich gebessert.

Von den 1185 Patienten waren wohnhaft

in Göttingen	519	= 43,8%
außerhalb Göttingen, aber in der Provinz Hannover	481	= 40,6%
mithin in der Prov. Hannover	1000	= 84,4%

Außerdem kamen auf

Provinz Hessen-Nassau	56	= 4,8%.
» Sachsen	65	= 5,5%.
» Westfalen	21	= 1,9%.
Herzogthum Braunschweig	23	= 2,0%.
Großherzogth. Mecklenburg-Schwerin . .	1	= 0,1%.
» Oldenburg.	2	= 0,1%.
Fürstenthum Lippe-Detmold	7	= 0,6%.
» Waldeck.	2	= 0,1%.
Herzogthum Sachsen-Meiningen	2	= 0,1%.
Freie Stadt Hamburg	3	= 0,2%.
» Bremen	3	= 0,2%.
Mithin außerhalb der Provinz Hannover	185	= 100,0%

Von andren klinischen Instituten wurden eine Anzahl von Kranken theils zur Untersuchung, theils zur Behandlung der Poliklinik überwiesen oder von letzterer aus in den betreffenden Kliniken behandelt, nämlich:

Patienten der Augenklinik	36.
» » Medic. Klinik	22.
» » chirurg. Klinik	6.
	64.

Männlichen Geschlechts waren

410 = 34,6% Erwachsene und 325 = 27,5% Kinder.

Weiblichen Geschlechts waren

214 = 18,0% » und 236 = 19,9% »

Mithin männlichen Geschlechts überhaupt 735 = 62%, weiblichen Geschlechts 450 = 38%; im Kindesalter standen 561 = 47,3%, erwachsen waren 624 = 52,7%.

Die Thätigkeit der Poliklinik vertheilte sich auf die einzelnen Monate in folgender Weise:

Januar:	88	Patienten,	691	Consultationen
Februar:	90	»	718	»
März:	120	»	841	»
April:	125	»	875	»
Mai:	151	»	1058	»
Juni:	117	»	886	»
Juli:	124	»	1015	»
August:	97	»	775	»
September:	62	»	444	»
October:	64	»	499	»
November:	81	»	612	»
December:	66	»	567	»
	1185	Patienten,	8981	Consultationen.

Folgende Krankheiten kamen zur Beobachtung:

A. Krankheiten des äußeren Ohres.

307 Fälle = 25,9%.

1. *Angeborene Ohrfistel.* 1 Fall.
   Doppelseitig. Kind.
   Nicht in Behandlung genommen.
2. *Erythem.* 1 Fall.
   Einseitig. Kind.
   Geheilt.
3. *Perichondritis.* 1 Fall.
   Einseitig. Kind.
   Geheilt.
4. *Lupus.* 1 Fall.
   Einseitig. Erwachsener.
   Nicht in Behandlung genommen.

5. *Absceßbildung an der Ohrmuschel.* 1 Fall.
   Einseitig. Erwachsener.
   Geheilt.
6. *Drüsenanschwellung vor dem Ohre.* 1 Fall.
   Einseitig. Erwachsener.
   Geheilt.
7. *Ekzem, acut.* 23 Fälle.
   19 einseitig. 4 Erwachsene.
   4 doppelseitig. 19 Kinder.
   20 geheilt, 3 ausgeblieben.
8. *Ekzem, chronisch.* 13 Fälle.
   5 einseitig. 5 Erwachsene.
   8 doppelseitig. 8 Kinder.
   8 geheilt, 5 ausgeblieben.
9. *Furunkelbildung im Gehörgange.* 58 Fälle.
   57 einseitig. 40 Erwachsene.
   1 doppelseitig. 18 Kinder.
   51 geheilt, 6 ausgeblieben, 1 in Behandlung geblieben.
10. *Diffuse Gehörgangsentzündung.* 2 Fälle.
    Doppelseitig. 1 Erwachsener.
    1 Kind.
    1 geheilt, 1 ausgeblieben.
11. *Otomykosis (Aspergillus).* 2 Fälle.
    1 einseitig. 2 Kinder.
    1 doppelseitig.
    Beide geheilt.
12. *Absceßbildung im Gehörgange.* 1 Fall.
    Einseitig. Kind.
    Geheilt.
13. *Exostosenbildung im Gehörgange.* 2 Fälle.
    1 einseitig. 2 Erwachsene.
    1 doppelseitig.
    Nicht behandelt.
14. *Cholesteatom im Gehörgange.* 2 Fälle.
    Einseitig. 1 Erwachsener.
    1 Kind.
    Beide geheilt.
15. *Cerumenansammlung.* 179 Fälle.
    99 einseitig. 162 Erwachsene.
    80 doppelseitig. 17 Kinder.
    160 geheilt, 19 gebessert.

16. *Fremdkörper.* 19 Fälle.
Nämlich: a) leblose: Strohhalm, Getreidegranne, Bohne 4 mal, Erbse, Märrettig, Knoblauch, Haar, Watte 2 mal, Papierpfropf 3 mal, Eisenfeile, Schieferstift, Kieselstein. b) lebendes: Lepisma saccharina.
19 einseitig. 8 Erwachsene.
11 Kinder.
18 geheilt, 1 ausgeblieben.

B. Krankheiten des Trommelfells.
28 Fälle = 2,4%.

17. *Acute Trommelfellentzündung.* 2 Fälle.
Einseitig. 1 Erwachsener.
1 Kind.
Beide geheilt.
18. *Ekchymosen.* 1 Fall.
Einseitig. Erwachsener.
Geheilt.
19. *Zerreißung des Trommelfells.* 4 Fälle.
Einseitig. 3 Erwachsene.
1 Kind.
3 geheilt, 1 ausgeblieben.
20. *Residuen von abgelaufenen Mittelohr- und Trommelfell-Affectionen.* 20 Fälle.
9 einseitig. 17 Erwachsene.
11 doppelseitig. 3 Kinder.
2 geheilt, 8 gebessert, 1 ungeheilt, 5 nicht behandelt, 4 ausgeblieben.

C. Krankheiten des Mittelohres.
796 Fälle = 67,2%.

21. *Acuter Tubencatarrh.* 5 Fälle.
3 einseitig. 5 Erwachsene.
2 doppelseitig.
4 geheilt, 1 ausgeblieben.
22. *Acuter einfacher Mittelohrcatarrh.* 228 Fälle.
99 einseitig. 91 Erwachsene.
129 doppelseitig. 137 Kinder.
163 geheilt, 33 gebessert, 32 ausgeblieben.

23. *Chronischer einfacher Mittelohrcatarrh.* 228 Fälle.
   29 einseitig. 141 Erwachsene.
   199 doppelseitig. 87 Kinder.
   72 geheilt, 59 gebessert, 5 ungeheilt, 36 abgewiesen, 53 ausgeblieben, 3 noch in Behandlung.
24. *Acute eiterige Mittelohrentzündung.* 188 Fälle.
   145 einseitig. 26 Erwachsene.
   43 doppelseitig. 162 Kinder.
   138 geheilt, 20 gebessert, 2 nicht behandelt, 24 ausgeblieben, 1 in Behandlung geblieben, 3 gestorben.
25. *Chronische eiterige Mittelohrentzündung.* 135 Fälle.
   86 einseitig. 69 Erwachsene.
   49 doppelseitig. 88 Kinder.
   50 geheilt, 31 gebessert, 1 ungeheilt, 11 nicht behandelt, 32 ausgeblieben, 9 noch in Behandlung, 1 gestorben.
26. *Periostitis des Warzenfortsatzes.* 2 Fälle.
   1 einseitig. 1 Erwachsener.
   1 doppelseitig. 1 Kind.
   Beide geheilt.
27. *Neuralgie des Plexus tympanicus.* 10 Fälle.
   9 einseitig. 9 Erwachsene.
   1 doppelseitig. 1 Kind.
   8 geheilt, 2 ausgeblieben.

D. Krankheiten des inneren Ohres.

50 Fälle = 4,1 %.

28. *Brausen ohne Befund.* 6 Fälle.
   3 einseitig. 6 Erwachsene.
   3 doppelseitig.
   1 geheilt, 1 abgewiesen, 4 ausgeblieben.
29. *Salicyl- und Chinintaubheit.* 3 Fälle.
   3 doppelseitig. 2 Erwachsene.
   1 Kind.
   Geheilt.
30. *Ménière'sche Krankheit.* 1 Fall.
   Doppelseitig. Erwachsener.
   Geheilt.
31. *Nerventaubheit.* 22 Fälle.
   3 einseitig. 21 Erwachsene.
   19 doppelseitig. 1 Kind.
   3 gebessert, 4 ungeheilt, 12 abgewiesen, 3 ausgeblieben.

32. *Taubstummheit.* 18 Fälle.
5 angeboren. 18 Kinder.
13 erworben.
Sämmtlich ohne Behandlung entlassen.

E. Verschiedenes.
4 Fälle = 0,3 %.

Normal wurden 2 Fälle gefunden, in zwei nur einmal zur Untersuchung gekommenen Fällen blieb außerdem die Diagnose unbestimmt.

An Operationen wurden ausgeführt:

Eröffnung von Abscessen	4 mal.
„ „ *Furunkeln*	49 mal.
Fremdkörperextractionen	5 mal.
Incision des Trommelfells	121 mal.
Polypenextraction	4 mal.
	183.

Bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

November 1886.

Mitteilungen des Vereins für Geschichte der Stadt Meißen d. 1. Bandes 5. Heft. b. Personenverzeichniß.
Leopoldina N. 19—20.
Bericht der histor. Commission d. K. Baier. Akad. d. Wissensch. über die 27. Plenarversammlung.
Politische Correspondenz Friedrich des Großen. Band XIV.
Veröffentlichung d. Königl. Preuß. Geodätischen Instituts. Heft I.
Acta Mathematica 9 : 1.
Ueber die Korrektion und die Verallgemeinerung der Formeln für die mittlere Geschwindigkeit der Gasmolekule von Ernst Sasse. (3 Ex.)
Sasse: Elementare Ableitung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit elastischer Schwingungen.
Zeitschrift für Naturwissenschaften. Band LIX. Folge 4. Band 5. Heft 3.
Der feinere Bau des Knochengewebes v. A. Kölliker.
Die Europäischen Radula-Arten v. J. B. Jack.
Monographie der Lebermoosgattung Physiotium v. J. B. Jack.
Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes. Band IX. N. 1.
Wilhelm His, Zur Geschichte des menschlichen Rückenmarks. Heft VI des XIII. Bandes d. Abh. d. M. ph. Classe d. K. Sächs. Gesellsch. d. W. (2 Exempl.)
H. Bruns, über eine Aufgabe der Ausgleichungsrechnung. Heft VII. Band XIII d. Abhandl. (2 Exempl.)
Südamerikanischer Beobachter. N. 2. Schweiz.

Meteorologische Zeitschrift. Jahrg. 3. 1886. Heft 11. Nov.
Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Wien.
Math. naturwiss. Classe
a. Band XCI. Erste Abth. Heft 5. Band XCII. Erste Abth. Heft 1—5. Band XCIII. Erste Abth. Heft 1—3. — b. Band XCI. Zweite Abth. Heft 4 u. 5. Band XCII. Zweite Abth. Heft 1—5. Band XCIII. Zweite Abth. Heft 1 u. 2. — c. Band XCI. Dritte Abth. Heft 3—5. Band XCII. Dritte Abth. Heft 1—5.
Philosophisch-historische Classe.
Band CX. Heft 1 u. 2. Band CXI. Heft 1 u. 2.
Archiv für Oesterreich. Geschichte. Band 67 zweite Hälfte. Band 68 erste Hälfte.
Fontes Rerum Austriaearum. Band XLIV. Abth. 2.
Almanach d. K. Akad. der Wissensch. 36. Jahrg. 1886.
Register zu den Sitzungsberichten der Wiener Akademie. Band 101—110. (XI) Philos. histor. Cl.
Denkschriften d. K. Akad. d. W. Mathem. naturw. Cl. Band XV.
Jahrbuch d. Kaiserl. Kön. geologischen Reichsanstalt. Band XXXVI. Heft 2 u. 3.
Abhandlungen der K. K. geologischen Reichsanstalt. Band 12. N. 1—3.
Verhandlungen d. K. K. geolog. Reichsanstalt. N. 5—12. 1886.
Monumenta Conciliorum Generalium seculi XV. Tom. 3. Pars I.
Zehnter Verwaltungsber. der Akademischen Lesehalle in Czernowitz.
Nagyag und seine Erzlagerstätten. Im Auftrage d. K. Ung. Naturw. Gesellsch. bearb. v. Béla von Jukey.
Chemische und mechanische Analyse ungarländischer Thone v. Ed. Des. László.
Die secundären Eruptivgesteine d. Persánger Gebirges beschr. v. Josef Budai.
Die Meteorologischen Verhältnisse des Monats Mai in Ungarn v. Kabos Hegyfoky.
Ungarische Landesausstellung. Urgeschichtliche Spuren etc. v. Otto Herman.
Magyarorszag Gyógyhelyei es Asyanyvizey v. Dr. Chyzes Kornél.
A Magyar Birodalom Moh-flóraja itr. Ilaz. Frigyes.
Konyveinek CZimjegyzeke. (II Füzet az 1877—1885.)
Bulletin de l'académie royale des sciences des lettres et des beaux-arts de Belgique; année 55, ser. 3, tome 12. N. 9—10.
Traveaux et mémoires du bureau international des poids et mesures a Paris. Tome V.
Nature N. 888, 889, 890, 891. Vol. 35.
Records of the geological survey of India. Vol. XIX. Part. 4.
Proceedings of the scientific meetings of the Zoological Society of London. 1886. Part. III. May and June.
The Canadian Record of science. Vol. II. N. 4.
Australian Museum. Report of the Trustees for 1885.
Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze. Bollettino. N. 20. 21. 22. (1886.)
Memorie del R. Ist. Lombardo di sc. e lettere. a. Classe di science matematiche e naturali. Vol. XV = VI della serie III. fasc. IV. Vol. XVI = VII della serie III. fasc. I.
b. Classe di lettere e scienze storiche e morali. Vol. XVI = VII d. serie III.
R. Istituto Lombardo Rendiconti. Ser. II. Vol. XVIII.
Memorie d. R. Accademia d. sc. l. ed arti in Modena. Serie II. Vol. III.
Atti d. R. Accademia dei lincei Rendiconti. Vol. II fasc. 7 serie quarta.
Bulletin de l'Académie Imp. des sc. de St. Petersbourg. Tome XXXI (feuilles 9—1/219).
Sibirisch-Uraler Ausstellung für Wissensch. u. Industrie veranst. v. d. Uraler Naturforscher-Ges. in Iekaterinenburg (Programm).
Jahresbericht v. 25. Mai 1886 der Nikolaihauptsternwarte. St. Petersburg.
Exploration internationale des régions polaires 1882—83 et 1883—84. Exped. pol. finlandaise.
Bidrag till kannedom af Finlands Natur och folk. Heft 43.
Medelanden af societas pro Fanna et Flora fennica. 12. 1885. 13. (1886).
Acta societatis pro Fanna et Flora fennica. II.
Ofversigt af F. V. Soc. förhandlingar. XXVII 1884—1885.

Beobachtungen über die periodischen Erscheinungen des Pflanzenlebens in Finnland 1883. Dr. Osw. Kihlman.
The Norwegian North-Atlantic Expedition 1876—1878. Zoology Crustacea. II.
Smithonian Report 1884.
American Journal of Mathematics. Vol. IX. N. 1.
Proceedings of the American Academy of arts and sciences. New ser. Vol. XIII. Part II.
Memoirs of the American Academy of a. a. sc. Vol. centennial. Vol. XI. Part IV. N. IV.
Bulletin of the Museum of Comp. Zoology at Harvard College. Vol. XII. N. 6.
Johns Hopkins University Studies fourth series. The town and city government of New Haven.
Johns Hopkins University circulars. Vol. VI. N. 53.
Catálogo General Argentino. Vol. XIV.
Boletin de la Academia Nacional de ciencias en Cordoba. Tomo VIII. Entr. 4a.
Anales de la Sociedad Cientifica argentina. Tomo XXII. Entrega III.
Annario del Observatorio Astrónomico Nazional de Tacubaya. Año 1887. Nño VII. Mexico.

Nachtrag.

A Vulkan-szoros videke. Zone 24 col. XXVIII. Aufnahme d. Kön. Ung. Geologischen Anstalt.

December 1886.

Zeitschrift der deutschen Morgenländischen Gesellschaft. Band 40. Heft III.
Leopoldina. Heft XXII. N. 21—22. Nov. 1886.
Societatum Literae. N. 1. Zur Einführung (3 mal).
Jahresbericht des Physikalischen Vereins zu Frankfurt a. M. 1884—1885.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Band XVI. Jahrg. 1884. Heft I.
XXXII. und XXXIII. Bericht des Vereines für Naturkunde zu Kassel.
Vierteljahrschrift der Astronomischen Gesellschaft. Jahrg 21. Heft 4. (Leipzig.)
Acta Mathematica. 9 : 2.
Vierteljahrschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich. 30. Jahrg. 1—4. 31. Jahrg. 1. 2.
Gedächtnißrede auf Leopold von Ranke und Georg Waitz geh. zu Aarau v. Prof. Adolf Stern.
Mémoires et documents publiés par la societé d'histoire et d'archéologie de Geneve. Deux. série tome second.
Meteorologische Zeitschrift. Dritter Jahrg. 1886. Heft 12. Dezember.
Ungarische Revue. X. Heft. 1886. Dez. 6. Jahrgang.
Bulletin de la societé Imperiale des naturalistes de Moscou. Année 1886. N. 2, 3.
Materialien zur Mineralogie Rußlands v. Nikolai v. Kokscharow. Band 9. Seite 273—368. Schluß.
Bulletin de l'Académie Imp. des sciences de St. Petersbourg. Tome XXXI. Feuilles 20—$^3/_4$27. N. 3.
Mémoires de l'Académie Imp. des sciences de St. Petersbourg. Serie VII. Tome XXXIV. N. 5, 6.
Witterungsbeobachtungen aus Dorpat. Mai, Juni, Juli, August 1886.
Journal of the Royal microscopical society. Vol. VI. Part 6.
Monthly notices of the R. Astronomical society. Vol. XLVII. N. 1. Nov. 1886.
Proceedings of the London mathematical society. N. 272—274.
Proceedings of the Royal Society. Vol. XLI. N. 247.
Nature. Vol. 35. 892. 893. 895.896.
Proceedings of the Royal Physical society. Session 1885—86.
Proceedings of the Canadian Institute. Third series. Vol. IV. fasc. N. 1.
Myoporinous plants of Australia by Baron v. Mueller. II Lithograms.
Atti della Reale Accademia dei Lincei 1885—86. Vol. II. fasc. 8. 9. 10.
Bullettino di Bibliografia e di storia delle science matematiche e fisiche. Tomo XIX. Febraio 1886.
Bollettino delle pubblicazioni italiane 1886. N. 23. 24.
Den Norske Nordhavs-expedition 1876—1878. XVI. Zoologi. Mollusea. II.

Mémoires de l'Académie Roy. de Copenhague. Serie 6. Classe des sciences. Vol. II, N. 11; Vol. III, N. 4; Vol. IV, N. 2.

Bulletin de l'Académie Roy. de Copenhague 1886. N. 2.

Bulletin de l'Académie Royale des sciences de Belgique. Tome 12. N. 11.

Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas de Coimbra. Vol. VII. N. 3.

Titelblatt von: Archives Neerlandaises des sciences exactes et naturelles, publices par la societé Hollandaise d. sc. à Harlem.

La goutte sa nature et son traitement par W. Ebstein traduit par Dr. E. Chambard. Geschenk des Herrn Prof. Dr. Ebstein.

N. 45. Pont sur le Hawkesbury (Australie) par le Marquis de Caligny. Versailles.

Bulletin of the Museum of Comparative Zoology at Harvard College Vol. XIII. N. 1.

Annual report of the Curator of the M. of Comp. Zoology at Harvard College. 1885—86.

Johns Hopkins University circulars. Vol. VI. N. 52.

Johns Hopkins University studies. Fourth series XI—XII.

Bulletin of the American Geographical Society 1885. N. 3.

Annales de la Sociedad cientifica Argentina. Octobre de 1886. Entrega IV. Tomo XXII.

Fort Rae. Observations of the International Polar Expeditions. 1882—83. Meteorological Office. London 1886. On her Majesty's Service.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.

Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.

Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

10. März. № 2. 1887.

/1,3 Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung vom 8. Januar.

Ueber das Doppler'sche Princip.

Von

W. Voigt.

Die Differentialgleichungen für die Oscillationen eines elastischen incompressibeln Mediums sind bekanntlich:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \omega^2 \Delta u \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \omega^2 \Delta v \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \omega^2 \Delta w\end{aligned} \qquad 1)$$

worin ω die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Oscillationen — genauer die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener Wellen mit constanter Amplitude — bezeichnet. Dabei ist vorausgesetzt, daß u, v, w die Relation erfüllen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \qquad 1')$$

Es seien nun $u = U$, $v = V$, $w = W$ Lösungen dieser Gleichungen, welche an einer gegebenen Oberfläche $f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = 0$ gegebene von der Zeit abhängige Werthe $\overline{U}$, $\overline{V}$, $\overline{W}$ annehmen, so kann man sagen, daß diese Functionen U, V, W das Gesetz darstellen, nach welchem die Oberfläche $f = 0$ leuchtet.

Vertauscht man in U, V, W resp.

$$
2)\qquad
\begin{aligned}
x \text{ mit } \xi &= xm_1 + yn_1 + zp_1 - \alpha t\\
y \text{ mit } \eta &= xm_2 + yn_2 + zp_2 - \beta t\\
z \text{ mit } \zeta &= xm_3 + yn_3 + zp_3 - \gamma t\\
t \text{ mit } \tau &= t - (ax + by + cz)
\end{aligned}
$$

und bezeichnet die so erhaltenen Functionen resp. mit (U), (V), (W), so läßt sich durch $u = (U)$, $v = (V)$, $w = (W)$ ebenfalls den Gleichungen (1) genügen.

Denn man erhält z. B. für die erste von ihnen:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 (U)}{\partial \tau^2}\left(1 - \omega^2 (a^2 + b^2 + c^2)\right) = \omega^2 \Bigg\{ & \frac{\partial^2 (U)}{\partial \xi^2}\left(m_1^2 + n_1^2 + p_1^2 - \frac{\alpha^2}{\omega^2}\right)\\
& + \frac{\partial^2 (U)}{\partial \eta^2}\left(m_2^2 + n_2^2 + p_2^2 - \frac{\beta^2}{\omega^2}\right) + \frac{\partial^2 (U)}{\partial \zeta^2}\left(m_3^2 + n_3^2 + p_3^2 - \frac{\gamma^2}{\omega^2}\right)\\
& + 2\frac{\partial^2 (U)}{\partial \eta\, \partial \zeta}\left(m_2 m_3 + n_2 n_3 + p_2 p_3 - \frac{\beta\gamma}{\omega^2}\right)\\
& + 2\frac{\partial^2 (U)}{\partial \zeta\, \partial \xi}\left(m_3 m_1 + n_3 n_1 + p_3 p_1 - \frac{\gamma\alpha}{\omega^2}\right)\\
& + 2\frac{\partial^2 (U)}{\partial \xi\, \partial \eta}\left(m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 - \frac{\alpha\beta}{\omega^2}\right)\\
& - 2\frac{\partial^2 (U)}{\partial \tau\, \partial \xi}\left(am_1 + bn_1 + cp_1 - \frac{\alpha}{\omega^2}\right)\\
& - 2\frac{\partial^2 (U)}{\partial \tau\, \partial \eta}\left(am_2 + bn_2 + cp_2 - \frac{\beta}{\omega^2}\right)\\
& - 2\frac{\partial^2 (U)}{\partial \tau\, \partial \zeta}\left(am_3 + bn_3 + cp_3 - \frac{\gamma}{\omega^2}\right)\Bigg\}
\end{aligned}
$$

und diese ist, da ja sein muß:

$$
\frac{\partial^2 (U)}{\partial \tau^2} = \omega^2\left(\frac{\partial^2 (U)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 (U)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 (U)}{\partial \zeta^2}\right)
$$

erfüllt, wenn folgende neue Gleichungen bestehen:

$$
3)\qquad
\begin{aligned}
1 - \omega^2(a^2 + b^2 + c^2) &= m_1^2 + n_1^2 + p_1^2 - \frac{\alpha^2}{\omega^2}\\
&= m_2^2 + n_2^2 + p_2^2 - \frac{\beta^2}{\omega^2}\\
&= m_3^2 + n_3^2 + p_3^2 - \frac{\gamma^2}{\omega^2}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\frac{\beta\gamma}{\omega^2} &= m_2 m_3 + n_2 n_3 + p_2 p_3 \\
\frac{\gamma\alpha}{\omega^2} &= m_3 m_1 + n_3 n_1 + p_3 p_1 \qquad\qquad 4) \\
\frac{\alpha\beta}{\omega^2} &= m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{\omega^2} &= a m_1 + b n_1 + c p_1 \\
\frac{\beta}{\omega^2} &= a m_2 + b n_2 + c p_2 \qquad\qquad 5) \\
\frac{\gamma}{\omega^2} &= a m_3 + b n_3 + c p_3.
\end{aligned}$$

Nimmt man $\alpha\beta\gamma$ als gegeben an, so hat man 12 verfügbare Constanten, kann also über drei von ihnen willkürlich verfügen.

Die Auflösung erfolgt am bequemsten, wenn man vorübergehend ein Coordinatensystem X_1, Y_1, Z_1 benutzt, für welches in den Gleichungen (2) β und γ verschwinden, α gleich $\varkappa$ wird; d. h. ein solches, dessen X_1-Axe in die Richtung fällt, deren Richtungscosinus gegen X, Y, Z mit α, β, γ proportional sind.

Es sei ferner gesetzt

$$m_\lambda^2 + n_\lambda^2 + p_\lambda^2 = q_\lambda^2, \quad m_\lambda/q_\lambda = \mu_\lambda, \quad n_\lambda/q_\lambda = \nu_\lambda, \quad p_\lambda/q_\lambda = \pi_\lambda$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2, \quad a/d = \mu, \quad b/d = \nu, \quad c/d = \pi,$$

dann sind μ, ν, π die Richtungscosinus von 4 Richtungen, die wir durch δ_1, δ_2, δ_3 und δ bezeichnen wollen, gegen das System X_1, Y_1, Z_1.

Durch diese Einführungen werden unsere Gleichungen (3), (4) und (5):

$$1 - \omega^2 d^2 = q_1^2 - \frac{\varkappa^2}{\omega^2} = q_2^2 = q_3^2 \qquad 3')$$

$$\mu_2\mu_3 + \nu_2\nu_3 + \pi_2\pi_3 = \mu_3\mu_1 + \nu_3\nu_1 + \pi_3\pi_1 = \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 + \pi_1\pi_2 = 0$$
$$\text{d. h. } \cos(\delta_2, \delta_3) = \cos(\delta_3, \delta_1) = \cos(\delta_1, \delta_2) = 0 \qquad 4')$$

$$\mu\mu_1 + \nu\nu_1 + \pi\pi_1 = \frac{\varkappa}{\omega^2 q_1 d}, \quad \mu\mu_2 + \nu\nu_2 + \pi\pi_2 = \mu\mu_3 + \nu\nu_3 + \pi\pi_3 = 0$$

$$\text{d. h. } \cos(\delta, \delta_1) = \frac{\varkappa}{\omega^2 q_1 d}, \quad \cos(\delta, \delta_2) = \cos(\delta, \delta_3) = 0. \qquad 5')$$

Nach (4') stehen die drei Richtungen δ_1, δ_2, δ_3 zu einander senkrecht, nach (5') fällt δ_1 mit δ zusammen, es muß also sein:

$$\mu = \mu_1, \quad \nu = \nu_1, \quad \pi = \pi_1 \text{ und } \frac{\varkappa}{\omega^2 q_1 d} = 1. \qquad 6)$$

Dies in (3') eingesetzt bestimmt d und $q_1\ q_2\ q_3$.

Man erhält zunächst, da nur positive Zeichen einen Sinn geben:

$$q_1 = 1 \text{ oder } \frac{\varkappa}{\omega}$$

$$d = \frac{\varkappa}{\omega^2} \text{ oder } \frac{1}{\omega}.$$

Ich werde nur die erste Lösung benutzen, da die zweite kein Interesse bietet[1]); aus ihr folgt:

$$7)\qquad d = \frac{\varkappa}{\omega^2},\ q_1 = 1,\ q_2 = q_3 = \sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{\omega^2}} = q.$$

Hiernach können wir die Gleichungen (2) schreiben:

$$8)\qquad \begin{aligned} \xi_1 &= x_1\mu_1 + y_1\nu_1 + z_1\pi_1 - \varkappa t &&= a_1 - \varkappa t \\ \eta_1 &= (x_1\mu_2 + y_1\nu_2 + z_1\pi_2)\,q &&= b_1 q \\ \zeta_1 &= (x_1\mu_3 + y_1\nu_3 + z_1\pi_3)\,q &&= c_1 q \\ \tau &= t - \frac{\varkappa}{\omega^2}(\mu_1 x + \nu_1 y + \pi_1 z) &&= t - \frac{\varkappa a_1}{\omega^2}, \end{aligned}$$

wo für μ_h, ν_h, π_h keine weiteren Bedingungen mehr gelten, als die aus ihrer Bedeutung als Richtungscosinus von drei auf einander normalen, aber sonst ganz beliebigen Richtungen hervorgehenden.

Es können daher die mit $a_1\ b_1\ c_1$ bezeichneten Aggregate als die Coordinaten der Stelle $x_1\ y_1\ z_1$ in Bezug auf ein mit den Richtungen $\delta_1\ \delta_2\ \delta_3$ zusammenfallendes Coordinatensystem ABC angesehen werden.

Jedes derartige System μ_h, ν_h, π_h giebt eine Lösung (U), (V), (W) aus gegebenen U, V, W. Nahmen U, V, W an einer Oberfläche $f(x, y, z) = 0$ gegebene Werthe $\overline{U}$, $\overline{V}$, $\overline{W}$ an, so (U), (V), (W) aus jenen ableitbare $(\overline{U})$, $(\overline{V})$, $(\overline{W})$ an der Oberfläche $(f) = f(\overline{\xi}_1, \overline{\eta}_1, \overline{\zeta}_1) = 0$, welche wegen der Werthe von ξ_1, η_1, ζ_1 die Eigenschaft hat, sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit $\varkappa$ parallel der durch die Richtungscosinus $\mu_1\ \nu_1\ \pi_1$ gegebenen Richtung δ_1 oder A fortzuschieben. **Die Lösungen (U), (V), (W) geben also die Gesetze, nach welchen gewisse in fortschreitender Bewegung begriffene Oberflächen leuchten**, wenn sie nur noch der Bedingung

$$\frac{\partial(U)}{\partial x} + \frac{\partial(V)}{\partial y} + \frac{\partial(W)}{\partial z} = 0$$

1) Aus ihr folgt $q_2 = q_3 = 0$ also auch $m_2\ n_2\ p_2$, $m_3\ n_3\ p_3$ und hiernach $\zeta = \eta = 0$.

genügen. Die beiden Oberflächen $f = 0$ und $(f) = 0$ sind der Form nach nur identisch wenn $q = 1$, d. h. $\varkappa$ so klein gegen ω ist, daß $\varkappa^2$ neben ω^2 vernachlässigt werden kann. Ist dies der Fall, so sind sie nur durch ihre Lage gegen die Coordinatenaxen verschieden. Durch geeignete Verfügungen über die willkürlichen Constanten und die Functionen U, V, W kann man anschauliche specielle Fälle erhalten. Durch Transformation der Coordinaten gelangt man dann zu dem wenigstens formell allgemeineren Falle, daß die Verschiebung der Fläche nicht der A-Axe parallel, sondern beliebig gerichtet ist.

Wir verfolgen den speciellen Fall, daß die drei Richtungen δ_1, δ_2, δ_3 in die drei Coordinatenaxen X_1, Y_1, Z_1 fallen, d. h.

$$\begin{aligned} \mu_1 = \nu_2 = \pi_3 = 1, \\ \mu_2 = \mu_3 = \nu_1 = \nu_3 = \pi_1 = \pi_2 = 0 \text{ ist.} \end{aligned} \qquad 9)$$

Dann wird sehr einfach, der Form nach naturgemäß mit (8) identisch:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 - \varkappa t \\ \eta_1 &= y_1 q \\ \zeta_1 &= z_1 q \\ \tau &= t - \frac{\varkappa x_1}{\omega^2}, \text{ wobei } q = \sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{\omega^2}} \text{ ist.} \end{aligned} \qquad 10)$$

Die Bedingung (1') lautet in diesem Falle

$$(1-q)\,\frac{\partial(U)}{\partial\xi} = \frac{\varkappa}{\omega^2}\,\frac{\partial(U)}{\partial\tau}$$

was sich ohne Weiteres vertauschen läßt mit

$$(1-q)\,\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\varkappa}{\omega^2}\,\frac{\partial U}{\partial t}. \qquad 10')$$

Dies sagt aus, daß in U die Argumente x und t nur in der Verbindung $(1-q)\,t + \frac{\varkappa x}{\omega^2}$ oder garnicht vorkommen dürfen. Letzteres ist der Fall wenn $U = 0$ ist, d. h. wenn die fortgepflanzten Schwingungen überall normal zur Translationsrichtung der leuchtenden Oberfläche stehen.

Geht man von dem vorausgesetzten speciellen Coordinatensystem X_1, Y_1, Z_1 zu dem allgemeinen X, Y, Z über, welches durch die Relationen

$$\begin{aligned} x_1 &= x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1 \\ y_1 &= x\alpha_2 + y\beta_2 + z\gamma_2 \\ z_1 &= x\alpha_3 + y\beta_3 + z\gamma_3 \end{aligned} \qquad 11)$$

mit dem ersteren zusammen hängen möge, so erhält man schließlich

$$
12)\qquad
\begin{aligned}
\xi &= xq + (x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1)\,\alpha_1(1-q) - \varkappa\alpha_1 t\\
\eta &= yq + (x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1)\,\beta_1(1-q) - \varkappa\beta_1 t\\
\zeta &= zq + (x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1)\,\gamma_1(1-q) - \varkappa\gamma_1 t\\
\tau &= t - \frac{\varkappa}{\omega^2}(x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1).
\end{aligned}
$$

Das ist die allgemeine Form (2) von der wir ausgegangen sind, aber mit vollständig durch $\varkappa$, α_1, β_1, γ_1 bestimmten Constanten, sie enthält das, was man gewöhnlich unter dem Doppler'schen Princip versteht, soweit dasselbe richtig ist.

Kann man hierin $\varkappa^2$ neben ω^2 vernachlässigen, so ist $q = 1$ und man erhält sehr einfach:

$$
13)\qquad
\begin{aligned}
\xi &= x - \varkappa\alpha_1 t\\
\eta &= y - \varkappa\beta_1 t\\
\zeta &= z - \varkappa\gamma_1 t\\
\tau &= t - \frac{\varkappa}{\omega^2}(x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1).
\end{aligned}
$$

Die Bedingung (1') lautet hierbei:

$$
13')\qquad 0 = \frac{\varkappa}{\omega^2}\frac{\partial}{\partial t}(U\alpha_1 + V\beta_1 + W\gamma_1)
$$

und ist bei den angenommenen Vernachlässigungen nur soweit zu erfüllen nöthig, daß das in $\frac{\varkappa}{\omega}$ multiplicirte Glied von erster Ordnung wird.

Bewegt sich außer der leuchtenden Oberfläche auch der Beobachter, etwa mit der constanten Geschwindigkeit $\varkappa'$ in einer durch die Richtungscosinus α', β', γ' gegebenen Richtung, so sind die Verschiebungen u, v, w, nur auf ein mit dem Beschauer bewegtes Coordinatensystem X', Y', Z' zu beziehen, also in (12) oder (13) x mit $x' + \varkappa'\alpha' t$, y mit $y' + \varkappa'\beta' t$, z mit $z' + \varkappa'\gamma' t$ zu vertauschen.

Wir machen von dem Gefundenen einige Anwendungen.

1) Sei eine Ebene parallel der YZ-Ebene in Schwingungen versetzt nach dem Gesetz

$$
\overline{W} = A \sin\frac{2\pi t}{T},
$$

so ist die nach der positiven X-Axe fortgepflanzte Bewegung gegeben durch:

$$
W = A \sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\omega}\right).
$$

Machen wir hierin die Substitution nach (10) so ergiebt sich:

$$(W) = A \sin \frac{2\pi}{T}\left(1+\frac{\varkappa}{\omega}\right)\left(t-\frac{x}{\omega}\right).$$

Dies giebt für $x = \varkappa t$:

$$(\overline{W}) = A \sin \frac{2\pi t}{T}\left(1-\frac{\varkappa^2}{\omega^2}\right) = A \sin \frac{2\pi t}{T'}, \qquad 14')$$

wir haben also eine mit der (nur um eine Größe zweiter Ordnung von T verschiedenen) Schwingungsdauer $T' = T/\left(1-\frac{\varkappa^2}{\omega^2}\right)$ schwingende und dabei mit der Geschwindigkeit $\varkappa$ parallel der X-Axe fortschreitendende (leuchtende) Ebene. Die fortgepflanzte Schwingung läßt sich schreiben:

$$(W) = A \sin \frac{2\pi}{T'\left(1-\frac{\varkappa}{\omega}\right)}\left(t-\frac{x}{\omega}\right). \qquad 14)$$

Wir erhalten also in der fortgepflanzten Welle eine im Verhältniß $\left(1-\frac{\varkappa}{\omega}\right)/1$ verringerte Schwingungsdauer.

Bewegt sich auch noch der Beobachter, so gilt:

$$(W') = A \sin \frac{2\pi}{T'\left(1-\frac{\varkappa}{\omega}\right)}\left(t-\frac{x'+\varkappa' t}{\omega}\right)$$

$$= A \sin 2\pi\left(t\frac{(\omega+\varkappa')}{T'(\omega-\varkappa)} - \frac{x'}{T'(\omega-\varkappa)}\right).$$

Diese Formel giebt das Doppler'sche Princip für ebene Wellen. Aber sie ist keineswegs allgemein gültig, sondern setzt ganz wesentlich eine W e l l e n e b e n e m i t d u r c h w e g c o n s t a n t e r A m p l i t u d e voraus.

2) Sei dieselbe Ebene versetzt in Schwingungen nach dem Gesetz:

$$\overline{W} = A e^{(\mu y+\nu z)\frac{2\pi}{T\omega}} \sin \frac{2\pi t}{T}$$

— wie es ähnlich auftritt, wenn eine Welle mit ursprünglich constanter Amplitude durch ein Prisma aus einer absorbirenden Substanz gegangen ist —, dann gilt für die fortgepflanzte Welle:

$$W = A e^{\frac{2\pi(\mu y+\nu z)}{T\omega}} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x\sigma}{\omega}\right) \text{ worin } \sigma = \sqrt{1+\mu^2+\nu^2} \text{ ist.}$$

Nimmt man hier die Substitution gemäß (10) vor, so kommt, falls $\sqrt{1-\frac{\varkappa^2}{\omega^2}} = q$ gesetzt wird:

$$(W) = Ae^{\frac{2\pi(\mu y+\nu z)q}{T\omega}} \sin\frac{2\pi}{T}\left[t\left(1+\frac{\varkappa\sigma}{\omega}\right)-x\left(\frac{\sigma}{\omega}+\frac{\varkappa}{\omega^2}\right)\right].$$

Dies giebt für $x = \varkappa t$, falls man $\frac{\mu}{q} = \mu'$, $\frac{\nu}{q} = \nu'$ schreibt:

$$(\overline{W}) = Ae^{\frac{2\pi(\mu' y+\nu' z)}{\omega T'}} \sin\frac{2\pi t}{T'},\text{ wo wiederum } T' = \frac{T}{1-\frac{\varkappa^2}{\omega^2}} \text{ ist,}$$

also eine schwingende und zugleich fortschreitende Ebene; die fortgepflanzte Verrückung aber schreibt sich:

$$15)\quad (W) = Ae^{\frac{2\pi(\mu' y+\nu' z)}{\omega T'}} \sin\frac{2\pi}{T}\left(t\frac{1+\frac{\varkappa\sigma}{\omega}}{1-\frac{\varkappa^2}{\omega^2}} - x\frac{\frac{\sigma}{\omega}+\frac{\varkappa}{\omega^2}}{1-\frac{\varkappa^2}{\omega^2}}\right),$$

worin jetzt $\sigma = \sqrt{1+(\mu'^2+\nu'^2)q^2}$ ist.

Man bemerkt, daß hier ganz andere Gesetze gelten als durch das Doppler'sche Princip gegeben sind, selbst wenn man sich auf die erste Annährung beschränkt und $\varkappa^2/\omega^2$ neben 1 vernachlässigt.

3) Ist die leuchtende Oberfläche eine sehr kleine Kugel vom Radius R, welche nach dem Gesetz für den Drehungswinkel

$$\overline{\psi} = A\sin\frac{2\pi t}{T}$$

um die X-Axe oscillirt, so sind in der Entfernung $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ vom Kugelmittelpunkt die fortgepflanzten Drehungen ψ gegeben durch[1]):

$$\psi = \frac{R^3A}{r^3}\left[\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{r-R}{\omega}\right)+\frac{2\pi(r-R)}{T\omega}\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{r-R}{\omega}\right)\right]$$

$$16)\quad = \frac{R^3A}{r^3}\sqrt{1+\left(\frac{2\pi(r-R)}{T\omega}\right)^2}\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{r-R}{\omega}-\eta\right),$$

worin

$$\frac{2\pi(r-R)}{T\omega} = \operatorname{ctg}\frac{2\pi\eta}{T}$$

1) W. Voigt, Crelles Journ. Bd. 89, 298.

gesetzt ist. Es wird also $\eta = \frac{T}{4}$ für $r = R$ und $\eta = 0$ wenn r sehr groß gegen die Wellenlänge $T\omega$ ist.

Die fortgepflanzten Verrückungen folgen aus ψ durch:

$$U = 0\,, \quad V = -\psi z\,, \quad W = \psi y\,;$$

wir setzen kurz:

$$U = 0, \quad V = MC, \quad W = NC.$$

Setzt man hierin für x, y, z die Werthe ξ, η, ζ nach (10), so wird der periodische Theil C:

$$(C) = \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{\varkappa x}{\omega^2} - \frac{1}{\omega}\left(\sqrt{(x-\varkappa t)^2 + y^2 + z^2} - R\right) - (\eta)\right), \quad 17)$$

$$\text{falls } \operatorname{cotg}\frac{2\pi(\eta)}{T} = \frac{2\pi}{T\omega}\left(\sqrt{(x-\varkappa t)^2 + y^2 + z^2} - R\right) \text{ ist.}$$

Für $(x-\varkappa t)^2 + y^2 + z^2 = R^2$ d. h. an der Oberfläche einer mit der Geschwindigkeit $\varkappa$ parallel der X-Axe verschobenen Kugel wird dies

$$(\overline{C}) = \sin\frac{2\pi}{T}\left(t\left(1 - \frac{\varkappa^2}{\omega^2}\right) - \frac{\varkappa}{\omega^2}\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}\right)$$

also, da nach der Annahme $\frac{\varkappa^2}{\omega^2}$ und $\frac{\varkappa R}{\omega^2}$ zweiter Ordnung ist:

$$(\overline{C}) = \sin\frac{2\pi t}{T}.$$

(M) und (N) haben denselben Werth, als ob die kleine Kugel um die zur Zeit t erreichte Position $x_0 = \varkappa t$ als Gleichgewichtslage oscillirte. Wir erhalten demnach durch (U), (V), (W) die von einem in fortschreitender Geschwindigkeit $\varkappa$ parallel der Richtung der Rotationsaxe befindlichen durch Rotation »leuchtendem Punkte« ausgesandte Bewegung gegeben.

Die fortgepflanzten Wellenflächen beurtheilen sich nach dem Werth (17) für (C), der sich unter Einführung der relativen Coordinaten gegen den bewegten leuchtenden Punkt $\xi = x - \varkappa t$, $y = \eta$, $z = \zeta$ schreiben läßt bei Vernachlässigung von $\frac{\varkappa^2}{\omega^2}$ neben 1 und für gegen $T\omega$ großes r:

$$(C) = \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{\varkappa\xi}{\omega^2} - \frac{1}{\omega}\left(\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} - R\right)\right).$$

Die Wellenflächen sind also Kugeln, aber nicht um den leuchtenden Punkt, sondern eine um den $\frac{\varkappa}{\omega}$-ten Theil ihrer Radien nach der der Bewegung entgegengesetzten Richtung von ihm abliegende Stelle als Centrum zu construiren.

Ein ruhender Beobachter würde also, da die Normale auf der Wellenfläche durch die Beobachtungsstelle die Richtung angiebt, in welcher die Lichtquelle wahrzunehmen ist, den leuchtenden Punkt an der Stelle sehen, an welcher er sich vor der Zeit $\frac{r}{\omega}$ befand, oder anders ausgedrückt: er würde, falls sein Radiusrector r mit der Bewegungsrichtung den Winkel φ einschließt, eine »Aberration« von der Größe $\frac{r}{\omega}\sin\varphi$, in der der Bewegung des Punktes entgegengesetzter Richtung wahrnehmen.

Was die fortgepflanzten Amplituden (M) und (N) angeht, so haben sie an der Stelle $x\ y\ z$ nach dem Obigen zur Zeit t diejenigen Werthe, als ob der leuchtende Punkt sich dauernd an der zu dieser Zeit t erreichten Stelle befunden hätte, während doch die Wellenfläche in $x\ y\ z$ die Form hat, als verharrte der leuchtende Punkt an der zur Zeit $t-\frac{r}{\omega}$ erreichten Stelle. Es gehören also Wellenfläche und Amplitude nicht in dem Sinne, wie bei einem ruhenden leuchtenden Punkte zusammen, letztere ist von der augenblicklichen, erstere von einer verlassenen Position des leuchtenden Punktes abhängig.

So giebt sich das eigenthümliche Resultat, daß ein Beobachter einen so bewegten leuchtenden Punkt constanter Intensität, der sich zur Zeit t in der Entfernung r von ihm befindet, in derjenigen Lage sieht, welche er vor der Zeit $\frac{r}{\omega}$ hatte, aber mit der Intensität, wie sie der augenblicklichen (größeren oder kleineren) Entfernung entspricht.

Die Anwendbarkeit der obigen allgemeinen Betrachtungen auf Probleme der Optik ist beschränkt durch die Nebenbedingung (1'), die auf die Formeln (10') und (13') geführt hat.

Eine solche Beschränkung findet bei den analogen Problemen der Akustik von Flüssigkeiten nicht statt. Denn für die fortgepflanzte Dilatation δ gilt hier die einzige Bedingung

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2}=\omega^2\Delta\delta.$$

Es giebt daher, wenn durch die Nebenbedingungen δ längs einer gegebenen Oberfläche als beliebige Function der Zeit vorgeschrieben ist, die Einführung einer der Substitutionen (10), (12) oder (13) stets den Uebergang von der Wirkung einer ruhenden Schallquelle zu derjenigen, welche sie in fortschreitender Bewegung begriffen ausübt.

Ist z. B. an einer sehr kleinen Kugel vom Radius R gegeben $\bar{\delta} = f(t)$, so giebt sich die fortgepflanzte Dilatation:

$$\delta = \frac{R}{r} f\left(t - \frac{r-R}{\omega}\right).$$

Die Substitution (10) giebt den Einfluß einer Translation der »tönenden« Kugel parallel der X-Axe. Die Discussion des Resultates ist der unter 3) angestellten analog.

Universität.

Preisstiftung der Wittwe Petsche.

Die von der theologischen Fakultät gestellte Aufgabe:

> »Unter welchen leitenden Gesichtspunkten ist der Dekalog im Ganzen wie im Einzelnen im Zusammenhange des kleinen Lutherschen Katechismus unterrichtlich zu behandeln?«

hat eine Bearbeitung erfahren, die aber den Preis nicht erhalten konnte. Jedoch soll dem Verfasser, wenn er sich meldet, eine Belohnung nach § 8 der Statuten erteilt werden.

Göttingen, den 1. März 1887.

Die theologische Fakultät:
Wiesinger.

Bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Januar 1887.

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Folge 4. Band 5. Heft 4.
Leopoldina. Heft XXII. N. 23—24.
Jahrbücher der K. Akademie gemeinn. Wissenschaften zu Erfurt. Neue Folge. Heft XIV.
Jahresbericht des physikalischen Vereins zu Frankfurt a. M. Rechnungsjahr 1883—1884.

Sitzungsberichte der physikalisch-medizinischen Societät zu Erlangen. Heft 18. 1. Okt. 1885—1. Okt. 1886.
Meteorologische Zeitschrift. 4. Jahrg. 1887. Heft 1. Jan.
Verhandlungen d. K. K. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Band XXXVI. Quartal III u. IV.
Bericht über das 12. Vereinsjahr 1885—1886 erst. vom Verein der Geographen a. d. Univ. Wien.
Zeitschrift des Ferdinandeums für Tirol u. Vorarlberg. Dritte Folge. Heft 30.
Katalog der Gemäldesammlung im Tiroler Landesmuseum zu Innsbruck.
Führer durch das Tiroler Landesmuseum.
Archives du Musée Teyler. Serie II. Vol. II. Partie 4.
(Fondation Teyler) Catalogue de la bibliotheque. Livr. 3 Zoologie, livr. 4 Botanique.
Bijdragen tot de Taal-, Land- en Volkenkunde v. Nederlandsch-Indië. 5. Folge. 2. Theil. Erstes Heft.
Det Kongelike Norske Videnskabers Selskabs scrifter. Throndhjem 1885.
Proceedings of the Royal society. Vol. XLI. N. 248. 249.
Proceedings of the Cambridge philosophical society. Vol. V. Part. VI. Eastertern 1886.
Monthly notices of the R. astronomical society. Vol. XLVII. N. 2. Dec. 1886.
The Canadian record of science. Vol. II. N. 5.
Nature. Vol. 35. 894. 897. 898. 899. 900.
A Raiva, por Eduardo Abreu. Lisboa. (Zwei Exemplare.)
Bibliotheca Nazionale Centrale Vittorio Emanuele di Roma. Bollettino delle opere mod. stran. N. 5. 1886.
Biblioteca Naz. Centr. di Firenze. Bollettino d. public. italiane. 1887. N. 25 und 26.
Bullettino di Bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Tomo XIX. Marzo 1886. Roma.
Atti della R. Accademia dei Lincei. Vol. II. Fasc. 11. 1886.
Journal de Mathématiques. Série IV. Transformation d'une somme de deux au de trois carrés par M. Lipschitz.
Transactions of the Wisconsin Academy of sc. A. a. L. Vol. VI. 1881—83.
Proceedings of the Davenport Academy of n. sciences. Vol. IV. 1882—1884.
Bulletin of the United St. Geological Survey. N. 27. 28. 29.
Proceedings of the Boston society of natural history. Vol. XXIII. Part. II. March 1884 -febr. 1886.
Mémoirs of the Boston society of natural history. Vol. III. N. XII u. XIII.
Bulletin of the Essex Institute. Vol. 17. N. 1—3, 4—6, 7—9, 10—12. Salem.
Pocket Guide. Salem, Mass. 1885.
Report of the Superintendent of the U. St. Naval Observatory for the year ending Iune 1886.
Johns Hopkins University circulars. Vol. VI. N. 54.
Johns Hopkins University studies. Fifth series 1—2, the City-government of Philadelphia by E. P. Allinson and Boies Penrose.
Annual report of the Geological Survey of Pennsylvania for 1885. By J. P. Leslsy.
Atlas to the annual report for 1885.
Proceedings of the American Pharmaceutical association 1886. Vol. 34.
Verhandlungen des deutschen wissenschaftlichen Vereins zu Santjago. 4. Heft. 1886.
Anales de la Sociedad Cientifica Argentina 1886. Entrega V. Tomo XXII.

Inhalt von Nr. 2.

W. Voigt, über das Doppler'sche Princip. — Preisstiftung der Wittwe Petsche. — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

2. März. **№ 3.** 1887.

Universität.

Verzeichniß der Vorlesungen auf der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen während des Sommerhalbjahrs 1887.

Die Vorlesungen beginnen den 15. April und enden den 15. August.

Theologie.

Encyklopädie der theologischen Wissenschaften zur Einführung in das Studium der Theologie: Prof. *Knoke* vierstündig um 5 Uhr.

Einleitung in das Alte Testament: Prof. *Duhm* vierstündig um 4 Uhr.

Alttestamentliche Theologie: Prof. *Schultz* fünfmal um 10 Uhr.

Erklärung der Genesis: Prof. *Bertheau* fünfst. 10 Uhr.

Die Psalmen erklärt Prof. *de Lagarde* fünfmal, 10 Uhr.

Erklärung der Psalmen: Prof. *Duhm* fünfmal um 10 Uhr.

Geschichte des Apostolischen Zeitalters: Prof. *Knoke* viermal um 9 Uhr.

Erklärung der synoptischen Evangelien: Prof. *Wiesinger* fünfmal um 9 Uhr.

Erklärung des Briefs an die Römer: Prof. *Lünemann* fünfmal um 9 Uhr.

Kirchengeschichte Theil I: Prof. *Wagenmann* fünfmal um 8 Uhr.

Kirchengeschichte des Mittelalters seit der Zeit Karls des Großen: Prof. *Reuter* sechsmal um 8 Uhr.

Dogmengeschichte: Prof. *Wagenmann* fünfmal um 7 Uhr.

Apologie des Christenthums: Prof. *Schultz* fünfmal um 12 Uhr.

Dogmatik II. Theil: Prof. *Ritschl* fünfmal um 11 Uhr.

Praktische Theologie: Prof. *Wiesinger* fünfstündig um 10 Uhr.

Kirchenrecht s. unter *Rechtswissenschaft* S. 55.

Geschichte des christlichen Kirchenbau's s. unter Literatur- und Kunstgeschichte S. 64.

Die alttestamentlichen Uebungen der wissenschaftlichen Abtheilung des theologischen Seminars leitet Prof. *Bertheau* Dienstags 6—8 Uhr; die neutestamentlichen Prof. *Wiesinger* Montags um 6; die kirchen- und dogmenhistorischen Prof. *Wagenmann* Freitags um 6; die dogmatischen Prof. *Schultz* Donnerstags um 6 Uhr.

Die homiletischen Uebungen der praktischen Abtheilung des theologischen Seminars leiten abwechslungsweise Prof. *Schultz* und Prof. *Knoke* Sonnabends 9—11 Uhr öffentlich; die katechetischen Uebungen Prof. *Wiesinger* am Mittwoch von 2—3 Uhr und Prof. *Knoke* Sonnabends 2—3 Uhr öffentlich; die liturgischen Uebungen *Derselbe* Sonnabends 9--10 und 11—12 Uhr öffentlich.

Kirchengeschichtliche Uebungen hält privatissime Prof. *Reuter* Donnerstags um 5 Uhr.

Rechtswissenschaft.

Institutionen des Römischen Rechts: sechsmal; Montag bis Freitag von 8—9 Uhr und Mittwoch von 7—8 Uhr Prof. *Regelsberger*.

Geschichte des römischen Rechts: Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 7—8 Uhr Prof. *Merkel*.

Erklärung der Commentarien des Gajus: Montag und Donnerstag von 4—5 Uhr Prof. *Wolff* öffentlich.

Römischer Civilproceß: Dienstag und Sonnabend von 10—11 Uhr Dr. *Goldschmidt*.

Pandekten I. Theil (Allgemeine Lehren, Sachenrecht, Obligationenrecht): Montag bis Freitag von 11—1 Uhr Prof. *Merkel*.

Pandekten II. Theil (Familien- und Erbrecht): Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag von 7—8 Uhr Prof. *Regelsberger*.

Pandektenpraktikum: Montag, Mittwoch und Freitag von 12—1 Uhr Prof. v. *Jhering*.

Pandektenexegeticum: Montag von 5—7 Uhr Prof. *Regelsberger*.

Römischrechtliche Uebungen: in 2 noch zu bestimmenden Stunden Prof. *Merkel* öffentlich.

Conversatorium über Pandekten: Dienstag und Donnerstag von 6—7 Uhr Nachm., Sonnab. von 9—10 Uhr Vormittags Dr. *Goldschmidt.*

Deutsche Rechtsgeschichte: fünfmal von 10—11 Uhr Prof. *Schröder.*

Deutsches Privatrecht: täglich von 9—10 Uhr Prof. *Schröder.*

Handelsrecht mit Wechsel- und Seerecht: fünfmal wöchentlich von 8—9 Uhr Prof. *Frensdorff.*

Grundbuchrecht: Sonnabend von 7—9 Uhr Prof. *Ziebarth.*

Erklärung ausgewählter Rechtsfälle aus dem Gebiete des deutschen Privatrechts (nach Loersch und Schröder, Urkunden zur Geschichte des deutschen Privatrechts, 2. Aufl., Bonn 1881): Sonnabend von 11—1 Uhr Prof. *Schröder* öffentlich.

Strafrecht: fünfmal wöchentlich von 10—11 Uhr Prof. *John.*

Deutsches Staatsrecht: fünfmal wöchentlich von 9—10 Uhr Prof. *Frensdorff.*

Kirchenrecht: täglich von 8—9 Uhr Prof. *Dove.*

Civilproceß einschließlich des Konkurs- und der summarischen Processe: fünfmal wöchentlich von 9—10 Uhr: Prof. *John.*

Strafproceß: fünfmal wöchentlioh von 11—12 Uhr Prof. *Ziebarth.*

Civilproceß-Prakticum: Dienstag von 4—6 Uhr Prof. *v. Bar.*

Strafrechtliche Uebungen: Donnerstag von 4—6 Uhr Prof. *v. Bar.*

Medicin.

Zoologie, Botanik, Chemie s. unter *Naturwissenschaften.*

Knochen- und Bänderlehre: Dr. *Schiefferdecker* am Montag von 10—11, am Dienstag und Sonnabend von 11—12 Uhr.

Der systematischen Anatomie II. Theil, Gefaß- u. Nervenlehre, lehrt Prof. *Fr. Merkel* täglich von 12—1 Uhr.

Allgemeine Anatomie lehrt Prof. *Fr. Merkel* Montag, Mittwoch, Donnerstag u. Freitag, von 11—12 Uhr.

Mikroskopische Uebungen hält Dr. *Schiefferdecker* für Anfänger vierstündlich und für Geübtere gleichfalls vierstündlich priv.

Specielle Histologie des Nervensystems trägt Prof. *Krause* am Mittwoch von 2—3 Uhr öffentlich vor.

Mikroskopische Uebungen in der speciellen Histologie hält Prof. *Krause* viermal wöchentlich um 2 Uhr.

Allgemeine und besondere Physiologie mit Erläuterungen durch Versuche und mikroskopische Demonstrationen: Prof. *Herbst* 6 Stunden wöchentlich um 10 Uhr.

Experimentalphysiologie I. Theil: Prof. *Meissner* täglich um 10 Uhr.

Physiologie der Zeugung und Embryologie: Prof. *Meissner* Freitag von 5—7 Uhr.

Arbeiten im physiol. Institut leitet Prof. *Meissner*.

Patholog. Anatomie des Herzens und der Gefäße lehrt Prof. *Orth* Mittwoch 2—3 Uhr öffentlich.

Specielle patholog. Anatomie lehrt Prof. *Orth* täglich außer Sonnabend 12—1 Uhr.

Praktische Uebungen in der patholog. Histologie hält Prof. *Orth* privatissime Dienstag und Freitag 2—4 Uhr.

Sections- und diagnostischen Cursus leitet Prof. *Orth* in passenden Stunden privatissime.

Physikalische Diagnostik verbunden mit Uebungen lehrt Prof. *Damsch* Montag, Mittwoch und Donnerstag von 4—5 Uhr.

Ueber physikalische Heilmethoden mit besonderer Berücksichtigung der Elektrotherapie, mit Uebungen am Krankenbett trägt Prof. *Damsch* dreimal wöchentlich vor.

Laryngoskopische Uebungen hält Prof. *Damsch* Sonnabend von 12—1 Uhr.

Ueber Impftechnik, verbunden mit Uebungen im Impfen, Prof. *Damsch* zu passenden Stunden.

Arzneimittellehre und Receptirkunde verbunden mit Experimenten und Demonstrationen sowie mit practischen Uebungen im Receptiren und Dispensiren lehrt Prof. *Marmé* dreimal wöchentlich Montag, Dienstag und Donnerstag von 5—6 Uhr.

Die Geschichte der Arzneimittel trägt Prof. *Husemann* Montag, Dienstag u. Donnerstag von 4 — 5 Uhr vor.

Specielle Toxicologie, I. Th., für ältere Mediciner lehrt in Verbindung mit Experimenten zweimal wöchentlich, Montag von 2 — 3 Uhr und Donnerstag von 3 — 4 Uhr Prof. *Marmé*.

Ausgewählte Kapitel der Pflanzengifte demonstrirt einmal wöchentlich von 6—7 Uhr Prof. *Marmé* öffentlich.

Ueber eßbare und giftige Pilze trägt Prof. *Husemann* öffentlich Donnerstag von 5—6 Uhr vor.

Ein pharmacognostisches Practicum mit mikroskopischen Uebungen hält für Pharmaceuten Prof. *Marmé* Sonnabend von 9 — 11 und von 11—1 Uhr.

Arbeiten im pharmacologischen Institut leitet Prof. *Marmé* täglich.

Specielle Pathologie und Therapie I. Hälfte lehrt Prof. *Ebstein* täglich, außer Montag, von 7—8 Uhr.

Ueber Kinderkrankheiten, I. Theil, trägt Prof. *Damsch* Dienstag und Freitag von 4—5 Uhr vor.

Die medicinische Klinik und Poliklinik hält Prof. *Ebstein* täglich, und zwar fünfmal von 10½—12 Uhr, Sonnabend von 9¼—10¾ Uhr.

Poliklinische Referatstunde hält Prof. *Damsch* einmal wöchentlich publice.

Allgemeine Chirurgie lehrt Prof. *Rosenbach* fünfmal wöchentlich von 8—9 Uhr Morgens, Dienstag bis Sonnabend.

Specielle Chirurgie lehrt Prof. *Lohmeyer* fünfmal wöchentlich von 8—9 Uhr.

Chirurgische Klinik hält Prof. *König* täglich mit Ausnahme Sonnabends von 9½—10¾ Uhr.

Chirurgische Poliklinik hält Prof. *König* gemeinsam mit Prof. *Rosenbach* 10¾ Uhr öffentlich.

Einen chirurgisch-diagnostischen Cursus hält Prof. *Rosenbach* zweimal wöchentlich, Dienstag und Freitag von 4—5 Uhr.

Operationscursus an Leichen hält Prof. *König* täglich 5—7 Uhr mit Ausnahme Sonnabends.

Ueber Krankheiten der Gelenke mit Demonstrationen liest Dr. *W. Müller* zweimal wöchentlich in später zu bestimmenden Stunden.

Ueber die Anomalien der Refraction und Accommodation des Auges, verbunden mit practischen Uebungen trägt einmal wöchentlich vor Prof. *Deutschmann*.

Die Klinik der Augenkrankheiten hält Prof. *Leber* Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 12—1 Uhr.

Augenoperationskursus hält Prof. *Leber* Mittwoch und Sonnabend von 8—9 Uhr.

Ueber die practisch wichtigen Abschnitte der Ohrenheilkunde mit Uebungen im Ohrenspiegeln trägt Prof. *Bürkner* Dienstag und Freitag von 3—4 Uhr oder zu besser passender Zeit vor.

Poliklinik für Ohrenkranke hält Prof. *Bürkner* (für Geübtere) Mittwoch und Sonnabend von 12—1 Uhr.

Ueber Beckenfehler trägt Prof. *Schwartz* öffentlich und einmal wöchentlich zu gelegener Zeit vor.

Geburtshülflichen Operationscursus am Phantom hält Dr. *Droysen* Mittwoch und Sonnabend von 8—9 Uhr.

Ueber Frauenkrankheiten liest Dr. *Droysen* Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag von 3—4 Uhr.

Gynäkologische Klinik leitet Prof. *Schwartz* Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag von 8—9 Uhr.

Psychiatrische Klinik verbunden mit Vorlesungen über Geisteskrankheiten hält Prof. *Meyer* wöchentlich in vier Stunden, Montag und Donnerstag von 3—5 Uhr.

Gerichtliche Psychiatrie mit casuistischen Demonstrationen lehrt (für Juristen) Prof. *Meyer* wöchentlich in zwei nach Verabredung festzusetzenden Stunden.

Hygiene, 2. Theil mit Experimenten und Excursionen lehrt Dienstag, Mittwoch, Freitag 7—8 Uhr Prof. *Flügge.*

Arbeiten im Institut für medicinische Chemie und Hygiene leitet Prof. *Flügge* täglich in passenden Stunden.

Die äußeren Krankheiten der Hausthiere und Beurtheilungslehre des Pferdes und Rindes trägt Prof. *Esser* wöchentlich fünfmal von 8—9 Uhr vor.

Klinische Demonstrationen im Thierhospitale wird *Derselbe* öffentlich in zu verabredenden Stunden halten.

Philosophie.

Ueber Hume's Philosophie: Prof. *G. E. Müller*, Mittw. 10 Uhr, öffentlich.

Ueber Kants kritische Philosophie: Prof. *Peipers*, Mittwoch 11 Uhr, öffentlich.

Logik: Prof. *G. E. Müller*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 4 Uhr.

Erkenntnißtheorie und Metaphysik: Prof. *Baumann*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 9 Uhr.

Metaphysik, 2. Theil: Prof. *Rehnisch*, in zu verabredenden Stunden.

Psychologie: Prof. *Peipers*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 8 Uhr.

Philosophische Uebungen: Prof. *Rehnisch*, öffentlich in zu verabredenden Stunden.

Geschichte und System der Pädagogik: Prof. *Baumann*, Mont., Dienst., Donn., Freit. 5 Uhr.

Die Uebungen des K. pädagogischen Seminars leitet Prof. *Sauppe*, Mont. und Donnerstag 11 Uhr, öffentlich.

Mathematik, Astronomie und theoretische Physik.

Einleitung in die Differential- und Integral-Rechnung: Prof. *Schering*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 7 Uhr früh.

Zahlentheorie: Dr. *Hölder*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 12 Uhr.

Determinanten: Dr. *Schönflies*, Mittwoch u. Sonnabend, 8 Uhr.

Einleitung in die projektive Geometrie: Dr. *Schönflies*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 8 Uhr. Dazu unentgeltlich eine Uebungsstunde.

Krumme Flächen u. Curven doppelter Krümmung: Prof. *Schwarz*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 11 Uhr.

Anwendung der Theorie der ellipt. Funktionen: Prof. *Schwarz*, Mont. bis Freit. 9 Uhr.

Hyperelliptische Funktionen: Prof. *Klein*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 12 Uhr.

Ausgewählte Kapitel der Mechanik: Prof. *Klein*, Mittw. 11—1 Uhr.

Theorie der Bahnbewegung von Planeten und Kometen: Prof. *Schur*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 11 Uhr.

Ueber die Hülfsmittel zur Berechnung historischer Finsternisse: Prof. *Schur*, Sonnabend 11 Uhr, öffentlich.

Theorie des Lichtes: Prof. *Voigt*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 10 Uhr.

Mathematische Theorie des Magnetismus: Dr. *Hugo Meyer*, Dienstag und Donnerstag 7 Uhr früh.

Mathematische Colloquien wird Prof. *Schwarz* privatissime, unentgeltlich, wie bisher Montags 5—7 Uhr leiten.

Praktische Uebungen an den Instrumenten der Sternwarte: Prof. *Schur*.

Magnetische Beobachtungen und Erdstrommessungen im Gauss-Observatorium leitet Prof. *Schering* wöchentlich mehrere Nächte, privatissime, unentgeltlich, in Gemeinschaft mit dem Assistenten *Holborn*.

Im K. mathematisch-physikalischen Seminar wird Prof. *Schering* (Montag 3 Uhr) Theorie der Kugelfunctionen und ihre Anwendung auf den Erdmagnetismus (Mittw. 7 Uhr früh) vortragen, Prof. *Riecke* ausgewählte Kapitel der mathematischen und Experimentalphysik (Donnerst. 2 Uhr) behandeln, Prof. *Schwarz* (Sonnabend 9 Uhr) mathematische Uebungen veranstalten, Prof. *Voigt* ausgewählte Probleme der Elasticitätslehre (Mittw. 10 Uhr) behandeln, Prof. *Klein* Uebungen in Mechanik (Sonnabend 11—1 Uhr), Prof. *Schur* astronomische Uebungen (Freit. 8 Uhr) veranstalten.

Experimentalphysik: siehe *Naturwissenschaften* S. 61.

Naturwissenschaften.

Zoologie, Uebersicht des Gesammtgebietes, Prof. *Ehlers*, täglich 8 Uhr.

Osteologie der Wirbelthiere, mit besonderer Berücksichtigung der fossilen Formen: Dr. *Brock*, dreimal 4 Uhr.

Vergleichende Entwickelungsgeschichte des Menschen und der Wirbelthiere: Dr. *Hamann*, Montag und Donnerstag 5 Uhr.

Ueber kulturfeindliche Thiere: Dr. *Henking*, zweistündig, Dienst. und Freitag 5 Uhr.

Vergleichende Histologie mit Demonstrationen: Dr. *Hamann*, Montag und Donnerstag 6 Uhr.

Zootomischer Curs: Prof. *Ehlers*, Mittw. u. Donn. 11—1 Uhr.

Zoologische Uebungen: Prof. *Ehlers*, wie bisher, täglich (mit Ausnahme des Sonnabends) von 9—1 Uhr.

Grundzüge der gesammten Botanik: Prof. *Berthold*, Dienst. bis Sonnabend, früh 7 Uhr.

Systematik der angiospermen Gewächse mit besonderer Berücksichtigung der einheimischen Familien: Prof. *Graf zu Solms*, Dienst., Mittw. u. Donn. 12 Uhr.

Ueber die Vegetation des Meeres: Prof. *Falkenberg*, Mittw. 12 Uhr, öffentlich.

Uebungen im Untersuchen und Bestimmen der Pflanzen: Prof. *Falkenberg*, Dienst. u. Freit. 6 Uhr.

Uebungen im Untersuchen und Bestimmen der Kryptogamen: Prof. *Berthold*, einmal wöchentlich, privatissime, aber unentgeltlich.

Demonstrationen im botanischen Garten: Prof. *Graf zu Solms*, Freitag 3 Uhr, öffentlich.

Anleitung zu selbständigen Arbeiten im Laboratorium des botanischen Gartens, wesentlich für Vorgeschrittenere: Prof. *Graf zu Solms*, privatissime, in zu bestimmenden Stunden.

Mikroskopisch botanischer Kursus, Sonnabend von 9—1 Uhr (für Pharmaceuten 2stündig): Prof. *Berthold*.

Tägliche Arbeiten im pflanzenphysiologischen Institut: Prof. *Berthold*.

Ueber technisch wichtige Mineralien und ihre Lagerstätten: Dr. *Rinne*, zweistündig.

Palaeontologie: Prof. *v. Koenen*, 5 Stunden, Dienst. bis Sonn., 7 Uhr.

Ueber die geologischen Verhältnisse des nördlichen Deutschlands: Prof. *v. Koenen*, Sonnabend 12 Uhr, öffentlich, verbunden mit geologischen Excursionen.

Uebungen im Bestimmen: Prof. *v. Koenen*, 2 Stunden, öffentlich.

Geologische und palaeontologische Uebungen: Prof. *von Koenen*, täglich, privatissime, aber unentgeltlich.

Experimentalphysik, erster Theil (Mechanik, Akustik, Optik): Prof. *Riecke*, Mont. und Freit. 4 Uhr, Dienst. und Donnerst. 5 Uhr.

Die praktischen Uebungen im physikalischen Institute leiten die Prof. *Riecke* und *Voigt*, in Gemeinschaft mit den Assistenten Dr. *Meyer*, Dr. *Hennig* und Dr. *Krüger*, Dienstag und Freitag 2—4 Uhr, Sonnabend 9—1 Uhr.

Theorie des Lichtes und des Magnetismus: s. *Mathematik* S. 59.

Klimatologie: Dr. *Hugo Meyer*, 1 St.

Physikalisches Colloquium für Pharmaceuten: Dr. *Hugo Meyer* in zwei zu verabredenden Stunden.

Mathematisch-physikalisches Seminar: vgl. *Mathematik* S. 59.

Allgemeine Chemie, organischer Theil (Organische Experimentalchemie): Prof. *V. Meyer*, 6 Stunden, 9 Uhr.

Organische Chemie, für Mediciner: Prof. *v. Uslar*, 4 Stunden, 9 Uhr.

Physikalische Chemie: Dr. *Buchka*, Dienst. und Donnerst. 8 Uhr.

Qualitative und quantitative Spectralanalyse, mit praktischen Uebungen: Dr. *Gattermann*, 2 Stunden.

Pharmaceutische Chemie (anorgan. Theil): Prof. *Polstorff*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 5 Uhr.

Chemie der Benzolderivate, II. Theil: Dr. *Leuckart*, Mont., Mittw. und Donnerst. 12 Uhr.

Maaßanalyse mit praktischen Uebungen: Prof. *Jannasch*, Mont. und Mittw. 8 Uhr.

Ausgewählte Kapitel aus der chemischen Technologie (mit Excursionen). I. Anorganischer Theil: Dr. *Leuckart*, Dienst. u. Freit. 12 Uhr.

Anleitung zum Anstellen von Vorlesungsexperimenten, speciell für Kandidaten des höheren Schulamts: Dr. *Gattermann*, 2 Stunden.

Besprechung ausgewählter Kapitel aus der Tagesliteratur: Dr. *Buchka*, Dienstag 6 Uhr.

Pharmacie: Prof. *von Uslar*, 4 Stunden, 3 Uhr. — Vgl. unter *Medicin* S. 56.

Pflanzenernährungslehre (Agriculturchemie): Prof. *Tollens*, Montag, Dienstag, Mittwoch, 10 Uhr.

Grundzüge der Chemie für Landwirthe I. Theil: Dr. *Pfeiffer*, Dienst., Donnerst., Freit., 9 Uhr.

Die chemischen Uebungen und wissenschaftlichen Arbeiten im

akademischen Laboratorium leitet Prof. *V. Meyer*, in Gemeinschaft mit den Assistenten Prof. *Polstorff*, Dr. *Buchka*, Dr. *Leuckart* und Dr. *Gattermann*, sowie mit Prof. *Jannasch* (mit diesem in speziell mineral-analytischer Richtung), und zwar 1) Vollpracticum, tägl. (außer Sonnabends) 8—12 und 3—6 Uhr; 2) Halbpracticum je Vor- und Nachmittags, täglich (außer Sonnabends); 3) Chemisches Anfänger-Practicum für Mediciner, täglich (außer Sonnabends).

Praktische und wissenschaftliche Uebungen im agricultur-chemischen Laboratorium leitet Prof. *Tollens*, in Gemeinschaft mit Dr. *Rischbieth*, Montag—Freitag, 8—12 und 2—4 Uhr.

Historische Wissenschaften.

Grundzüge der lateinischen Palaeographie und Uebungen im Bestimmen von Handschriften: Prof. *Steindorff*, vierstündig, Mont., Dienst., Donnerst. und Freit. 12 Uhr.

Diplomatische Uebungen: Prof. *Steindorff*, Mittwoch 11—1 Uhr, privatissime, unentgeltlich.

Quellenkunde der griechischen Geschichte: Prof. *von Wilamowitz-Möllendorff*, vierstündig, 12 Uhr.

Römische Geschichte bis zur Zeit der Bürgerkriege: Prof. *Volquardsen*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit. 8 Uhr.

Allgemeine Verfassungsgeschichte der Germanischen und Romanischen Völker des Mittelalters: Prof. *Weiland*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 9 Uhr.

Allgemeine Geschichte des 13. Jahrhunderts bis zum deutschen Interregnum: Dr. *von Kap-herr*, Mittwoch 9—11 Uhr.

Allgemeine Geschichte von 1648 bis 1789: Prof. *Kluckhohn*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit., 10 Uhr.

Deutsche Geschichte im 19. Jahrh. (1815—1871): Prof. *Kluckhohn*, Dienst., Donnerst., Freit. 5 Uhr.

Geschichte Italiens zur Zeit des Mittelalters: Prof. *Th. Wüstenfeld*, Mont., Dienst., Donnerst. u. Freit., 10 Uhr, unentgeltlich.

Historische Uebungen leitet Prof. *Weiland*, Freitag 6 Uhr, privatissime, aber unentgeltlich.

Historische Uebungen leitet Prof. *Volquardsen* Dienstag 6 Uhr öffentlich.

Historische Uebungen leitet Prof. *Kluckhohn*, Montag 6 Uhr, privatissime aber unentgeltlich.

Kirchengeschichte: s. unter *Theologie* S. 54.

Erd- und Völkerkunde.

Geographie von Deutschland: Prof. *H. Wagner*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit., 11 Uhr.

Geographische Uebungen für Vorgeschrittenere: Prof. *Wagner*, Sonnabend Vormittag.

Staatswissenschaft und Landwirthschaftslehre.

Praktische Nationalökonomie mit Einleitung in die gesammte Nationalökonomie: Prof. *Cohn*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit. 11 Uhr.

Socialismus und Socialpolitik. Prof. *Cohn*: Mont., Dienst., Donnerst., Freit. 5 Uhr.

Staatswissenschaftliches Seminar: Prof. *Cohn*, Mittw. 5—7 Uhr, privatissime, unentgeltlich.

Einleitung in das landwirthschaftliche Studium: Prof. *Drechsler*, 1 St., öffentlich.

Ackerbaulehre, allgemeiner und specieller Theil: Prof. *Drechsler*, 6 Stunden, 12 Uhr.

Die allgemeine und specielle landwirthschaftliche Thierproductionslehre (Lehre von den Nutzungen, der Züchtung, Ernährung und Pflege des Pferdes, Rindes, Schafes, Schweines etc.): Prof. *Griepenkerl*, Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag, 4 Uhr.

Die specielle landwirthschaftliche Rassenkunde: Prof. *Griepenkerl*, Freit. 5 Uhr, unentgeltlich.

Die Ackerbausysteme (Felderwirthschaft, Feldgraswirthschaft, Fruchtwechselwirthschaft u. s. w.): Prof. *Griepenkerl*, Donnerstag und Freitag 10 Uhr.

Im Anschluß an diese Vorlesungen werden Excursionen nach benachbarten Landgütern und Fabriken veranstaltet werden.

Die Lehre vom Futter (I. Theil der landw. Fütterungslehre): Prof. *Henneberg*, Montag, Dienstag, Mittwoch 11 Uhr.

Ausgewählte Kapitel der Ernährungslehre: Dr. *Kern*, 2 St.

Landwirthschaftliches Practicum, 1. Uebungen im landwirthschaftlichen Laboratorium, Freitag 2—6 Uhr, Sonnabend 9—1 Uhr, unter Leitung des Prof. *Drechsler* und Dr. *Edler*; 2. Uebungen in landwirthschaftlichen Berechnungen, Montag u. Donnerstag 6 Uhr: Prof. *Drechsler*.

Landwirthschaftliche Excursionen und Demonstrationen im Versuchsfeld und Garten: Prof. *Drechsler*.

Krankheiten der Hausthiere: Vgl. *Medicin* S. 58.

Agriculturchemie, Agriculturchemisches Practicum: Vgl. *Naturwissenschaften* S. 62.

Literatur- und Kunstgeschichte.

Bibliothekverwaltungslehre: Prof. *Dziatzko*, Dienst. und Freit. 8 Uhr. Im Anschluß Uebungen (unentgeltlich), Zeit vorbehalten.

Geschichte der deutschen Literatur von Opitz bis auf Lessing: Dr. *Roethe*, Mont., Mittw., Freit. 7 Uhr.

Geschichte der Universität Göttingen: Prof. *von Leutsch*, Mittw. und Sonnabend, 12 Uhr.

Deutsche Dichtung des 19. Jahrhunderts: Prof. *Goedeke*, Montag 5 Uhr, öffentlich.

Geschichte der französischen Literatur im 16. Jahrhundert: Prof. *Vollmöller*, Mont., Dienst. 8—10 Uhr.

Geschichte der englischen Literatur des 19. Jahrhunderts: Prof. *Albr. Wagner*, Donn., Freit. 9 Uhr.

Geschichte des christlichen Kirchenbaus bis auf die Gegenwart: Prof. *Lange*, Mont., Donn., Freit. 3 Uhr.

Kunsthistorische Uebungen: Prof. *Lange*, in später zu bestimmenden Stunden.

Uebungen auf dem Gebiete der neueren Literatur: Dr. *Roethe*, privatissime aber unentgeltlich, Mittw. 6 Uhr.

Geschichte der Philosophie: Vgl. *Philosophie* S. 58.

Alterthumskunde.

Encyclopaedie und Methodologie der griechischen und römischen Kunstarchäologie: Prof. *Wieseler*, dreistündig, 12 Uhr.

Ueber Ursprung, Arten und Herstellung der antiken Münzen: Prof. *Wieseler*, eine Stunde, 12 Uhr, privatissime, aber unentgeltlich.

Ueber die pompejanischen Wandgemälde: Prof. *Dilthey*, Mont. und Donnerst. 10 Uhr.

Ausgewählte Kunstwerke läßt im K. archäolog. Seminar erklären Prof. *Wieseler*, Sonnabend, 12 Uhr, öffentlich.

Die Abhandlungen der Mitglieder des K. archäol. Seminars wird Prof. *Wieseler* privatissime beurtheilen, wie bisher.

Archäologische Uebungen: Prof. *Dilthey*, Sonnabend 10 Uhr.

Ausgewählte Capitel der deutschen Hausalterthümer: Prof. *Heyne*, Mittw. 12 Uhr, öffentlich.

Vergleichende Sprachlehre.

Einleitung in die vergleichende Sprachwissenschaft: Prof. *Bechtel*, Mittw. u. Sonnabend, 9 Uhr.

Ueber die Entwicklung der indogermanischen Sprachen: Prof. *Fick*, 2 Stunden.

Orientalische Sprachen.

Die Vorlesungen über das A. Testament s. u. *Theologie* S. 53.

Ausgewählte Stücke aus arabischen Schriftstellern erklärt Prof. *Wüstenfeld*, privatissime.

Die syrische Uebersetzung der Geoponica läßt zweimal in noch zu bestimmenden Stunden Prof. *de Lagarde* erklären.

Anfangsgründe der äthiopischen Sprache und Erklärung der Lesestücke in Fr. Prätorius äthiopischer Grammatik (Karlsruhe u. Leipzig, 1886): Prof. *Haupt*, Montag und Donnerstag, 5 Uhr.

Vergleichende Grammatik des Assyrisch-Babylonischen und Erklärung leichter Keilschrifttexte mit besonderer Berücksichtigung der für das A. T. wichtigen Inschriften: Prof. *Haupt*, Mont. u. Donnerst., 6 Uhr, öffentlich.

Erklärung ausgewählter sumero-akkadischer Psalmen: Prof. *Haupt*, 5 Uhr, privatissime, aber unentgeltlich.

Grammatik der Sanskṛitsprache für Anfänger: Prof. *Kielhorn*, Montag, Mittwoch, Sonnabend, 7 Uhr.

Erklärung von Kâlidâsa's Kumârasambhava: Prof. *Kielhorn*, Mittw., Sonnabend, 8 Uhr.

Erklärung ausgewählter Hymnen des Ṛigveda: Prof. *Kielhorn*, zweimal, öffentlich.

Griechische und lateinische Sprache.

Ueber die homerischen Gedichte: Prof. *Fick*, 4 St.

Aristophanes Wespen: Prof. *von Wilamowitz-Möllendorff*, vierstündig, 4 Uhr.

Platons Symposion: Prof. *Sauppe*, Mont., Dienst., Donn. u. Freit. 9 Uhr.

Quellenkunde der griech. Geschichte: s. *Histor. Wissensch.* S. 62.

Erklärung des Properz mit einleitender Geschichte der römischen Elegie: Prof. *Dilthey*, Dienst., Mittw., Freit. 10 Uhr.

Tacitus Annalen: Prof. *Wilhelm Meyer*, Mont., Dienst., Donn., Freit. 8 Uhr.

Im K. philologischen Seminar leiten die schriftlichen Arbeiten und Disputationen Prof. *Sauppe* u. Prof. *von Wilamowitz-Möllendorff*, Mittwoch 11 Uhr, lassen Antiphons 5. Rede Prof. *Sauppe*, Montag und Donnerstag, 11 Uhr, und die kleinen Gedichte des Vergilius *von Wilamowitz-Möllendorff* erklären, Dienstag und Freitag, 11 Uhr, alles öffentlich.

Im K. philologischen Proseminar läßt Cicero's Rede pro Caelio erklären und leitet die Disputationen über die eingereichten schriftlichen Arbeiten Prof. *Wilh. Meyer*, Sonnabend 8—10 Uhr, öffentlich.

Deutsche Sprache.

Gotische Grammatik: Prof. *Bechtel*, Dienst. u. Freit. 9 Uhr.

Vergleichende Flexionslehre der altgermanischen Dialekte: Prof. *Heyne*, 4 Stunden, 5 Uhr.

Altsächsische Grammatik und Metrik nebst Erklärung ausgewählter Abschnitte des Heliand: Dr. *Roethe*, Dienst. u. Donn. 7 Uhr.

Ausgewählte althochdeutsche und mittelhochdeutsche Dichtungen nach Wackernagels kl. altdeutschem Lesebuche erklärt Prof. *Wilh. Müller*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 3 Uhr.

Altdeutsche Uebungen: Prof. *Heyne*, 1 St., privatissime, unentg.

Mittelhochdeutsche Uebungen für Anfänger (Lektüre des Laurin nach Müllenhoffs kleiner Ausgabe, 2. Aufl. Berlin, 1886): Dr. *Roethe*, unentgeltl., Sonnabend 7 Uhr.

Geschichte der deutschen Literatur: Vgl. *Literaturgeschichte* S. 64.

Neuere Sprachen.

Geschichte der französischen Literatur: Vgl. *Literaturgesch.* S. 64.

Provenzalische Grammatik: Dr. *Andresen*, Mont. u. Dienst. 10 Uhr.

Uebungen in der französischen Sprache (Uebersetzungen ins Französische, schriftliche Uebungen): Prof. *Vollmöller* u. Dr. *Cloetta*, Mont. u. Mittw. 11 Uhr.

Englische Metrik der älteren Zeit: Prof. *Albr. Wagner*, Donn. u. Freit. 8 Uhr.

Geschichte der englischen Literatur: Vgl. *Literatur und Kunstgeschichte* S. 64.

Im Seminar für neuere Sprachen Prof. *Vollmöller*: Erklärung des Löwenritters von Christian von Troyes, Mittwoch 8—10 Uhr. Prof. *Vollmöller* mit Dr. *Cloetta*: Erklärung von Corneilles Cid in französischer Sprache, Dienstag 11 Uhr; italienische Uebungen,

Dienstag 6 Uhr. — Dr. *Andresen*: französische Uebungen, Freitag 6 Uhr. — In der englischen Abtheilung stellt Prof. *Albr. Wagner* neuenglische Uebungen an, und giebt Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, Mont. u. Donnerst. 6 Uhr.

Lektor *L. Kœune:* Alfred de Mussets Leben und Schriften, Dienstag und Freitag 8 Uhr; — Grammatik und Uebungen, Dienst. 9 Uhr; Style et composition, Freitag 9 Uhr.

Schöne Künste. — Fertigkeiten.

Unterricht im Zeichnen ertheilt Zeichenlehrer *Peters*, Sonnabend 2—4 Uhr, unentgeltlich.

Unterricht im Malen *Derselbe* in zu verabredenden Stunden.

Harmonie- und Kompositionslehre, verbunden mit praktischen Uebungen: Musikdirector *Hille*, in passenden Stunden.

Zur Theilnahme an den Uebungen der Singakademie und des Orchesterspielvereins ladet *Derselbe* ein.

Reitunterricht ertheilt in der K. Universitäts-Reitbahn der Univ.-Stallmeister, Rittmeister a. D. *Schweppe*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, Sonnabend, Morgens von 7 — 11 und Nachm. (außer Sonnabend) von 4 — 5 Uhr.

Fechtkunst lehrt der Universitätsfechtmeister *Grüneklee*, in zu verabredenden Stunden, Tanzkunst der Universitätstanzmeister *Höltzke* (Mont. und Donnerst. 8 bis 10 Uhr Abends).

Oeffentliche Sammlungen.

In der *Universitätsbibliothek* ist das Ausleihezimmer an den Wochentagen von 12—1 und von 2—3 Uhr, der Lesesaal von 10—4 Uhr geöffnet. Verliehen werden Bücher nach Abgabe einer Semesterkarte mit der Bürgschaft eines Professors.

Die *Gemäldesammlung* ist Sonntag von 11- 1 Uhr geöffnet.

Der *botanische Garten* ist dem Publikum täglich von 7 — 12 und von 2—6 Uhr geöffnet.

Die *mineralogische* und die *geologisch-paläontologische Schausammlung* sind während des Sommerhalbjahrs Sonnabends v. 1—3 Uhr dem Publikum geöffnet.

Die Sammlungen des *landwirthschaftlichen Instituts* sind dem Publikum Mittwoch Nachmittag von 2—4 Uhr zugänglich. Anmeldung im Institutsgebäude.

Besuchszeit des *agriculturchemischen Laboratoriums* Donnerst. v. 10—12 Uhr.

Ueber den Besuch und die Benutzung der *theologischen Seminarbibliothek*, des *Theatrum anatomicum*, des *physiologischen Instituts*, der *pathologischen Sammlung*, der *Sammlung mathematischer Instrumente und Modelle*, des *zoologischen* und *ethnographischen Museums*, des *botanischen Gartens* und des *pflanzenphysiologischen Instituts*, der *Sternwarte*, des *physikalischen Kabinets* und *Laboratoriums*, der *mineralogischen* und der *geognostisch-paläontologischen Sammlung*, der *chemischen Laboratorien*, des *archäologischen Museums*, der *Gemäldesammlung*, der *Bibliothek des K. philologischen Seminars*, der *Bibliothek* und des *Lesezimmers des K. mathematisch-physikalischen Seminars*, des *diplomatischen Apparats*, der *Sammlungen des landwirthschaftlichen Instituts* bestimmen besondere Reglements das Nähere.

Bei dem Logiscommissär, Pedell *Bartels* (Kleperweg 2), können die, welche Wohnungen suchen, sowohl über die Preise, als andere Umstände Auskunft erhalten und auch im voraus Bestellungen machen.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

16. März. ~~113~~ № 4. 1887.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Preisaufgaben
der
Wedekindschen Preisstiftung
für Deutsche Geschichte.

Der Verwaltungsrath der Wedekindschen Preisstiftung für Deutsche Geschichte macht hierdurch die Aufgaben bekannt, welche von ihm für den fünften Verwaltungszeitraum, vom 14. März 1886 bis zum 14. März 1896, nach den Ordnungen der Stiftung (§ 20) gestellt werden.

Für den ersten Preis

wiederholt der Verwaltungsrath die für den vorigen Verwaltungszeitraum gestellte Aufgabe: er verlangt eine allen Anforderungen der Wissenschaft entsprechende Ausgabe der von dem Mainzer **Eberhard Windeck** verfaßten **Denkwürdigkeiten über Leben und Zeit Kaiser Sigismunds.**

Es gilt den völlig werthlosen und unbrauchbaren Abdruck bei Mencken durch eine nach Seite der Sprache wie des Inhalts gleich tüchtige Ausgabe zu ersetzen.

Nach den älteren Vorarbeiten von Dümgé, Mone, Aschbach, Droysen hat neuerdings v. Hagen in der Einleitung zu seiner Uebersetzung (Geschichtschreiber der deutschen Vorzeit, Lief. 79. Leipzig 1886) über das Verhältniß von dreien der wichtigsten Handschriften (Gotha, Cheltenham, Hannover) zu einander gehandelt und danach zwei von dem Verfasser selbst herrührende Redactionen unterschieden, auch die Annahme abgewiesen, daß die Handschrift zu

Cheltenham ein Original sei. Für den Bearbeiter ist die Heranziehung der anderen bekannten und von v. Hagen S. VII, Anm. 2 aufgeführten Hdsch. schon deßhalb erforderlich, um die Richtigkeit der Aufstellungen v. Hagen's zu prüfen und festzustellen, ob etwa noch mehr als zwei Ausgaben des Werkes vorliegen.

Von den drei im Archiv III, 429 verzeichneten Vaticanischen Hdsch. wird der Verwaltungsrath demnächst Beschreibungen anfertigen lassen, welche ihre Classificirung ermöglichen. Diese Beschreibungen sollen dem Bearbeiter durch Vermittelung der Verwaltung der Kgl. Universitätsbibliothek zur Verfügung stehen. Von der Heranziehung dieser drei Hdsch. zur Textconstitution glaubt der Verwaltungsrath im übrigen den Bearbeiter befreien zu sollen.

Bei der Bearbeitung des Textes wird es vor allem darauf ankommen, daß die von dem Verfasser herrührenden Unterschiede der verschiedenen Redactionen klar und übersichtlich zur Erscheinung kommen, davon auch äußerlich dasjenige geschieden und gekennzeichnet werde, was etwa fremder Ueberarbeitung seinen Ursprung verdankt. Die originalen Rubriken und Capitelüberschriften sind in die Ausgabe aufzunehmen.

Die Urkunden und Aktenstücke aller Art, welche dem Werke zahlreich eingefügt sind, erfordern genaue Untersuchung in Bezug auf Herkunft, Wiedergabe und anderweitige Benutzung. Sind von denselben abweichende Texte oder die Originale bekannt, so ist darauf in den Anmerkungen hinzuweisen, geeigneten Falls der abweichende Text zum Abdruck in der Anmerkung zu bringen. Desgleichen ist wenigstens annäherungsweise der Versuch zu machen für die rein erzählenden Theile Ursprung oder Quelle beizubringen, namentlich in Bezug auf An- und Abwesenheit des Verfassers. Es darf dem Text an Erläuterung in sprachlicher und sachlicher Hinsicht nicht fehlen.

Die Einleitung soll sowohl die bei der Untersuchung und Herstellung des Textes befolgte Methode klarlegen, als auch eine eingehende Erörterung über die Lebensschicksale des Verfassers, die Beziehungen zu seiner Vaterstadt, seine Reisen, sein Verhältniß zum Kaiser und anderen namhaften Zeitgenossen, seine übrigen Werke in Prosa und Dichtung geben.

Die sprachliche Behandlung des Textes hat sich, falls nicht etwa eine Originalhandschrift auftauchen sollte, nach den von Weizsäcker im I. Bande der Reichstagsakten für die Vereinfachung der Schreibung spätmittelalterlicher deutscher Texte aufgestellten Grundsätzen zu richten.

Der Ausgabe ist ein Wortverzeichniß entsprechend demjenigen des 1. Bandes der Mainzer Chroniken (Städtechroniken Bd. XVII),

sowie ein ungetrenntes Verzeichniß der Personen- und Ortsnamen beizufügen.

Von der Cheltenhamer Handschrift befindet sich eine genaue Abschrift auf der Kgl. Universitätsbibliothek, welche bereitwilligst von der Bibliotheksverwaltung zur Benutzung ausgeliehen wird.

Für den zweiten Preis

schreibt der Verwaltungsrath

eine Geschichte des Herzogthums Schwaben vom Beginn des 10. bis in die zweite Hälfte des 13. Jahrhunderts

aus.

Nach einem einleitenden Rückblicke auf die karolingische Zeit ist der Schwerpunkt der Arbeit in die Verfassungsgeschichte des bezeichneten Zeitraums zu legen, da die politische Geschichte Schwabens zur Genüge behandelt worden ist. Das schwäbische Herzogthum ist in seiner Entwicklung bis zur Auflösung zu verfolgen, sein Verhältniß zu der königlichen Gewalt einerseits wie zu den Bisthümern, Grafschaften, Herrschaften und Städten andererseits darzulegen. Nach der gründlichen und erschöpfenden Untersuchung des Einzelnen erwartet der Verwaltungsrath eine zusammenfassende Darstellung der Ergebnisse der Untersuchung. Neben den Nachrichten der Geschichtschreiber hat der Bearbeiter dem reichen Urkundenmaterial eingehendste Aufmerksamkeit zu widmen und es nach allen Richtungen für den bezeichneten Zweck auszubeuten. Als Beilage der Arbeit wünscht der Verwaltungsrath Regesten der Urkunden, an welchen die Herzöge von Schwaben in irgend einer Eigenschaft betheiligt sind oder in welchen sie Erwähnung finden.

In Beziehung auf die Bewerbung um diese Preise, die Ertheilung des dritten Preises und die Rechte der Preisgewinnenden wird aus den Ordnungen der Stiftung Folgendes wiederholt:

1. **Ueber die zwei ersten Preise.** Die Arbeiten können in deutscher oder lateinischer Sprache abgefaßt sein.

Jeder dieser Preise beträgt 1000 Thaler in Gold (3300 Reichsmark) und muß jedesmal ganz, oder kann gar nicht zuerkannt werden.

2. **Ueber den dritten Preis.** Für den dritten Preis wird keine bestimmte Aufgabe ausgeschrieben, sondern die Wahl des Stoffes bleibt den Bewerbern nach Maßgabe der folgenden Bestimmungen überlassen.

Vorzugsweise verlangt der Stifter für denselben ein deutsch geschriebenes Geschichtsbuch, für welches sorgfältige und geprüfte Zusammenstellung der Thatsachen zur ersten, und Kunst der Darstellung zur zweiten Hauptbedingung gemacht wird. Es ist aber damit nicht bloß eine gut geschriebene historische Abhandlung, sondern ein umfassendes historisches Werk gemeint. Speciallandesgeschichten sind nicht ausgeschlossen, doch werden vorzugsweise nur diejenigen der größern (15) deutschen Staaten berücksichtigt.

Zur Erlangung des Preises sind die zu diesem Zwecke handschriftlich eingeschickten Arbeiten und die von dem Einsendungstage des vorigen Verwaltungszeitraums bis zu demselben Tage des laufenden Zeitraums (dem 14. März des neunten Jahres) gedruckt erschienenen Werke dieser Art gleichmäßig berechtigt. Dabei findet indessen der Unterschied statt, daß die ersteren, sofern sie in das Eigenthum der Stiftung übergehen, den vollen Preis von 1000 Thalern in Gold, die bereits gedruckten aber, welche Eigenthum des Verfassers bleiben, oder über welche als sein Eigenthum er bereits verfügt hat, die Hälfte des Preises mit 500 Thalern Gold empfangen.

Wenn keine preiswürdigen Schriften der bezeichneten Art vorhanden sind, so darf der dritte Preis angewendet werden, um die Verfasser solcher Schriften zu belohnen, welche durch Entdeckung und zweckmäßige Bearbeitung unbekannter oder unbenutzter historischer Quellen, Denkmäler und Urkundensammlungen sich um die deutsche Geschichte verdient gemacht haben. Solchen Schriften darf aber nur die Hälfte des Preises zuerkannt werden.

Es steht Jedem frei, für diesen zweiten Fall Werke der bezeichneten Art auch handschriftlich einzusenden. Mit denselben sind aber ebenfalls alle gleichartigen Werke, welche vor dem Einsendungstage des laufenden Zeitraums gedruckt erschienen sind, für diesen Preis gleich berechtigt. Wird ein handschriftliches Werk gekrönt, so erhält dasselbe einen Preis von 500 Thalern in Gold; gedruckt erschienenen Schriften können nach dem Grade ihrer Bedeutung Preise von 250 Thlr. oder 500 Thlr. Gold zuerkannt werden.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich von selbst, daß der dritte Preis auch Mehreren zugleich zu Theil werden kann.

3. **Rechte der Erben der gekrönten Schriftsteller.** Sämmtliche Preise fallen, wenn die Verfasser der Preisschriften bereits gestorben sein sollten, deren Erben zu. Der dritte Preis kann auch gedruckten Schriften zuerkannt werden, deren Verfasser schon gestorben sind, und fällt alsdann den Erben derselben zu.

4. **Form der Preisschriften und ihrer Einsendung.** Bei den handschriftlichen Werken, welche sich um die beiden ersten

Preise bewerben, müssen alle äußeren Zeichen vermieden werden, an welchen die Verfasser erkannt werden können. Wird ein Verfasser durch eigene Schuld erkannt, so ist seine Schrift zur Preisbewerbung nicht mehr zulässig. Daher wird ein Jeder, der nicht gewiß sein kann, daß seine Handschrift den Preisrichtern unbekannt ist, wohlthun, sein Werk von fremder Hand abschreiben zu lassen. Jede Schrift ist mit einem Sinnspruche zu versehen, und es ist derselben ein versiegelter Zettel beizulegen, auf dessen Außenseite derselbe Sinnspruch sich findet, während inwendig Name, Stand und Wohnort des Verfassers angegeben sind.

Die handschriftlichen Werke, welche sich um den dritten Preis bewerben, können mit dem Namen des Verfassers versehen oder ohne denselben eingesandt werden.

Alle diese Schriften müssen im Laufe des neunten Jahres, vor dem 14. März 1895, dem Director zugesendet sein, welcher auf Verlangen an die Vermittler der Uebersendung Empfangsbescheinigungen auszustellen hat.

5. **Ueber Zulässigkeit zur Preisbewerbung.** Die Mitglieder der Königlichen Societät, welche nicht zum Preisgerichte gehören, dürfen sich wie jeder Andere um alle Preise bewerben. Dagegen leisten die Mitglieder des Preisgerichts auf jede Preisbewerbung Verzicht.

6. **Verkündigung der Preise.** An dem 14. März, mit welchem der neue Verwaltungszeitraum beginnt, werden in einer Sitzung der Societät die Berichte über die Preisarbeiten vorgetragen, die Zettel, welche zu den gekrönten Schriften gehören, eröffnet, und die Namen der Sieger verkündet, die übrigen Zettel aber verbrannt. Jene Berichte werden in den Nachrichten über die Königliche Societät, dem Beiblatte der Göttingenschen gelehrten Anzeigen, abgedruckt. Die Verfasser der gekrönten Schriften oder deren Erben werden noch besonders durch den Director von den ihnen zugefallenen Preisen benachrichtigt, und können dieselben bei dem letzteren gegen Quittung sogleich in Empfang nehmen.

7. **Zurückforderung der nicht gekrönten Schriften.** Die Verfasser der nicht gekrönten Schriften können dieselben unter Angabe ihres Sinnspruches und Einsendung des etwa erhaltenen Empfangsscheines innerhalb eines halben Jahres zurückfordern oder zurückfordern lassen. Sofern sich innerhalb dieses halben Jahres kein Anstand ergiebt, werden dieselben am 14. October von dem Director den zur Empfangnahme bezeichneten Personen portofrei zugesendet. Nach Ablauf dieser Frist ist das Recht zur Zurückforderung erloschen.

8. **Druck der Preisschriften.** Die handschriftlichen Werke, welche den Preis erhalten haben, gehen in das Eigenthum der Stiftung für diejenige Zeit über, in welcher dasselbe den Verfassern und deren Erben gesetzlich zustehen würde. Der Verwaltungsrath wird dieselben einem Verleger gegen einen Ehrensold überlassen oder, wenn sich ein solcher nicht findet, auf Kosten der Stiftung drucken lassen, und in diesem letzteren Falle den Vertrieb einer zuverlässigen und thätigen Buchhandlung übertragen. Die Aufsicht über Verlag und Verkauf führt der Director.

Der Ertrag der ersten Auflage, welche ausschließlich der Freiexemplare höchstens 1000 Exemplare stark sein darf, fällt dem verfügbaren Capitale zu, da der Verfasser den erhaltenen Preis als sein Honorar zu betrachten hat. Wenn indessen jener Ertrag ungewöhnlich groß ist, d. h. wenn derselbe die Druckkosten um das Doppelte übersteigt, so wird die Königliche Societät auf den Vortrag des Verwaltungsrathes erwägen, ob dem Verfasser nicht eine außerordentliche Vergeltung zuzubilligen sei.

Findet die Königliche Societät fernere Auflagen erforderlich, so wird sie den Verfasser oder, falls derselbe nicht mehr leben sollte, einen andern dazu geeigneten Gelehrten zur Bearbeitung derselben veranlassen. Der reine Ertrag der neuen Auflagen soll alsdann zu außerordentlichen Bewilligungen für den Verfasser, oder, falls derselbe verstorben ist, für dessen Erben, und den neuen Bearbeiter nach einem von der Königlichen Societät festzustellenden Verhältnisse bestimmt werden.

9. **Bemerkung auf dem Titel derselben.** Jede von der Stiftung gekrönte und herausgegebene Schrift wird auf dem Titel die Bemerkung haben:

> Von der Königlichen Societät der Wissenschaften in Göttingen mit einem Wedekindschen Preise gekrönt und herausgegeben.

10. **Freiexemplare.** Von den Preisschriften, welche die Stiftung herausgiebt, erhalten die Verfasser je zehn Freiexemplare.

Göttingen, den 14. März 1887.

Der Verwaltungsrath der Wedekindschen Preisstiftung.

Bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Januar 1887.

Nachträge.

Mittheilungen der deutschen Gesellsch. für Natur- u. Völkerkunde Ostasiens. Heft 35. Band IV. Seite 205—244.
Mémoires et documents de la société d'histoire et d'archéologie de Genève. Tome I. Cahier 4 et dernier.
Neues Lausitzer Magazin. Band 62. Heft. 2.
Ungarische Revue 1887. 7. Jahrg. Heft 1—2.
Annales de la faculté des lettres de Bordeaux. Deuxième série. N. 3. 1886.
Flora batava 275. 276. livraison.

Februar 1887.

Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen im J. 1885, herausgeg. v. K. Preuss. meteorologischen Institut.
Sitzungsberichte der k. b. Akademie der W. zu München.
a. mathematisch-physikalische Classe. Heft II. 1886.
b. philos. philolog. historische Classe. Heft III. 1886.
Die Erhaltung der Empfindungstheorie von Ernst Sasse.
a. Der zoologische Garten. Organ d. zoolog. Gesellsch. in Frankfurt a. M. Jahrg. II, III, IV.
b. Der zoologische Garten. Zeitschrift für Beobachtung, Pflege und Zucht der Thiere. Jahrg. XXVI. Heft 1—12. Jahrg. XXVII. Heft 1—12.
Meteorologische Zeitschrift 1887. Februar. Vierter Jahrg. Heft 2.
Leopoldina. Heft XXIII. N. 1—2. Jan. 1887.
Irmischia. Jahrg. VI. Nr. 5 u. 6, 7 u. 8.
Nature. Vol. 35. Nr. 901, 902. 903, 904.
Journal of the Royal microscopical society 1887. Part I. February.
Monthly notices of the Royal astronomical society. Vol. XLVII. Nr. 3. Januar 1887.
Journal and proceedings of the Royal society of N. S. Wales. Vol. XIX. 1885.
Bulletin de l'Académie Royale des sciences d. l. et d. b. a. de Belgique. Année 55. serie 3. tome 12. N. 12.
— 56. — 3. — 13. — 1.
Mémoires de la societé R. des sciences de Liège. Deuxième série. Tome XIII.
Annuaire de l'Académie R. des sc. de lettres et d. b. arts de Belgique 1887. année 53.
Publications de l'institut R. grand-ducal de Louxembourg. Tome XX.
Memorie della R. Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Serie IV. Tomo VI. fasc. 1. 2. 3. 4.
Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. XXII. Disp. 1, 2, 3. 1886—87.

Atti della R. Accademia dei Lincei (Roma) serie quarta.

a. Mem. della classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I. 1884 –85.

b. Mem. della classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I, 1884—85.

c. Rendiconti. Vol. II. fasc. 12. Vol. III. fasc. 1, 2.

Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Tomo XIX. Aprile 1886.

Bollettino delle pubblicazioni italiane 1887. Nr. 27. 28.

La Commedia di Dante Alighieri col commento inedito di Stefano Talice da Ricaldone, pubblicato per cura di Vincenzo Promis e di Carlo Negroni. 1887.

Annales du Musée Guimet. Tome neuvième. Les hipogées Royaux de Thebes. Prem. divis. Le tombeau de Seti I.

Revue de l'histoire des religions. Année septième. Tome XIII. Nr. 2, 3. Tome XIV. Nr. 1.

Histoire des herbiers par Dr. Saint-Lager.

Notice sur la vie et les travaux de Barré de Saint-Venant, par M. J. Bousinesq et M. Flamant.

Bulletin de la société mathematique de France. Tome XIV. Nr. 5 et dernier.

Recherches historiques sur les mots plantes males et plantes femelles par le Dr. Saint-Lager.

Mémoires de l'académie des sc. b. lettres et arts de Lyon. Classe des lettres. Vol. vingt-troisième.

Annales de la société d'agriculture de Lyon. Serie 5. Tome 6. 1883, tome 7. 1884, tome 8, 1884.

Annales de la société Linnéeune de Lyon. Année 1883 et 1884. Vol. 30, 31. b. 4 planches pour le vol. 29. 1882.

Cartulaire Lyonnais, compris jadis dans le Pagus Major Lugdunensis recueillis et publiés par M. C. Guigue. Tome Ier.

Académie des sciences et lettres de Montpellier.

a. Mémoires de la section des lettres. Tome VII. fasc. III. Années 1885 — 1886.

b. Mém. de la section de Médecine. Tome VI. fasc. I. Années 1885 – 86.

Mémoires de l'Académie imperiale des sciences de St. Petersbourg. VIIe série. Tome XXXIV. Nr. 7. 8. 9. 10. 11.

Annalen des physikalischen Central-Observatoriums in St. Petersburg. Jahrg. 1885. Theil 1 u. 2.

Mémoires de la société des naturalistes de la Nouvelle-Russie. T. XI. p. 2. Band VII der mathemat. Abtheilung. Odessa 1887.

Földtani Közlony Kötet XVI. 7—9 füzet. 10—12 füzet. 1886.

Mittheilungen aus dem Jahrb. der Kön. Ungarischen Geologischen Anstalt. Band VIII. Heft 4.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

16. März. № 5. 1887.

Universität.

Beneke'sche Preisstiftung.

Am 11. März 1887, dem Geburtstage des Begründers der Beneke'schen Preisstiftung, ward den Satzungen gemäß in öffentlicher Sitzung der philosophischen Fakultät das Ergebnis der Preisbewerbungen für das Jahr 1887 verkündet.

Die Aufgabe, welche im Jahr 1884 gestellt war, lautete wie folgt:

»*Seit Thomas Young (Lectures on Natural Philosophy, London 1807, Lecture VIII) wird den Körpern von vielen Physikern Energie zugeschrieben, und seit William Thomson (Philosophical Magazine and Journal of Science, IV Series, London 1855 p. 523) wird häufig das Princip der Erhaltung der Energie als ein für alle Körper gültiges ausgesprochen, worunter dasselbe Princip verstanden zu werden scheint, was schon früher von Helmholtz unter dem Namen des Princips der Erhaltung der Kraft ausgesprochen war.*

Es wird nun zunächst eine genaue historische Entwickelung der Bedeutung und des Gebrauchs des Wortes Energie in der Physik verlangt; sodann eine gründliche physikalische Untersuchung, ob verschiedene Arten der Energie zu unterscheiden und wie jede derselben zu definiren sei; endlich in welcher Weise das Princip der Erhaltung der Energie als allgemein gültiges Naturgesetz aufgestellt und bewiesen werden könne.«

Es sind rechtzeitig drei Arbeiten eingegangen, über welche das Urtheil der Fakultät folgendermaßen lautet:

I.

Die erste Abhandlung mit dem Motto:

'Αλλος γάρ τ' ἄλλοισιν ἀνὴρ ἐπιτέρπεται ἔργοις Hom. Odyss. 14, 228.

behandelt »das Princip der Erhaltung der Energie« den Forderungen der Aufgabe entsprechend in 3 Abschnitten, von welchen der erste mit der Ueberschrift »Historische Entwickelung« 112 halbe Folioseiten, der zweite »Formulirung und Beweis des Princips« 75, der dritte »verschiedene Arten der Energie« 139 solche Seiten umfaßt. Der Verfasser schreibt für Physiker von Fach und es ist zunächst ein praktisch physikalisches Bedürfnis, welchem er zu genügen sucht, indem er die mannigfachen Formen und Anwendungen, deren das Energiegesetz fähig ist, unter einem gemeinsamen Gesichtspunkt vereinigt.

Im ersten Abschnitt verbindet der Verfasser die Entwickelung des Energiebegriffes mit einer ausführlichen Geschichte des Aequivalenzsatzes der mechanischen Wärmetheorie, welche von seinem gesunden und selbständigen Urtheil, von seiner eingehenden Bekanntschaft mit den Quellen das vortheilhafteste Zeugnis ablegt. Mit großer Klarheit und genauester Sachkenntnis werden die epochemachenden Leistungen dargestellt, welche das Princip vorbereitet und begründet haben; die Continuität der Entwickelung wird durch eine auf feinem wissenschaftlichen Gefühle ruhende Werthschätzung der Zwischenglieder gewahrt. Daß auch der allmäligen Ausbreitung des Princips, seiner Anwendung auf die verschiedenen Gebiete der Physik eine sehr ausführliche Darstellung gewidmet worden ist, war für die Arbeit nicht eben günstig. Es ist dem Verfasser in diesem Theile derselben nicht immer gelungen, den Eindruck ermüdender Wiederholung zu vermeiden, und die Beschränkung, welche er der Freiheit seiner Darstellung durch das Voranstellen des rein historischen Gesichtspunktes auferlegt hat, wird hier besonders fühlbar. Für die Oekonomie des Ganzen würde es besser gewesen sein, einen Theil des hier verarbeiteten Stoffes dem zweiten oder dritten Theile zu überweisen, während auf der anderen Seite noch manches der Berücksichtigung sich dargeboten hätte, wenn der Verfasser sich weniger streng an das Jahr 1860 als Grenze der historischen Entwickelung gebunden haben würde. Der einseitig physikalische Standpunkt, welchen der Verfasser mit vollem Bewußtsein einnimmt, bringt es mit sich, daß er den Antheil, welchen die Technik an der Entwickelung des Energiebegriffes genommen hat, nur flüchtig gestreift, den der philosophischen Ideenkreise gar nicht berücksichtigt hat. Größere

Fülle der Darstellung und eingehendere Würdigung dieser Einflüsse würde der Fakultät erwünscht gewesen sein.

Mit großem Interesse hat die Fakultät von dem zweiten Abschnitte der Abhandlung Kenntnis genommen; hier kommt die methodische Denkart, die gründliche mathematisch-physikalische Bildung des Verfassers, die Besonnenheit seines Urtheils zur vollen Geltung. Der Liebe, mit welcher sich der Verfasser in den Gegenstand seiner Untersuchung vertieft hat, entspricht die Sorgfalt, mit welcher er nach allen Richtungen hin denselben aufzuklären weiß. Mit lebhafter Befriedigung konstatirt die Fakultät, daß abgesehen von einigen sachlich unbedeutenden Inkorrektheiten die Frage nach der Formulirung und dem Beweise des Energieprincips in diesem Theile der Abhandlung eine schöne und vollständige Lösung gefunden hat.

Nicht ebenso unbeschränkt ist die Anerkennung, welcher die Fakultät auch dem letzten Theile der Arbeit gegenüber gerne Ausdruck verleiht. Sie bedauert es, wenn die Beschränkung der Zeit den Verfasser verhindert hat, seiner Darstellung der verschiedenen Arten der Energie die wünschenswerthe Vollständigkeit und Gleichmäßigkeit zu ertheilen. So anziehend die Betrachtungen des Verfassers sind, so mannigfache Belehrung man daraus zu schöpfen vermag so vermißt die Fakultät doch eine allgemeinere Untersuchung der Frage, wie viele Energiearten zu unterscheiden und wie jede derselben zu definiren sei. Statt dessen hat sich der Verfasser darauf beschränkt, im Einzelnen nachzuweisen, wie in den verschiedenen Gebieten der Physik das Energieprincip als ein sicheres und einheitliches Fundament der Darstellung zu benützen ist. Die gewandte Behandlung, welche er von diesem Gesichtspunkte aus der Mechanik angedeihen läßt, würde größere Bedeutung gewonnen haben, wenn der Verfasser die Tragweite des von ihm eingeführten Princips der Superposition verschiedener Energieen einer eingehenderen Kritik unterworfen hätte. Auch würde nach der Auffassung der Fakultät eine etwas eingehendere Betrachtung der Reflexion und Brechung des Lichtes den Rahmen der Aufgabe keineswegs überschritten haben. Ebenso wie die Behandlung der Optik, erscheint auch die der thermischen und chemischen Energie etwas knapp, insbesondere hat der Verfasser eine kritische Besprechung derjenigen Experimentaluntersuchungen unterlassen, auf welchen unsere Kenntnis von dem numerischen Werthe des mechanischen Wärmeäquivalentes beruht. Die Bearbeitung der elektrischen und magnetischen Energie bekundet in hinreichendem Maaße die umfassenden und gründlichen Kenntnisse, welche der Verfasser auf diesem Gebiete besitzt, dennoch lassen seine Betrachtungen die Klarheit, Consequenz und Stetigkeit, welche das Studium seiner

Schrift zu einer so angenehmen Aufgabe gemacht haben, in einzelnen Fällen vermissen. Die Fakultät muß endlich den Bemerkungen, durch welche sich der Verfasser mit dem Weber'schen Gesetz abzufinden sucht, ihre Zustimmung versagen; sie würde eine eingehende Untersuchung des Weber'schen Ideenkreises für nothwendig erachtet haben.

Es wird dem Verfasser nicht schwer fallen, seine Abhandlung in den genannten Punkten vor ihrer Veröffentlichung zu ergänzen. In dieser Hoffnung und in voller Anerkennung des Geleisteten ertheilt die Fakultät dieser Abhandlung den zweiten Preis.

II.

Die zweite Abhandlung, betitelt

»die Energieideen in der neueren Physik historisch-kritisch dargelegt«

trägt an ihrer Spitze den Spruch

»das wichtigste Resultat der geschichtlichen Betrachtung ist die akademische Ruhe, mit welcher unsere Hypothesen und Theorien ohne Feindschaft und ohne Glauben als das betrachtet werden, was sie sind: als Stufen in jener unendlichen Annäherung an die Wahrheit, welche die Bestimmung unserer intellektuellen Entwickelung zu sein scheint« Lange, Geschichte des Materialismus.

Der Verfasser hat die 125 Folioseiten seines Textes der allgemeinen Darlegung gewidmet, während die besonderen Belege und die genauere Ausführung einzelner Punkte in einer Reihe von Anmerkungen auf weiteren 42 Seiten enthalten sind. Der Verfasser besitzt ganz die Weite des Blickes, das vielseitig angeregte Interesse, die schriftstellerische Gewandtheit und den künstlerischen Sinn, ohne welche eine nach der sachlichen wie nach der formalen Seite befriedigende Lösung der Aufgabe nicht gedacht werden kann. Den hieraus entspringenden Vorzügen, welche der Arbeit vielfach einen bestechenden Reiz verleihen, entspricht aber nicht die Sorgfalt der Durchführung im Einzelnen. Der Verfasser trägt eine gewisse Scheu von der Höhe der allgemeinen Betrachtung zu der Untersuchung specieller Fragen und konkreter Probleme herabzusteigen und er läßt den Leser nicht selten im Zweifel über die Tragweite und Bedeutung der von ihm aufgestellten allgemeinen Gesichtspunkte.

Als einen glücklichen Griff betrachtet es die Fakultät, daß der Verfasser in einem ersten Theile seiner Arbeit den Quellen der Energieideen in Mechanik, Physik, Philosophie und Technik eine gesonderte Darstellung widmet. Die feinen und treffenden Bemerkungen, durch welche der Antheil dieser Gebiete an der Entwicke-

lung des Energieprincips in ein klares Licht gesetzt wird, haben die Zustimmung der Fakultät gefunden; auch die allgemeinen Bemerkungen, welche den Gesammtcharakter jener Disciplinen und der zeitweilig in ihnen herrschenden Tendenzen betreffen, hat sie als eine schätzenswerthe Vervollständigung des Bildes begrüßt. Dagegen empfindet sie es als einen Mangel, daß der Verfasser das Material für seine Darstellung hier wie in den späteren Theilen der Arbeit vielfach aus sekundären Quellen geschöpft hat; dadurch ist zu erklären, daß die angeführten Thatsachen nicht immer in dem richtigen historischen Lichte erscheinen, daß die sachlichen Kenntnisse des Verfassers in einigen Punkten als lückenhaft sich erweisen.

Die speciellere Geschichte des Energieprincips wird in dem zweiten Theile der Arbeit vorgetragen. Das Streben des Verfassers nach wirkungsvoller Darstellung und übersichtlicher Gliederung des Stoffes macht sich auch hier in lobenswerther Weise geltend. Mit großer Anschaulichkeit wird die Begründung des Princips durch R. Mayer, Joule und Helmholtz geschildert, seine allmälige Umformung durch die Arbeiten von Thomson und Clausius wird mit feinem Verständnis verfolgt; auch die Verdienste, welche sich Thomson und Rankine durch Einführung einer bestimmten Terminologie erworben haben, finden eine berechtigte Anerkennung. In allen wesentlichen Punkten kann die Fakultät dem Urtheile des Verfassers, welches auch sonst weniger beachtete Punkte in ihrer Bedeutung und Eigenart zu erfassen weiß, sich anschließen. Nur hätte sie eine eingehendere Begründung desselben und größere Fülle und Ausführlichkeit der Darstellung insbesondere in dem letzten Abschnitte gewünscht, in welchem das Ergebnis der Untersuchung zusammengefaßt wird.

Der letzte Theil der Abhandlung „die Energetik“, welcher in einem an sich wohl begründeten Gefühle das Entropiegesetz als eine nothwendige Ergänzung des Energieprincips in den Kreis der Betrachtung hineinzieht, hat die Erwartungen der Fakultät im Ganzen nicht befriedigt. Der Verfasser hat darauf verzichtet, das ganze Gebiet der Physik einer gründlichen Durchmusterung zu unterziehen, um so die verschiedenen Arten der Energie zu bestimmen und die Tragweite des Energieprincips selbst durch seine Anwendung auf die verschiedenartigen physikalischen Erscheinungen zu prüfen. An Stelle einer solchen gründlichen mathematisch-physikalischen Untersuchung bietet der Verfasser eine Reihe von allgemeinen Betrachtungen, welche bei dem Mangel einer exakten Begründung und Durcharbeitung zum Theil mehr den Charakter geistreicher Einfälle als wohl durchdachter Lehrsätze tragen. Der Darstellung fehlt es in wesentlichen Punkten an Klarheit und Consequenz und eine gewisse Ueber-

stürzung macht sich gerade da bemerklich, wo der Verfasser neue Begriffe in die Wissenschaft einzuführen sucht. Die Fakultät bedauert es, daß der Verfasser versäumt hat, durch eingehende Untersuchung mechanischer und elektrischer Probleme die Bedeutung und Tragweite seiner Sätze festzustellen und so ansprechend sie die Gedanken über eine allgemeinere Gültigkeit des Entropiegesetzes findet, kann sie denselben ihre Zustimmung doch nur so weit ertheilen, als sie mit den gelegentlichen Aeußerungen von Mach übereinstimmen. Die Ausdehnung der Betrachtung auf die Nationalökonomie läßt zwar die mannigfache Belesenheit des Verfassers auch auf diesem Gebiete erkennen, sie vermag aber nicht den Gesammteindruck der letzten Abschnitte zu ändern.

Bei aller Anerkennung, welche sie den Vorzügen der Arbeit zollt, bedauert die Fakultät derselben hiernach einen Preis nicht ertheilen zu können.

III.

Die dritte Abhandlung mit dem Motto

Natura nihil agit frustra

hat auf 498 Quartseiten ein ziemlich umfangreiches Material zusammengetragen. Die Gliederung des Stoffes ist aus einem der Abhandlung vorangestellten Inhaltsverzeichniß zu ersehen; darnach widmet der Verfasser 77 Seiten der »geschichtlichen Darstellung«, auf weiteren 108 Seiten behandelt er die »Energieformen«; die »empirische Bestätigung« wird auf 155, die Deduktion auf 137 Seiten vorgetragen. Der Gesichtskreis des Verfassers ist ein einseitig beschränkter, durchaus abgewandt von den Fragen der Technik, es fehlt ihm an der Beherrschung seines Materiales, er hat es nicht verstanden, den historischen Bericht übersichtlich zu ordnen, seine Ausführungen leiden an zum Theil nicht unerheblichen Ungenauigkeiten und Verstößen, insbesondere die Bemerkungen über Energiebestimmungen zeigen, daß bei allem aufgewandten Fleiße die Sachkenntnis des Verfassers doch nicht tief genug geht, um ihn zu einer erfolgreichen Lösung der gestellten Aufgabe zu befähigen. Die Fakultät sieht sich daher genöthigt ihm seine Abhandlung zur Disposition zurückzustellen.

Die Eröffnung des mit dem Motto der ersten Abhandlung

Ἄλλος γάρ τ' ἄλλοισιν ἀνὴρ ἐπιτέρπεται ἔργοις

versehenen Briefes ergab als Verfasser Herrn

Dr. Max Planck,

ausserord. Professor d. theoret. Physik a. d. Universität Kiel.

Für das Jahr 1890 stellt die Fakultät folgende Aufgabe:

Zenonis, Cleanthis, Chrysippi stoicorum principum et discipulorum quae supersunt reliquiae ad res ethicas politicas divinas spectantes colligantur et pertractentur ita, ut libri cujusque quantum quidem fieri possit et argumentum illustretur et vestigia apud posteriores scriptores latentia indagentur.

Bewerbungsschriften sind in Lateinischer Sprache mit einem versiegelten Briefe, welcher den Namen des Verfassers enthält, bis zum

31. August 1889

an uns einzusenden. Das Titelblatt der Schrift und die Außenseite des Briefs müssen mit einem übereinstimmenden Spruche versehen sein und es muß ersteres außerdem die Bezeichnung der Adresse enthalten, an welche die Schrift für den Fall, daß sie nicht preiswürdig befunden wird, zurückzusenden ist.

Der erste Preis beträgt 1700 Mark, der zweite 680 Mark.

Die Zuerkennung der Preise erfolgt am 11. März 1890, dem Geburtstage des Stifters. Die gekrönten Arbeiten bleiben unbeschränktes Eigenthum der Verfasser. — —

Die Preisaufgaben, für welche die Bewerbungsschriften bis zum 31. August 1887 und bis zum 31. August 1888 einzusenden sind, finden sich bezw. im Jahrg. 1885 Nr. 5 und Jahrg. 1886 Nr. 8 dieser Nachrichten.

Göttingen, den 12. März 1887.

Die philosophische Facultät
Hermann Wagner,
z. Z. Dekan.

Bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Februar 1887.

Erster Nachtrag zum Katalog der Bibliothek und allgemeinen Kartensammlung der Kgl. Ung. Geol. Anst.
Det Kongelige norske Videnskabers Selskabs Skrifter 1884. Throndhjem.

Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Kristiania. 11 bind. 1 og 2 hefte. 3die og 4de hefte.

Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. 30 bind. 2 hefte. 3die — 4de hefte.

Lakis kratere og lavastrømme af Amund Helland.

Joannis Agricolae Islebiensis Apophthegmata af Dr. Ludovicus Daae. Festschrift für Heidelberg.

Norges Vaextrige af Dr. F. C. Schübeler. Band I.

De Vestiging van het Nederlandsche Gezag over de Banda-Eilanden. 1599 — 1621. Door V. D. Chijs.

Nederlandsch-Indisch Plakaatboch. 1602 — 1811. Door V. D. Chijs. Deel 3. 1678 — 1709.

Realia. Register op de Generale resolutiën van het kasteel. Batavia 1632 — 1805. Deel 3.

Bulletin of the American Geographical society 1886. Nr. 2.

Bulletin of the California Academy of sciences. Vol. 2. N. 5. Sept. 1886.

Contributions to Meteorology by Elias Loomis. Chapter II.

Proceedings of the Academy of natural Sciences of Philadelphia. Part. II. April — Sept. 1886.

Johns Hopkins University studies fifth series III. The city Government of Boston by J. M. Bugbee.

Eleventh annual report of the president of the Johns Hopkins University. Baltimore 1886.

American Journal of Mathematics. Vol. 4. N. 2. Baltimore.

Johns Hopkins University circulars. Vol. VI. N. 55.

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Diciembre de 1886. Entrega VI. Tomo XXII.

Nachträge.

Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Gesellschaft in Würzburg Jahrg. 1886.

Annales de l'école polytechnique de Delft. Tome II. 1886. Livraison 3 et 4.

Proceedings of the Royal Society of London. Vol. 41. Nr. 250.

Notulen van de algemeene en Bestuursvirgaderingen van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Deel XXIV. 1886. Afl. 2. Batavia 1886.

Tijdschrift van Indische Taal-, Land- en Volkenkunde. Deel XXXI. Afl. 2/3. 1886.

Inhalt von Nr. 5.

Beneke'sche Preisstiftung. — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

20. April. № 6. 1887.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 5. Februar.

1. von Könen kündigt eine Abhandlung »über Krinoiden des Muschelkalks« an, die mit 2 Tafeln in den Abhandlungen erscheint.
2. Meyer kündigt eine Abhandlung von ihm selbst und Alfred Warrington »über Zersetzung der Acetoxime durch Chloracetyl« an.
3. Voigt kündigt einen Aufsatz von Drude »über einen Satz der Determinantentheorie« an.
4. de Lagarde kündigt »Ausgewählte Kapitel der vergleichenden Grammatik der semitischen Sprachen, I. die einsylbigen Hauptwörter einiger semitischen Sprachen« an. (Erscheint in den Abhandlungen).
5. Schwarz zeigt ein von Herrn Dr. von Lichtenfels in Wien mit großer Sorgfalt ausgeführtes Gypsmodell einer speciellen Minimalfläche vor, welches Herr von Lichtenfels der hiesigen K. Sammlung mathematischer Instrumente und Modelle als Geschenk überwiesen hat.
6. Herr Professor Felix Klein überreicht eine Abhandlung des Herrn Professor Hurwitz in Königsberg »über algebraische Gebilde mit Transformationen in sich«. Die Gesellschaft beschließt die Aufnahme derselben in die Nachrichten.

Ueber diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen.

Von

A. Hurwitz.

In den nachfolgenden Zeilen beschäftige ich mich namentlich mit der Aufgabe: alle irreducibeln algebraischen Gleichungen

$$f(s, z) = 0$$

zu bestimmen, welche durch eine rationale eindeutig umkehrbare Transformation

$$\left.\begin{aligned} s' &= \varphi(s, z) \\ z' &= \psi(s, z) \end{aligned}\right\}$$

in sich übergeführt werden können, oder — was offenbar auf dasselbe hinauskommt — alle diejenigen Riemann'schen Flächen (algebraischen Gebilde) anzugeben, auf welchen eine ein-eindeutige algebraische Correspondenz (s, z; s', z') existirt. Der Fall, in welchem das Geschlecht p des Gebildes gleich Null oder Eins ist, bildet bei dieser Untersuchung einen leicht für sich zu behandelnden, übrigens seit langem erledigten Ausnahmefall. Ich setze deshalb im Folgenden, wenn ich nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerke, stets voraus, daß das Geschlecht der zu betrachtenden Gebilde größer ist als Eins.

Die hauptsächlichsten Resultate meiner Untersuchung fasse ich in folgenden Sätzen zusammen:

I. Jede eindeutige Transformation eines algebraischen Gebildes in sich ist periodisch; d. h. bildet man von irgend einer Stelle P ausgehend die Reihe $P, P', P'', \ldots$, in welcher jede Stelle der unmittelbar vorhergehenden entspricht, so schließt sich diese Reihe, indem stets etwa die $(n+1)^{\text{te}}$ Stelle $P^{(n)}$ mit der Ausgangsstelle P identisch ist.

II. Die Periode n einer eindeutigen Transformation eines algebraischen Gebildes in sich kann eine gewisse von dem Geschlecht p abhängende Grenze nicht überschreiten. Der größte Werth, welchen n annehmen kann, ist nämlich gleich $10(p-1)$.

III. Jedes algebraische Gebilde, welches eine eindeutige Transformation in sich von der Periode n besitzt, läßt sich durch eine Gleichung der Gestalt

$$F(s^n, z) = 0$$

definiren und zwar so, daß zugleich die eindeutige Transformation durch die Formeln

$$\left.\begin{aligned} s' &= e^{\frac{2i\pi}{n}} s \\ z' &= z \end{aligned}\right\}$$

angegeben wird.

Der letzte Satz gilt auch für die Fälle $p = 0$ und $p = 1$.

Die soeben formulirten Sätze beweise ich in der Reihenfolge III, II, I.

1.

Besitzt eine Riemann'sche Fläche, deren Geschlecht einen beliebigen Werth hat, eine eindeutige Transformation in sich von der Periode n, so lassen sich ihre Stellen in Gruppen von je n, wie

$$P, P', \dots P^{(n-1)}$$

anordnen von der Beschaffenheit, daß jede Stelle der Gruppe der vorhergehenden und die erste der letzten entspricht. Man bemerke nun vor Allem, daß jede Function der Stelle $P^{(i)}$ auch als Function der Stelle P aufgefaßt werden kann. Seien nun S und Z zwei eindeutige algebraische Functionen des Ortes auf unserer Fläche,

$$\begin{array}{l} S, S', \dots S^{(n-1)} \\ Z, Z', \dots Z^{(n-1)} \end{array}$$

die Werthe, welche diese Functionen an den Stellen

$$P, P', \dots P^{(n-1)}$$

resp. annehmen. Ferner werde zur Abkürzung

$$\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}}$$

gesetzt. Die Größen

$$\left.\begin{array}{l} s = S + \varepsilon^{-1} S' + \varepsilon^{-2} S'' + \dots + \varepsilon^{-(n-1)} S^{(n-1)} \\ z = Z + \quad Z' + \quad Z'' + \dots + \qquad Z^{(n-1)} \end{array}\right\}$$

stellen dann bestimmte algebraische Functionen der Stelle P vor, welche offenbar die in den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} s^{(i)} = \varepsilon^i s \\ z^{(i)} = z \end{array}\right\}$$

ausgesprochene Eigenschaft besitzen. Dabei bezeichnen $s^{(i)}, z^{(i)}$ die Werthe, welche s, z an der Stelle $P^{(i)}$ annehmen.

Wenn daher s_0 ein zu $z = z_0$ gehöriger Werth von s ist, so entsprechen demselben Werthe von z auch die Werthe εs_0, $\varepsilon^2 s_0 \dots$ $\varepsilon^{(n-1)} s_0$. Die zwischen s und z bestehende irreducible Gleichung hat also nothwendig die Gestalt

$$F(s^n, z) = 0,$$

d. h. sie enthält die Variable s nur in Potenzen mit durch n theilbaren Exponenten.

Hiermit ist der erforderliche Beweis erbracht. Es ist nur noch ein Punkt zu erledigen: es muß nämlich gezeigt werden, daß bei passender Wahl der vollständig willkürlich gelassenen Functionen S, Z das Werthepaar s, z die einzelne Stelle unserer Riemann'schen

Fläche im Allgemeinen eindeutig bestimmt und also die Gleichung $F = 0$ zur Definition des Gebildes hinreicht. Nun wähle man zunächst Z so, daß die Unendlichkeitsstellen dieser Function sich nicht in Gruppen von je n zusammengehörigen Punkten anordnen. Dadurch wird erreicht, daß z sich nicht auf eine Constante reduciren kann. Seien sodann

$$a, a' \dots a^{(n-1)};\ b, b', \dots b^{(n-1)};\ \dots\ l, l', \dots l^{(n-1)}$$

die Stellengruppen, an welchen z einen bestimmten Werth z_0 annimmt. Wir bestimmen dann S so, daß die zu $z = z_0$ gehörigen Werthe von s sämmtlich von einander verschieden ausfallen, was auf die mannigfachste Weise dadurch herbeigeführt werden kann, daß wir S passend gewählte Werthe an den Stellen $a, a', \dots, b, b', \dots l, l', \dots$ aufzwingen. Bei so gewählten Z, S wird aber sicherlich das Werthepaar (s, z) zur Festlegung der einzelnen Stelle der Riemann'schen Fläche ausreichen, weil dieses für die Stellen, an welchen $z = z_0$ ist, zutrifft.

Die vorstehenden Betrachtungen geben zugleich den Weg zur Herstellung der Gleichung $F(s^n, z) = 0$, wenn die Riemann'sche Fläche und ihre Transformation in sich in irgend welcher anderen Form gegeben vorliegt.

2.

Nach dem soeben Bewiesenen läßt sich jede Riemann'sche Fläche, welche eine eindeutige Transformation in sich von der Periode n besitzt, durch eine Gleichung

$$F(s^n, z) = 0 \tag{1}$$

definiren. Es sei nun R_1 die Riemann'sche Fläche, welche zu der Gleichung

$$F(\sigma, \zeta) = 0 \tag{2}$$

gehört, so ist dieselbe auf die ursprüngliche Fläche, welche mit R bezeichnet werde, 1-n deutig bezogen, wenn der Stelle s, z von R die Stelle

$$\sigma = s^n,\ \zeta = z \tag{3}$$

von R_1 zugeordnet wird. Die Beziehung zwischen beiden Flächen ist offenbar der Art, daß einer Stelle von R_1 die n Stellen einer Gruppe $P, P', \dots P^{(n-1)}$ auf R entsprechen.

Man beachte nun die Stellen auf R_1, an welchen σ Null oder unendlich wird; die zugehörigen Ordnungszahlen seien

$$\nu_1,\ \nu_2,\ \dots\ \nu_k,$$

zwischen denen bekanntermaßen die Relation

$$\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_k = 0 \tag{4}$$

besteht. Wenn nun

$$\frac{\nu_1}{n} = \frac{\mu_1}{n_1}, \quad \frac{\nu_2}{n} = \frac{\mu_2}{n_2}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{\nu_k}{n} = \frac{\mu_k}{n_k} \tag{5}$$

gesetzt wird, wo $\frac{\mu_i}{n_i}$ den in reducirter Form und mit positivem Nenner geschriebenen Bruch $\frac{\nu_i}{n}$ bezeichnet, so findet die Relation statt:

$$2p-2 = (2p_1-2)n + \frac{n}{n_1}(n_1-1) + \frac{n}{n_2}(n_2-1) + \ldots + \frac{n}{n_k}(n_k-1), \tag{6}$$

neben welche ich sogleich die aus (4) folgende:

$$0 = \frac{\mu_1}{n_1} + \frac{\mu_2}{n_2} + \ldots + \frac{\mu_k}{n_k} \tag{7}$$

stelle. Der Beweis der Relation (6)[1]), in welcher p das Geschlecht von R, p_1 das Geschlecht von R_1 bedeutet, ergiebt sich ohne Schwierigkeit, wenn man die über der z-Ebene construirte Fläche R mit der über der ζ-Ebene construirten Fläche R_1 vergleicht. Es sei nun das Geschlecht p eine gegebene Zahl größer als Eins; dann ergiebt die folgende Discussion der Relationen (6), (7), daß n eine obere von p abhängende Grenze besitzt: Wenn $p_1 \geqq 2$ ist, so folgt unmittelbar aus (6), daß $2p-2 \geqq 2n$ und also

$$n \leqq p-1 \tag{8}$$

ist. Wenn zweitens $p_1 = 1$, so können die Zahlen $n_1, \ldots. n_k$ nicht sämmtlich gleich 1 sein, weil sonst $p = 1$ folgen würde. Sei etwa $n_1 \geqq 2$, so muß zufolge (7) nothwendig noch eine weitere der Zahlen n_i, etwa $n_2 \geqq 2$ sein. Daher ergiebt sich nun

$$2p-2 \geqq \frac{n}{n_1}(n_1-1) + \frac{n}{n_2}(n_2-1) \geqq n$$

und also

$$n \lesseqgtr 2p-2. \tag{9}$$

---

1) Dieselbe steht im Einklang mit der von Herrn Zeuthen (Mathematische Annalen, Bd. 3, pag. 152) aufgestellten Beziehung zwischen den Geschlechtszahlen zweier aufeinander bezogenen algebraischen Curven. Man beachte, daß einer Null- oder Unendlichkeitsstelle von σ mit der zugehörigen Zahl n_k eine Punktgruppe auf R entspricht, deren Punkte zu je $\frac{n}{n_k}$ zusammengefallen sind.

Wenn endlich $p_1 = 0$ ist, so ergiebt sich aus (6) zunächst:

$$\frac{2p-2}{n} = r-2-\frac{1}{n_1}-\frac{1}{n_2}-\dots-\frac{1}{n_r}, \tag{10}$$

falls wir mit $n_1, n_2 \dots n_r$ diejenigen der Zahlen n_i bezeichnen, welche grösser als 1 sind. Da nun $\frac{2p-2}{n}$ eine positive Größe ist, so muß r mindestens gleich 3 sein. Für $r \geqq 6$ ist nun, weil $\frac{1}{n_i} \leqq \frac{1}{2}$,

$$\frac{2p-2}{n} \geqq r-2-\frac{r}{2} \geqq 1.$$

Für $r = 5$ können wegen (7) nicht sämmtliche Zahlen n_i den Werth 2 annehmen. Dagegen sind zulässig die Combinationen:

$$(n_1, n_2, \dots n_5) = (2, 2, 3, 3, 3) \text{ und } (2, 2, 2, 3, 6),$$

welche $\frac{2p-2}{n} = 1$ ergeben. Alle anderen möglichen Werthesysteme $n_1, \dots n_5$ machen die rechte Seite von (10) größer als 1. Es ist also für $r \geqq 5$ stets

$$n \leqq 2p-2. \tag{11}$$

Für $r = 4$ bilden die Zahlen $(n_1, \dots n_4) = (2, 2, 3, 6)$ ein zulässiges System, welches $\frac{2p-2}{n} = \frac{1}{2}$ ergiebt. Bei jeder anderen möglichen Wahl der Zahlen $n_1, \dots n_4$ fällt die rechte Seite von (10) größer als $\frac{1}{2}$ aus; also ist $\frac{2p-2}{n} \geqq \frac{1}{2}$ oder

$$n \leqq 4p-4. \tag{12}$$

Für $r = 3$ endlich kann $(n_1, n_2, n_3) = (2, 5, 10)$ gesetzt werden und es wird dann $\frac{2p-2}{n} = \frac{1}{5}$, während bei jeder anderen zulässigen Wahl der Zahlen n_1, n_2, n_3 die rechte Seite von (10) größer als $\frac{1}{5}$ wird. Also ist jetzt

$$n \leqq 10p-10. \tag{13}$$

Die Ungleichungen 8, 9, 11, 12 und 13 zeigen, daß die Periode n einer eindeutigen Transformation der Fläche R in sich die Zahl $10p-10$ nicht überschreiten kann. Zugleich ergiebt sich, daß das Geschlecht p_1 der Fläche R_1 gleich 0 oder 1 ist, wenn n die Zahl $p-1$ überschreitet und daß $p_1 = 0$ sein muß, wenn n größer wird als $2p-2$.

Ist das Geschlecht $p_1 = 0$, so lassen sich s^n und z als rationale

Functionen eines Parameters λ darstellen, welcher so gewählt werden kann, daß sein Werth die einzelne Stelle der Fläche R_1 festlegt. Da bei dieser Annahme das Werthepaar (s, λ) die einzelne Stelle der Fläche R eindeutig bestimmt, so darf $z = \lambda$ angenommen werden, so daß die Fläche R durch eine Gleichung der Gestalt

$$s = \sqrt[n]{(z-a_1)^{\nu_1}(z-a_2)^{\nu_2}\dots(z-a_r)^{\nu_r}}$$

definirt werden kann. Hier können etwa vorhandene n-fache Factoren unter dem Wurzelzeichen einfach fortgelassen und also $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_r$ als positive Zahlen $< n$ vorausgesetzt werden. Ueberdies können durch lineare Transformation von z drei der Größen $a_1, a_2, \dots a_r$ irgend vorgeschriebene Werthe, etwa die Werthe $0, 1, \infty$ erhalten.

Diese Bemerkungen in Verbindung mit der obigen Discussion der Gleichung (6) ergeben folgende Sätze:

»Besitzt eine Riemann'sche Fläche vom Geschlechte p eine eindeutige Transformation in sich, deren Periode größer ist als $2p-2$, so läßt sich die Fläche durch die Gleichung

$$s = \sqrt[n]{z^a(z-1)^b(z-k)^c}$$

definiren; und überschreitet die Periode den Werth $4p-4$, so kann die Fläche durch die Gleichung

$$s = \sqrt[n]{z^a(z-1)^b}$$

definirt werden. Dabei bedeuten a, b, c positive Zahlen, welche kleiner sind als n.«

Die Existenz einer Transformation von einer $4p-4$ übersteigenden Periode hat hiernach zur Folge, daß sämmtliche $3p-3$ Moduln der Fläche numerische Werthe haben, und bei einer $2p-2$ übersteigenden Periode haben sich alle Moduln der Fläche bis auf einen (k) auf numerische Werthe reducirt.

3.

Zum Beweise des Satzes, daß eine eindeutige Transformation einer Riemann'schen Fläche in sich nothwendig periodisch ist, betrachte ich irgend ein System unabhängiger Integrale erster Gattung der Fläche. Es seien $u_1, u_2, \dots u_p$ die Werthe welche die Integrale an der Stelle P und $u'_1, u'_2, \dots u'_p$ die Werthe, welche sie an der correspondirenden Stelle P' besitzen. Die letzteren Werthe bilden, aufgefaßt als Functionen der Stelle P offenbar wieder ein vollständiges System unabhängiger Integrale, was p Gleichungen der Gestalt

(1) $du'_k = \pi_{k1} du_1 + \pi_{k2} du_2 + \ldots + \pi_{kp} du_p \quad (k = 1, 2, \ldots p)$

zur Folge hat, wo die Größen π_{kl} von den Stellen P, P' unabhängig sind[1]. Indem man nun an Stelle der u geeignete lineare Verbindungen dieser Größen einführt, kann man nach einem bekannten Satze[2] erreichen, daß die Gleichungen (1) folgende Gestalt annehmen:

$$(2) \qquad \begin{cases} du'_1 = \varepsilon_1 du_1, \\ du'_2 = \varepsilon_2 du_2 + \eta_{12} du_1, \\ du'_3 = \varepsilon_3 du_3 + \eta_{13} du_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ du'_p = \varepsilon_p du_p + \eta_{1p} du_{p-1}. \end{cases}$$

Dabei darf $\eta_{12} = 0$ vorausgesetzt werden, wenn ε_1 von ε_2 verschieden ist. Ich betrachte nun die beiden Functionen

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{du_2}{du_1} = z, \\ \dfrac{du_1}{dz} = s, \end{cases}$$

welche eindeutige algebraische Functionen des Ortes P sind. Bezeichnen z', s' die Werthe dieser Functionen an der Stelle P', so ist

$$(4) \qquad \begin{cases} z' = \dfrac{du'_2}{du'_1} = az + b, \\ s' = \dfrac{du'_1}{dz'} = cs, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung

$$(5) \qquad a = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \; b = \frac{\eta_{12}}{\varepsilon_1}, \; c = \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2}$$

gesetzt ist. Die irreducible Gleichung zwischen s und z

$$(6) \qquad f(s, z) = 0$$

hat nun folgende Eigenschaften:

---

1) Die Gleichungen (1) sind als specieller Fall in den Relationen enthalten, welche ich für irgend eine Correspondenz auf pag. 12 meiner Note: Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip (Berichte der K. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physische Klasse, Sitzung am 11. Januar 1886) aufgestellt habe. Diese neuerdings in den Mathematischen Annalen, Bd. 28, wieder abgedruckte Note werde ich in der Folge mit C. citiren.

2) Siehe Hamburger, Crelle's Journal Bd. 76, pag. 113.

Erstens ist ihr Geschlecht mindestens gleich 1. Denn

$$\int s\,dz = u_1$$

ist eine überall endliche Function. Zweitens geht sie in sich über durch die Transformation (4); es ist also identisch

$$f(cs,\ az + b) = \text{const.}\ f(s, z). \tag{7}$$

Hieraus läßt sich nun folgern, daß $b = 0$ und daß a und c Einheitswurzeln sein müssen. Sei nämlich

$$f(s, z) = \Sigma_i\, s^i\, \varphi_i(z),$$

so folgt aus (7), daß

$$\varphi_i(az + b) = \text{const.}\ \varphi_i(z) \tag{8}$$

sein muß. Ist nun b nicht gleich Null, so ist $a = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 1$ und wegen (8) zieht jede Wurzel z_0 der Gleichung $\varphi_i(z) = 0$ die unendlich vielen Wurzeln $z_0 + b,\ z_0 + 2b, \ldots.$ nach sich. Folglich muß sich $\varphi_i(z)$ auf eine Constante reduciren. Dann würde aber $f(s, z)$ von z unabhängig sein, was widersinnig ist. Daher ist die Annahme, b sei nicht gleich Null, unzulässig.

Wenn nun $s^\nu z^\mu$ und $s^{\nu'} z^{\mu'}$ irgend zwei verschiedene in $f(s, z)$ vorkommende Terme bedeuten, so muß wegen (7)

$$c^\nu a^\mu = c^{\nu'} a^{\mu'} \tag{9}$$

und also $c^{\nu - \nu'} = a^{\mu' - \mu}$ sein. Daher kann man

$$c = t^q,\ a = t^r \tag{10}$$

setzen, unter r und q ganze Zahlen verstanden, und Gleichung (9) geht über in

$$t^{r\mu + q\nu} = t^{r\mu' + q\nu'}.$$

Angenommen nun t sei keine Einheitswurzel, so folgt:

$$r\mu + q\nu = r\mu' + q\nu'$$

und die Gleichung $f(s, z) = 0$ wird daher identisch befriedigt, wenn

$$\begin{cases} s = s_0 \,.\, \lambda^q \\ z = z_0 \,.\, \lambda^r \end{cases}$$

gesetzt wird, wo λ einen Parameter und s_0, z_0 irgend ein $f(s, z) = 0$ befriedigendes Werthepaar bezeichnen. Dieses widerstreitet aber dem Umstande, daß $f(s, z) = 0$ mindestens das Geschlecht 1 besitzt und folglich ist die Annahme, t sei keine Einheitswurzel, unzulässig. Mit t sind aber zufolge (10) auch a und c und mit letzteren zufolge (5) auch ε_1 und ε_2 Einheitswurzeln. Dieselbe Betrachtung auf die beiden

Integrale u_2, u_3 angewandt, ergiebt daß $\eta_3 = 0$ und ε_3 eine Einheitswurzel sein muß u. s. f. Das Gleichungssystem (2) hat also nothwendig die Gestalt:

$$\text{(11)} \qquad \begin{cases} du_1' = \varepsilon_1 du_1, \\ du_2' = \varepsilon_2 du_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ du_p' = \varepsilon_p du_p, \end{cases}$$

unter $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_p$ Einheitswurzeln verstanden.

Bildet man nun von irgend einer Stelle P ausgehend die Stellenreihe $P, P', \ldots P^{(n-1)}, \ldots$ mit der Maßgabe, daß jede folgende Stelle der unmittelbar vorhergehenden entsprechen soll, so ist

$$du_1^{(n)} = du_1, \; du_2^{(n)} = du_2, \; \ldots \; du_p^{(n)} = du_p,$$

wenn n eine Zahl bezeichnet, für welche die Potenzen

$$\text{(12)} \qquad \varepsilon_1^n = \varepsilon_2^n = \ldots = \varepsilon_p^n = 1$$

werden. Daher ist die Stelle $P^{(n)}$ mit der Stelle P identisch und also in der That, wie behauptet wurde, die eindeutige Transformation periodisch. Der Werth der Periode ist offenbar gleich der kleinsten positiven Zahl n, für welche die Gleichungen (12) erfüllt sind[1]).

4.

In dieser Nummer entwickle ich einen allgemeinen Satz über Correspondenzen, aus welchem sich ein neuer Beweis für die Periodicität der eindeutigen Transformationen eines Gebildes in sich ergeben wird. — Zwischen zwei Stellen x, y einer Riemann'schen Fläche möge eine algebraische Correspondenz bestehen, vermöge welcher jeder Stelle x α Lagen $y', y'', \ldots y^{(\alpha)}$ von y und umgekehrt jeder Stelle y β Lagen $x', x'', \ldots x^{(\beta)}$ von x entsprechen. Bilden dann $u_1, u_2, \ldots u_p$ ein System überall endlicher Normal-Integrale der Fläche, so bestehen die Relationen

$$\text{(1)} \qquad \sum_1^{\alpha}{}_r\, u_k(y^r) = \sum_i \pi_{ki} u_i(x) + \pi_k, \; (k = 1, 2, \ldots p),$$

---

1) Auf den sich hier anschließenden Satz, daß eine Riemann'sche Fläche ($p > 1$) eine unendliche Zahl von eindeutigen Transformationen in sich nicht besitzen kann, hoffe ich demnächst zurückzukommen. Man vgl. wegen desselben Klein und Poincaré im 7ten Bande der Acta Mathematica p. 16—19. Der Satz, daß eine continuirliche Schaar von eindeutigen Transformationen bei $p > 1$ nicht existiren kann, läßt sich leicht aus den Entwicklungen des Textes ableiten. Auf diesen Satz beziehen sich die Aufsätze von H. A. Schwarz (Crelle's Journal, Bd. 87, pag. 139), Hettner (Göttinger Nachrichten, 1880, pag. 386) und Nöther (Mathematische Annalen, Bd. 20, pag. 59 und Bd. 21, pag. 138).

wo die Constanten π_{kl} den Gleichungen

$$\pi_{kl} = h_{kl} + \sum_i g_{li} a_{ki}, \quad \sum_i \pi_{ki} a_{il} = H_{kl} + \sum_i G_{li} a_{ki} \tag{2}$$

$$(k, l = 1, 2, \ldots p)$$

genügen. Dabei bedeuten die Zeichen h, g, H, G ganze Zahlen und die Normal-Integrale sind so bestimmt, daß sie die in folgender Tabelle angegebenen primitiven Periodicitäts-Moduln besitzen:

$$\begin{array}{l}
u_1 \ldots 1, 0, \ldots 0, a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1p}, \\
u_2 \ldots 0, 1, \ldots 0, a_{21}, a_{22}, \ldots a_{2p}, \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
u_p \ldots 0, 0, \ldots 1, a_{p1}, a_{p2}, \ldots a_{pp}.
\end{array}$$

Ferner durchläuft der Summationsbuchstabe i, wie stets in der Folge, die Werthe 1, 2, ... p. Endlich bezeichnen π_k Constante, welche von der Wahl der Anfangswerthe der Integrale abhängen. Wegen des Beweises der Gleichungen (1) und (2) sehe man C. § 1.

Es soll nun untersucht werden, unter welcher Bedingung das System der Zahlen $\begin{vmatrix} h, & g \\ H, & G \end{vmatrix}$ den in der Theorie der Transformation der ϑ-Functionen auftretenden Gleichungen[1]):

$$\left.\begin{array}{l}
\sum_i (h_{li}\, g_{ki} - g_{li}\, h_{ki}) = \quad \sum_i (H_{li} G_{ki} - G_{li} H_{ki}) = 0 \\
\sum_i (h_{li} G_{ki} - g_{li} H_{ki}) = - \sum_i (H_{li}\, g_{ki} - G_{li}\, h_{ki}) = \begin{cases} 0 \text{ für } l \gtrless k, \\ m \text{ für } l = k, \end{cases}
\end{array}\right\} \tag{3}$$

$$(k, l = 1, 2, \ldots p)$$

Genüge leistet. Dabei bedeutet m eine positive ganze Zahl, die »Ordnung« der Transformation.

Zu dem Ende bemerke ich zunächst, daß sich neben die Gleichungen (1), (2) zwei weitere Systeme von derselben Gestalt stellen, nämlich:

$$\sum_1^{\beta} u_k(x^{\nu}) = \sum_i \pi'_{ki} u_i(y) + \pi'_k, \quad (k = 1, 2, \ldots p) \tag{4}$$

$$\pi'_{kl} = h'_{kl} + \sum_i g'_{li} a_{ki}, \quad \sum_i \pi'_{ki} a_{il} = H'_{kl} + \sum_i G'_{li} a_{ki}, \tag{5}$$

$$(k, l = 1, 2, \ldots p)$$

wobei die Zahlen h', g', H', G' mit den Zahlen h, g, H, G durch die Gleichungen:

---

1) Siehe z. B. Weber, »Ueber die Transformationstheorie der Theta-Functionen, insbesondere derer von drei Veränderlichen« Annali di Matematica, Serie II, Bd. 9, pag. 126.

$$(6) \qquad h'_{\kappa\iota} = G_{\iota\kappa},\ g'_{\kappa\iota} = -g_{\iota\kappa},\ H'_{\kappa\iota} = -H_{\iota\kappa},\ G'_{\kappa\iota} = h_{\iota\kappa}$$

verbunden sind[1]).

Es sei nun x irgend eine Stelle der Riemann'schen Fläche, $y', y'', \ldots y^{(\alpha)}$ die correspondirenden Lagen von y. Der Stelle $y^{(r)}$ werden rückwärts außer der Stelle x noch $\beta - 1$ andere Stellen entsprechen, welche mit $x'_r, x''_r, \ldots x_r^{(\beta-1)}$ bezeichnet werden mögen. Dann bestehen nach (4) die Gleichungen

$$(7) \qquad u_k(x) + \sum_1^{\beta-1}{}_s u_k(x_r^s) = \sum_\iota \pi'_{k\iota} u_\iota(y^r) + \pi'_k \quad (k = 1, 2, \ldots p).$$

Die Summation über $r = 1, 2, \ldots \alpha$ ergiebt unter Berücksichtigung von (1):

$$(8) \quad \alpha u_k(x) + \sum_1^{\alpha}{}_r \sum_1^{\beta-1}{}_s u_k(x_r^s) = \sum_\iota \pi''_{k\iota} u_\iota(x) + \pi''_k \quad (k = 1, 2, \ldots p),$$

wenn

$$(9) \qquad \pi''_{k\iota} = \sum_\iota \pi'_{k\iota} \pi_{\iota\lambda}$$

gesetzt wird. Nun ist, den Gleichungen (2), (5), (6) zufolge:

$$(10) \qquad \pi''_{k\iota} = h''_{k\iota} + \sum_\iota g''_{\iota\lambda} a_{k\iota},\ \sum_\iota \pi''_{k\iota} a_{\iota\lambda} = H''_{k\iota} + \sum_\iota G''_{\iota\lambda} a_{k\iota}$$

unter h'', g'', H'', G'' die folgenden Zahlen verstanden:

$$(11) \quad \begin{cases} h''_{k\iota} = \sum_\iota (h_{\kappa\iota} G_{\iota\lambda} - g_{\kappa\iota} H_{\iota\lambda}),\ g''_{k\iota} = -\sum_\iota (h_{\kappa\iota} g_{\iota\lambda} - g_{\kappa\iota} h_{\iota\lambda}) \\ H''_{k\iota} = \sum_\iota (H_{\kappa\iota} G_{\iota\lambda} - G_{\kappa\iota} H_{\iota\lambda}),\ G''_{k\iota} = -\sum_\iota (H_{\kappa\iota} g_{\iota\lambda} - G_{\kappa\iota} h_{\iota\lambda}). \end{cases}$$

Die Relationen (3) sind hiernach dann und nur dann erfüllt, wenn $h''_{11} = h''_{22} = \ldots h''_{pp} = G''_{11} = G''_{22} = \ldots = G''_{pp} = m$ und alle übrigen Zahlen h'', g'', H'', G'' verschwinden, oder was hiermit gleichbedeutend ist, wenn das Gleichungssystem (8) sich auf die Form:

$$(12) \qquad \alpha u_k(x) + \sum_1^{\alpha}{}_r \sum_1^{\beta-1}{}_s u_k(x_r^s) = m u_k(x) + \pi''_k \quad (k = 1, 2, \ldots p)$$

reducirt. Dieses findet nun immer Statt, wenn $\beta = 1$, also die Correspondenz $(\alpha, 1)$ deutig ist; denn dann kommt das Summenglied auf der linken Seite von (8) einfach in Wegfall und es muß sich daher wegen der Unabhängigkeit der Integrale die rechte Seite auf $\alpha u_k(x)$ reduciren. Unter Benutzung einer von Herrn Frobe-

---

1) Vgl. C. § 10, zweite Anmerkung. Der Beweis der Gleichungen (6) ergiebt sich durch Betrachtung des Begrenzungsintegrales: $\int u_k(x)\, d\lg C(x,y)$. Die Bedeutung von $C(x,y)$ siehe in C. § 3.

nius[1]) eingeführten Terminologie ergiebt sich also:

Existirt auf einer Riemann'schen Fläche eine $(\alpha, 1)$-deutige Correspondenz, so entspricht derselben stets eine principale Transformation von der αten Ordnung der zur Fläche gehörigen ϑ-Function.

Insbesondere folgt für $\alpha = 1$:

Einer eindeutigen Transformation eines algebraischen Gebildes in sich entspricht stets eine lineare principale Transformation der zu dem Gebilde gehörigen ϑ-Function.

Im Allgemeinen, d. h. wenn über die Zahlen α, β keine Voraussetzung gemacht wird, lassen sich die Gleichungen (12) offenbar folgendermaßen deuten:

Ist auf einer Riemann'schen Fläche eine (α, β) Correspondenz gegeben, so leite man aus derselben eine neue Correspondenz ab, indem man je zwei Stellen x, x' einander zuordnet, welche derselben Stelle y correspondiren. Diese neue Correspondenz muß nun eine Werthigkeits-Correspondenz[2]) sein, deren Werthigkeit γ kleiner ist als α, falls der ursprünglichen Correspondenz eine principale Transformation der zur Fläche gehörigen ϑ-Function entsprechen soll. Die Ordnung dieser Transformation ist dann

$$m = \alpha - \gamma.$$

5.

Dem soeben citirten Aufsatze des Herrn Frobenius entnehme ich nun die folgenden Sätze[3]):

Die zu einer principalen Transformation gehörige »charakteristische« Determinante

---

1) »Ueber die principale Transformation der Thetafunctionen mehrerer Variabeln«, Crelle's Journal, Bd. 95, pag. 264.

Diese Transformationen sind zuerst untersucht von Herrn Kronecker in dem Aufsatze: »Ueber bilineare Formen«, Berichte der Berliner Akademie vom 15. October 1866, oder Crelle's Journal Bd. 68. Man sehe auch Weber, l. c. und Wiltheiß: »Ueber Thetafunctionen, die nach einer Transformation in ein Produkt von Thetafunctionen zerfallen«, Mathematische Annalen Bd. 26, pag. 127.

2) Siehe C. §. 2.

3) pag. 273, 281 und 282.

$$(1)\quad D = \begin{vmatrix} h_{11}-r, & h_{12}, \ldots & h_{1p} & , g_{11} & , g_{12}, \ldots & g_{1p} \\ \cdot & \cdot \;\cdots & \cdot & \cdot & \cdot \;\cdots & \cdot \\ h_{p1} & , h_{p2}, \ldots & h_{pp}-r, & g_{p1} & , g_{p2}, \ldots & g_{pp} \\ H_{11} & , H_{12}, \ldots & H_{1p} & , G_{11}-r, & G_{12}, \ldots & G_{1p} \\ \cdot & \cdot \;\cdots & \cdot & \cdot & \cdot \;\cdots & \cdot \\ H_{p1} & , H_{p2}, \ldots & H_{pp} & , G_{p1} & , G_{p2}, \ldots & G_{pp}-r \end{vmatrix}$$

besitzt lauter lineare Elementartheiler und die $2p$ Werthe von r für welche D verschwindet, haben sämmtlich den absoluten Betrag $\sqrt{m}$.

Einer Correspondenz (α, β), zu welcher die Gleichungssysteme (1) (2) der vorigen Nummer gehören, entspreche eine principale Transformation. Führt man dann an Stelle der $u_1, u_2 \ldots u_p$ p geeignete lineare Verbindungen dieser Größen ein und bezeichnet diese Verbindungen wieder mit $u_1, u_2, \ldots u_p$, so stellt sich das Gleichungssystem (1) der vorigen Nummer in der Form dar:

$$(2)\qquad \sum_1^{\alpha} {}_r\, u_k(y^r) = \varepsilon_k u_k(x) + \pi_k, \quad (k = 1, 2, \ldots p),$$

wo die p Größen ε_k zusammen mit ihren conjugirt complexen Werthen die Wurzeln r der Gleichung $D = 0$ ausmachen. Ist insbesondere $m = 1$, so sind die Größen ε_k sämmtlich Einheitswurzeln. Da nun, wie oben gezeigt, einer (1, 1) Correspondenz immer eine principale Transformation mit $m = 1$ entspricht, so folgt, daß für jede solche Correspondenz p linear unabhängige Integrale erster Gattung bestimmt werden können, welche den Gleichungen

$$(3)\qquad u_k(y) = \varepsilon_k u_k(x) + \pi_k \quad (k = 1, 2, \ldots p)$$

genügen, wenn x und y irgend zwei correspondirende Stellen und $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_p$ Einheitswurzeln bezeichnen. Diese Gleichungen unterscheiden sich aber nur in der Schreibweise von den Gleichungen (11) der Nummer 3, aus welchen unmittelbar die Periodicität der mit der Correspondenz gleichbedeutenden eindeutigen Transformation gefolgert werden konnte.

6.

Hier mögen nun noch einige Bemerkungen über das zu irgend einer (1, 1) Correspondenz gehörige Gleichungssystem

$$(1)\qquad du_k' = \varepsilon_k du_k, \quad (k = 1, 2, \ldots p)$$

Platz finden, welches ich jetzt wieder in der bequemeren Schreibweise der Nr. 3 angesetzt habe.

Bezeichnet K die Zahl der Coincidenzen der Correspondenz, so ist (nach C. § 10)

$$K = 2 - (h_{11} + h_{22} + \dots + h_{pp} + G_{11} + G_{22} + \dots + G_{pp}).$$

Andererseits ist die auftretende Klammergröße gleich der Summe der Wurzeln der Gleichung $D = 0$, also gleich

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_p + \varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1} + \dots + \varepsilon_p^{-1}.$$

Es drückt sich also die Zahl der Coincidenzen der Correspondenz durch die Formel aus:

$$K = 2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \dots - \varepsilon_p - \varepsilon_1^{-1} - \varepsilon_2^{-1} - \dots - \varepsilon_p^{-1}. \tag{2}$$

Da die Summe $\sum_1^p{}_k (\varepsilon_k + \varepsilon_k^{-1})$ einer ganzen Zahl gleich ist, so können in dem Gleichungssystem (1) nur gewisse Combinationen von Einheitswurzeln auftreten. Ich will in dieser Hinsicht nur den Fall näher betrachten, wo die Periode n eine Primzahl ist. Sei $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, so werden von den Zahlen ε_k etwa m_0 gleich $\varepsilon^0 = 1$, m_1 gleich $\varepsilon^1, \dots$ m_{n-1} gleich ε^{n-1} werden, wo natürlich

$$m_0 + m_1 + \dots + m_{n-1} = p \tag{3}$$

ist. Die Formel (2) ergiebt nun

$$K = 2 - 2m_0 - [(m_1 + m_{n-1})\varepsilon + (m_2 + m_{n-2})\varepsilon^2 + \dots + (m_{n-1} + m_1)\varepsilon^{n-1}]. \tag{4}$$

Wegen der Irreducibilität der Gleichung $\frac{x^n - 1}{x - 1} = 0$ ist daher nothwendig

$$m_1 + m_{n-1} = m_2 + m_{n-2} = \dots = m_{\frac{n-1}{2}} + m_{\frac{n+1}{2}}. \tag{5}$$

Wenn also n eine Primzahl ist, treten irgend zwei conjugirt imaginäre complexe Einheitswurzeln zusammengenommen im Gleichungssystem (1) gerade so oft auf, wie irgend zwei andere. Der gemeinsame Werth der Zahlen (5) findet sich aus (3) gleich $2 \cdot \frac{p - m_0}{n - 1}$, so daß

$$K = 2 - 2m_0 + 2 \cdot \frac{p - m_0}{n - 1} \tag{6}$$

wird.

Die Anzahl derjenigen Einheitswurzeln ε_k, welche sich auf $+1$ reduciren, hat in allen Fällen (ich lasse jetzt die Beschränkung, daß n eine Primzahl sei, wieder fallen) eine einfache Bedeutung. Sie ist nämlich stets gleich dem Geschlecht p_1 der durch die Gleichung

$$F(\sigma, \zeta) = 0$$

definirten Fläche R_1 (vgl. Nr. 2). Zum Beweise bemerke ich zunächst, daß jede Function der Stelle P auf der Fläche R auch als

Function der entsprechenden Stelle auf der Fläche R_1 (und umgekehrt) angesehen werden kann. In diesem Sinne ist jedes überall endliche Integral von R, welches die Gleichung $du' = du$ erfüllt, auch ein überall endliches Integral von R_1 und umgekehrt befriedigt jedes überall endliche Integral von R_1, aufgefaßt als ein Integral der Fläche R, die Gleichung $du' = du$ [1]).

Die Bedingung dafür, daß $p_1 = 0$ ist, läßt sich hiernach dahin aussprechen, daß sich keine der Einheitswurzeln ε_k auf die positive Einheit reduciren darf.

Sollen die Einheitswurzeln ε_k sämmtlich unter einander gleich werden, so ist dieses nicht anders möglich, als daß sie sämmtlich den Werth -1 besitzen; die Riemann'sche Fläche ist dann hyperelliptisch und die Correspondenz ordnet immer zwei solche Stellen einander zu, in welchen die zweiwerthige Function der Fläche denselben Werth annimmt. Denn unter der Voraussetzung $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_p$ folgt aus den Gleichungen (1), daß jedes an der Stelle P von der zweiten Ordnung verschwindende Differential erster Gattung auch an der Stelle P' von der zweiten Ordnung Null ist, woraus alles Weitere sich leicht ergiebt.

7.

Die Aufgabe, alle Riemann'schen Flächen eines gegebenen Geschlechtes p zu bestimmen, welche eine eindeutige Transformation in sich zulassen, kann man dadurch lösen, daß man alle Gleichungen

$$F(s^n, z) = 0$$

bestimmt, welche das vorgegebene Geschlecht besitzen, wobei natürlich zwei Gleichungen, welche in dieselbe Classe gehören, als nicht verschieden angesehen werden. Die Entwicklungen der Nr. 2 lassen leicht erkennen, daß die Bestimmung der wirklich verschiedenen Gleichungen durch eine endliche Zahl von Versuchen erreicht werden kann. Dieselbe Aufgabe läßt sich auch in der Weise behandeln, daß man die Riemann'sche Fläche durch diejenige Curve im Raume von $p-1$ Dimensionen dargestellt denkt, welche durch den Punkt

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_p = du_1(x) : du_2(x) : \ldots : du_p(x)$$

durchlaufen wird, wenn die Stelle x die Riemann'sche Fläche beschreibt [2]).

---

1) Diese Betrachtung ergiebt zugleich diejenigen Integrale der ursprünglichen Fläche, welche sich, infolge der eindeutigen Transformation der Fläche in sich, auf ein niederes Geschlecht reduciren.

2) Siehe wegen dieser Darstellung der Riemann'schen Flächen: Weber:

Bei diesem Ansatze reducirt sich, den Gleichungen (11) in Nr. 3 zufolge, die Aufgabe darauf, alle diejenigen der genannten Curven herzustellen, deren Gleichungen in sich übergehen, wenn die Coordinaten mit bestimmten Einheitswurzeln multiplicirt werden.

Dieser zweiten Behandlungsweise entziehen sich freilich die hyperelliptischen Gebilde. Letztere lassen sich aber leicht auf folgende Weise direct behandeln. Es werde angenommen, daß ein hyperelliptisches Gebilde ($p > 1$) außer der stets vorhandenen eindeutigen Transformation, welche die Punkte gleichen Werthes der zweiwerthigen Function einander zuordnet, noch eine weitere eindeutige Transformation in sich zulasse. Da die zweiwerthige Function z, abgesehen von einer linearen Substitution, welcher dieselbe noch unterworfen werden kann, eindeutig bestimmt ist, so muß

$$z' = \frac{az+b}{cz+d} \tag{1}$$

sein, wenn z, z' die Werthe der zweiwerthigen Function an entsprechenden Stellen P, P' bedeuten. Nun ist aber die Transformation periodisch und folglich kann durch eventuelle Einführung einer gebrochenen linearen Function von z an Stelle von z erreicht werden, daß die Gleichung (1) die einfache Gestalt annimmt:

$$z' = \varepsilon \,.\, z, \tag{2}$$

unter ε eine $n$te Einheitswurzel verstanden. Dabei ist ε von 1 verschieden und also $n > 1$, weil anderenfalls die Transformation mit der bei einem hyperelliptischen Gebilde stets vorhandenen zusammenfallen würde. Sei nun

$$s = \sqrt{R(z)} \tag{3}$$

die Definitionsgleichung der Fläche, so ist

$$\frac{dz'}{s'} = \frac{\varepsilon \,.\, dz}{\sqrt{R(\varepsilon z)}} = \varepsilon \,.\, \sqrt{\frac{R(z)}{R(\varepsilon z)}} \,.\, \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}, \tag{4}$$

und dieser Ausdruck muß ein Differential erster Gattung sein. Also ist $\sqrt{\frac{R(z)}{R(\varepsilon z)}}$ eine rationale ganze Function von z und folglich eine Constante, so daß

$$R(\varepsilon z) = \text{const.}\ R(z) \tag{5}$$

wird. Die ganze Function $R(z)$ kann also nur solche Potenzen von

»Ueber gewisse in der Theorie der Abel'schen Functionen auftretende Ausnahmefälle«, Mathematische Annalen Bd. 13 und namentlich Nöther: »Ueber die invariante Darstellung algebraischer Functionen«, ib. Bd. 17.

z enthalten, deren Exponenten (mod. n) congruent sind und folglich ist entweder $R(z) = R_1(z^n)$ oder $R(z) = z \,.\, R_1(z^n)$. Im ersten Falle wird $s' = \pm s$, im zweiten $s' = \pm \varepsilon^{\frac{1}{2}} \,.\, s$. Es ergiebt sich also der Satz:

»Jede hyperelliptische Fläche, welche außer der stets vorhandenen eindeutigen Transformation in sich noch eine weitere solche Transformation besitzt, läßt sich durch eine der beiden Gleichungen

$$s^2 = R(z^n),$$
$$s^2 = z \,.\, R(z^n)$$

definiren, dergestalt, daß jene Transformation durch die Formeln:

$$z' = \varepsilon z, \quad s' = \eta s$$

im ersten, und

$$z' = \varepsilon z, \quad s' = \eta \,.\, \varepsilon^{\frac{1}{2}} s$$

im zweiten Falle angegeben wird. Dabei bezeichnet η einen der Werthe ± 1 und ε eine von $+1$ verschiedene $n$te Einheitswurzel.«

8.

Besitzt eine Riemann'sche Fläche eindeutige Transformationen in sich, so bildet die Gesammtheit der letzteren eine Gruppe, indem die Zusammensetzung je zweier Transformationen (P, P'), (P', P'') eine dritte Transformation (P, P'') ergiebt. Die Gruppe dieser Transformationen ist für $p > 1$ stets eine endliche und es erwächst die Aufgabe, für ein gegebenes Geschlecht alle Möglichkeiten, welche sich hier darbieten können, zu discutiren. Die in der vorigen Nummer besprochene Aufgabe geht aus der jetzt formulirten offenbar durch die Einschränkung hervor, daß man nur cyclische Gruppen betrachten will. Indem ich mich, was die allgemeine Aufgabe betrifft, mit der Bemerkung begnüge, daß eine große Zahl von ausführlich studirten Beispielen algebraischer Gebilde mit Gruppen eindeutiger Transformationen in sich in der Litteratur über Modulfunctionen[1])

---

1) Ich nenne hier statt aller nur die den vorliegenden Betrachtungen am nächsten stehende Arbeit von W. Dyck: »Ueber Aufstellung und Untersuchung von Gruppe und Irrationalität regulärer Riemann'scher Flächen«, Mathematische Annalen Bd. 17, pag. 473. Wegen der weiteren im Texte entwickelten Ideen vergleiche man folgende Publicationen von F. Klein: »Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade«, Mathematische Annalen Bd. 15, pag. 251; »Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade« (Leipzig, 1884), sowie den neuerdings erschienenen Aufsatz: »Zur Theorie der allgemeinen Gleichungen sechsten und siebenten Grades«, Mathematische Annalen, Bd. 28, pag. 499.

vorliegt, möchte ich hier noch einige Sätze entwickeln, welche sich auf eine gewissermaßen umgekehrte Fragestellung beziehen und die, wie mir scheint, für die Gleichungstheorie von Wichtigkeit sind.

Es sei irgend eine endliche Gruppe von N Operationen gegeben. Dann giebt es stets algebraische Gebilde, welche eine Gruppe eindeutiger Transformationen in sich besitzen, welche mit jener Gruppe von N Operationen holoedrisch isomorph ist.

Zum Beweise bemerke ich zunächst, daß jeder Gruppe von N Operationen eine holoedrisch isomorphe Gruppe von N Vertauschungen von ebensovielen Dingen entspricht. Man bezeichne nämlich die Operationen mit

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_{N-1},$$

dann werden die Operationen

$$x_i x_0,\ x_i x_1,\ \ldots\ x_i x_{N-1}$$

in irgend einer Reihenfolge mit den ursprünglichen Operationen identisch sein. Ordnet man nun der Operation x_i diejenige Vertauschung der Buchstaben $x_0,\ x_1,\ \ldots\ x_{N-1}$ zu, welche x_k durch $x_i x_k$ ersetzt, so wird das hierdurch definirte System von Vertauschungen der vorgelegten Gruppe holoedrisch isomorph sein. Deutet man jetzt

$$x_0 : x_1 : x_2 : \ldots : x_{N-1}$$

als Coordinaten eines Raumes von $N-1$ Dimensionen und bildet irgend eine algebraische Curve dieses Raumes, welche in sich übergeht, wenn die Coordinaten $x_0,\ x_1 \ldots\ x_{N-1}$ den genannten Vertauschungen unterworfen werden, so wird diese Curve offenbar ein algebraisches Gebilde von der im Satze angegebenen Beschaffenheit definiren.

Die in diesem Beweise zugleich enthaltene Methode zur Herstellung der betreffenden algebraischen Gebilde wird man in besonderen Fällen natürlich durch einfachere Methoden ersetzen können. Handelt es sich beispielsweise um die Gruppe der Vertauschungen von n Dingen $y_0,\ y_1,\ \ldots\ y_{n-1}$, so wird die durch die $n-2$ Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1} = 0 \\ y_0^2 + y_1^2 + \cdots + y_{n-1}^2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_0^{n-2} + y_1^{n-2} + \cdots + y_{n-1}^{n-2} = 0 \end{array}\right\}$$

definirte einfach ausgedehnte algebraische Mannigfaltigkeit die in den Vertauschungen der y bestehenden eindeutigen Transformationen in sich zulassen.

Bei einer vorgelegten Gruppe wird es sich nun darum handeln, die einfachsten algebraischen Curven aufzufinden, welche eine isomorphe Gruppe eindeutiger Transformationen besitzen. Als solche einfachste Curven definire ich diejenigen, welche das kleinst mögliche Geschlecht aufweisen. Dieses Minimalgeschlecht kann, da es durch die Gruppe eindeutig bestimmt ist, als das »Geschlecht der Gruppe« bezeichnet werden. Z. B. hat die Gruppe der geraden Vertauschungen von fünf Dingen das Geschlecht Null, weil es eine Riemann'sche Fläche vom Geschlecht Null — die Kugel — giebt, welche ein holoedrisch isomorphes System von eindeutigen Transformationen — das System der Ikosaedersubstitutionen — zuläßt.

Wenn das Geschlecht einer Gruppe gleich p ist, so giebt es immer ein der Gruppe holoedrisch isomorphes System linearer Substitutionen bei p homogenen Variabeln und ein solches System ganzzahliger linearer Substitutionen bei $2p$ Variabeln.

Denn jeder eindeutigen Transformation einer Riemann'schen Fläche in sich entspricht eine lineare homogene Substitution der p Differentiale erster Gattung $du_1, du_2, \ldots du_p$ und eine principale Transformation der zugehörigen ϑ-Function.

Nachtrag zu vorstehender Abhandlung.

Eine neuerdings erschienene Mittheilung[1]) des Herrn Fuchs, in welcher derselbe seine Abhandlung vom 22. Juli 1886 berichtigt, veranlaßt mich, im Folgenden den Wortlaut eines Briefes zum Abdruck zu bringen, welchen ich Ende December vorigen Jahres an Herrn Fuchs richtete. Um diesen Abdruck zu rechtfertigen habe ich den Leser nur zu bitten, den Inhalt des Briefes in Vergleich zu ziehen mit der Art, wie mich Herr Fuchs in der genannten Mittheilung erwähnt. Der Brief lautet so:

Sehr geehrter Herr Professor!

Infolge der langsamen Reconvalescenz von einer langwierigen typhösen Erkrankung, welche ich in diesem Sommer überstanden habe, bin ich erst heute dazu gekommen, Ihre im diesjährigen Julihefte der Berliner Akademie-Berichte mitgetheilte Abhandlung »Ueber

1) Sitzungsberichte der Kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Gesammtsitzung vom 24. Februar 1887.

diejenigen algebraischen Gebilde, welche eine Involution zulassen« zu lesen. Die Frage, welche Sie in derselben behandeln, steht in engstem Zusammenhange mit den Untersuchungen, welche ich in der Sitzung vom 11. Januar dieses Jahres der Kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften veröffentlicht habe. In dieser Note — von welcher ich Ihnen derzeit einen Abzug zu übersenden so frei war — bestimme ich alle auf einer Riemann'schen Fläche existirenden algebraischen Correspondenzen und stelle namentlich auch das allgemeine Correspondenzprincip auf, während die bekannte Cayley-Brill'sche Formel nur für den speciellen Fall der von mir als Werthigkeits-Correspondenzen bezeichneten Correspondenzen Gültigkeit besitzt. In dieser Note beweise ich nun im Schlußparagraphen folgenden Satz: »Jede Riemann'sche Fläche, welche eine eindeutige Transformation in sich besitzt, ist entweder eine »hyperelliptische« oder eine singuläre Fläche.« Eine Riemann'sche Fläche nenne ich aber singulär, wenn zwischen den Perioden ihrer p überall endlichen Integrale gewisse p^2 quadratische Relationen mit ganzzahligen Coefficienten stattfinden (§ 2 meiner Note). — Sie behandeln nun den Fall, wo jene eindeutige Transformation in den correspondirenden Stellen symmetrisch ist und gelangen zu dem Resultate, daß dann die Fläche nothwendig hyperelliptisch sei. Indessen ist dieses Resultat doch nur dann richtig, wenn man den Fall der singulären Flächen ausdrücklich ausschließt. Betrachten wir irgend ein algebraisches Gebilde, welches durch eine nur gerade Potenzen von s enthaltende Gleichung

$$f(s^2, z) = 0$$

definirt ist, so läßt dasselbe offenbar die Involution

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= z \\ \sigma &= -s \end{aligned}\right\}$$

zu, und man würde also, wenn Ihr Satz zugegeben würde, das Resultat erhalten, daß jedes durch eine Gleichung $f(s^2, z) = 0$ definirte algebraische Gebilde hyperelliptisch sei, was doch keineswegs der Fall ist. In der That sind wohl auch die Schlüsse, welche Sie im § 3 Ihrer Abhandlung aus Eliminations-Betrachtungen herleiten, nicht in allen Fällen aufrecht zu erhalten. Jedenfalls gilt immer das im Gleichungs-Systeme (K) des § 2 enthaltene Resultat. Man kann dieses außer auf dem von Ihnen angegebenen Wege, auch folgendermaßen begründen: Sind du_i^1, du_i^2 $(i = 1, \ldots p)$ die Werthe von p unabhängigen überall endlichen Differentialen in zwei correspondirenden Punkten, so sind die $2p$ Differentiale $du_i^1 \pm du_i^2$ $(i = 1, \ldots p)$

jedenfalls ausreichend, um alle überall endlichen Differentiale darzustellen. Man kann folglich unter ihnen p auswählen, welche linear unabhängig sind und diese p Differentiale bilden ein solches, dem Gleichungs-Systeme (K) genügendes System. — Aus den Betrachtungen meiner Note geht nun hervor, daß erstens die vorausgesetzte Involution sich auf die Identität (bei welcher σ, ζ mit s, z immer zusammenfällt) reducirt, wenn in (K) überall das Pluszeichen gilt; daß ferner die Fläche singulär ist, wenn Plus- und Minuszeichen gemischt auftreten, daß endlich die Fläche hyperelliptisch ist, wenn überall das Minuszeichen steht. Es ist ja auch klar, daß, wenn die Stellen (1) und (2) solche Stellen sind, in welchen eine zweiwerthige Function denselben Werth annimmt, für jedes überall endliche Integral $du^1 = -du^2$ ist, so daß für die hierdurch definirten Involutionen im Gleichungssystem (K) überall das Minuszeichen stattfinden muß.

Den 29. December. Gestern habe ich noch über diese Dinge nachgedacht und bin zu dem Resultate gelangt, daß das oben genannte Beispiel des Gebildes $f(s^2, z) = 0$ den allgemeinsten Fall der Involution darbietet. Es gilt in der That folgender Satz:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das algebraische Gebilde

$$f(s, z) = 0$$

eine eindeutige Transformation in sich von der Periode n besitze, ist die, daß das algebraische Gebilde $f(s, z) = 0$ durch eine eindeutige Transformation

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= \varphi(s, z) \\ z_1 &= \psi(s, z) \end{aligned}\right\}$$

in das neue

$$f_1(s_1^n, z_1) = 0$$

übergeführt werden kann. Die Transformation in sich besteht dann enfach in der Zuordnung der Stellen z_1, s_1 und $z_1, e^{\frac{2i\pi}{n}} s_1$.

Für $n = 2$ ergiebt sich die obige Behauptung über die Involution. Vermuthlich gilt nun ferner der Satz, daß eine jede eindeutige Transformation eines algebraischen Gebildes in sich nothwendig periodisch ist, wenn $p > 1$, so daß man allgemein sagen könnte: der triviale Fall der Gleichung $f(s^n, z) = 0$ mit der eindeutigen Transformation

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= z \\ \sigma &= e^{\frac{2i\pi}{n}} s \end{aligned}\right\}$$

bildet zugleich den allgemeinsten Fall der eindeutigen Transformation eines algebraischen Gebildes $p > 1$ in sich.

Mit hochachtungsvollem Gruße etc.

Diesem Briefe habe ich Nichts hinzuzufügen, als daß ich ein vom 26. Januar 1887 datirtes Antwortschreiben erhielt, in welchem mir Herr Fuchs mittheilt, daß er »bis jetzt verhindert« gewesen sei, sich »mit dem Gegenstande zu beschäftigen.«

Königsberg i. Pr., d. 12. März 1887.

Zur Kenntniß der Acetoxime.

Von

Victor Meyer und **A. Warrington.**

In einer im vorigen Jahre veröffentlichten vorläufigen Mittheilung haben wir den Plan der folgenden Arbeit und die ersten orientirenden Versuche kurz mitgetheilt. Damals wurde etwa Folgendes gesagt: Fast alle Aldoxime geben mit Acetylchlorid Nitrile nach der Gleichung:

$$R - CH = N - OH = H_2O + R - C \equiv N$$

fast alle Acetoxime geben dagegen Acetyläther der Formel: $R - C (N - O - C_2H_3O) - R_1$. Eine Ausnahme bildet bei den Aldoximen dasjenige des Terephtal-Aldehyds, welches einen Diacetyläther giebt; bei den Acetoximen das Kamphoroxim, welches in Nitril der Kampholensäure verwandelt wird. Die letztere Thatsache ist nur dadurch zu erklären, daß der Kamphor als eine Art von Additionsproduct der aromatischen Reihe, Wasserstoff-Atome in besonders exponirter Stellung enthält, welche in ihrer Lage mit den Wasserstoffatomen der Aldehyde und der Aldoxime Aehnlichkeit haben. Darnach drängte sich die Frage auf, ob das Kamphoroxim und das Terephtalaldoxim allein stehende Ausnahmen seien, oder ob sie Analogien haben. Die Untersuchung des Isophtalaldoxims, welche Hr. Münchmeyer auf Veranlassung des des einen von uns vor kurzem ausgeführt, hat gezeigt, daß das Analogon des Terephtalaldoxims diesem durchaus nicht gleicht; es gab Metadicyanbenzol; eine Verschiedenheit im Verhalten zweier so ähnlicher Körper, die vorläufig ganz unerklärbar ist.

Um ein Analogon des Kamphoroxims von genauer bekannter

Constitution, als es bei dem Derivate der immer noch problematischen Kamphorgruppe der Fall ist, untersuchen zu können, wandten wir uns zu Acetoximen mit tertiären Wasserstoffatomen. Richard Meyer hat die besonders angreifbare Natur solcher Wasserstoffatome erwiesen; ihre Stellung scheint uns mit denjenigen der an das Benzol addirten Wasserstoffatome wohl vergleichbar. Wir theilten schon damals mit, daß die beiden Acetoxime

$$
\begin{array}{l}
CH_3 \\
| \\
CH_2 \\
| \\
CH_2 \\
| \\
C = N - OH \\
| \\
CH_2 \\
| \\
CH_2 \\
| \\
CH_3
\end{array}
\quad \text{und} \quad
\begin{array}{c}
CH_3 \quad CH_3 \\
\diagdown \; \diagup \\
CH \\
| \\
C = N - OH \\
| \\
CH \\
\diagup \; \diagdown \\
CH_3 \quad CH_3
\end{array}
$$

also das Dipropyl- und das Diisopropyl-Acetoxim sich gegen Chloracetyl ganz verschieden verhalten. Die nähere Untersuchung dieser Verhältnisse bildet den Gegenstand unserer heutigen Mittheilungen.

Dipropyl-Acetoxim.

Dipropylketon, leicht zu erhalten durch Destillation von buttersaurem Kalk, wurde in bekannter Weise durch ein- oder mehrtägiges Kochen mit alkalischer Hydroxylamin-Lösung in sein Oxim verwandelt. Das letztere bildet eine farblose Flüssigkeit, welche zwischen 190 und 195° C siedet, einen starken und characteristischen Geruch besitzt und in einer Kältemischung von Eis und Kochsalz nicht erstarrt. Die Analyse ergab: 0,2069 Gr. gaben 19,7 CC feuchten Stickstoff bei 15°5 C und 746,3 mm Druck.

	Berechnet	Gefunden
N:	10,85	10,92 pCt.

Das Acetoxim wurde in einen großen Ueberschuß von Acetylchlorid eingetragen — die Verdünnung durch das überschüssige Chorid verhindert, daß die Reaction zu stürmisch wird —, dann das Gemisch erwärmt und schließlich in kaltes Wasser oder Eis gegossen. Es scheidet sich ein ätherisch riechendes Oel ab, das durch Aether extrahirt und im Vacuum über Schwefelsäure getrocknet werde. Dasselbe ist der erwartete Acetyläther $C_3H_7 - C(N - O - C_2H_3O) - C_3H_7$. 0,2720 Gr. gaben 18,5 CC feuchten Stickstoff bei 16° C und 752 mm Druck.

	Berechnet	Gefunden
N:	8,00	7,91.

Eine Umwandlung dieses Aethers, ähnlich der seiner im folgenden Abschnitte zu beschreibenden Isomeren, haben wir nicht beobachtet, obwohl wir den Körper in ganz analoger Weise behandelt haben.

Diisopropylacetoxim.

Das erforderliche Diisopropylketon wurde durch Destillation von isobuttersaurem Kalk gewonnen. Mit Hydroxylamin in der oben angegebenen Weise behandelt, geht es leicht in sein Oxim über. Dasselbe bildet ein farbloses sehr stark und characteristisch, nicht unangenehm riechendes Oel, welches zwischen 181 und 185° C siedet und in einer Kältemischung zu Krystallen erstarrt. Diese letzteren schmelzen zwischen + 6 und + 8° C. Die Analyse desselben ergab: 0,1555 Gr. gaben 14,4 CC feuchten N bei 18,5° C und 748 mm Druck.

	Berechnet	Gefunden
N:	10,85	10,48.

Wird dies Oxim in einen großen Ueberschuß von Chloracetyl sehr vorsichtig eingetragen — die Reaction kann leicht explosionsartig werden — und das Gemisch in Eis gegossen, so erhält man ein Acetylderivat, welches dem im vorigen Abschnitte beschriebenen ähnlich ist. Destillirt man aber, nach dem Eintragen des Oxims, das überschüssige Chloracetyl im Wasserbade ab und erwärmt den Rückstand längere Zeit auf dem Wasserbade, so ist der anfangs gebildete Aether verschwunden. Denn gießt man nunmehr die Masse in Wasser oder Eis, so scheidet sich nichts ab, sondern man erhält eine völlig klare Lösung. Fügt man zu der erwärmten Lösung Natronlauge oder festes Natron, so steigt ein braunes Oel an die Oberfläche, welches einen betäubenden Alkaloidgeruch besitzt. Die Untersuchung dieses Oels hat nun merkwürdige und unerwartete Resultate ergeben. Dasselbe besitzt keinen constanten Siedepunkt, erleidet aber bei der Destillation keine erhebliche Zersetzung. Während des Destillirens, ja auch beim längeren Aufbewahren des nicht destillirten Oels, bemerkt man eine reichliche Abscheidung von Krystallen. Diese läßt sich sehr vermehren, wenn man das Oel auf dem Boden großer flacher Glasschalen ausbreitet und längere Zeit stehen läßt. Bald scheint das Ganze erstarrt, aber beim Abzug der Krystalle erhält man doch eine beträchtliche Menge öliger Mutterlauge. Diese wird wieder ausgebreitet stehen gelassen, worauf sie von Neuem Krystalle abscheidet. So gelang es im Laufe von Wochen die Menge

des Oels immer mehr und mehr zu verkleineren und das meiste in Krystalle zu verwandeln, die schließlich zwischen Filtrirpapier scharf abgepreßt und aus lauwarmem Wasser umkrystallisirt wurden.

Die reinen so erhaltenen Krystalle erwiesen sich nun zu unserer Ueberraschung als vollkommen geruchlos. Der intensive Alkaloidgeruch ist offenbar nicht den Krystallen, sondern dem Oel zuzuschreiben, dessen letzte Spuren schließlich durch das Abpressen und Umkrystallisiren entfernt worden waren. Der neue Körper ist eine Substanz von außerordentlich einladenden Eigenschaften. Er bildet weiße farblose Nadeln, welche in Alkohol und Aether sehr leicht löslich sind, in Wasser gerade so leicht, um bequem daraus umkrystallisirt werden zu können. Er ist sehr flüchtig, denn, ähnlich dem Naphtalin, sublimirt er beim Aufbewahren schon bei Zimmertemperatur in großen perlmutterglänzenden, federförmigen Krystallen. Er schmilzt bei 102° C und siedet constant und unzersetzt bei 210° C.

Seine Analyse ergab folgende Resultate:

I. 0,1587 Gr. Substanz gaben 15,20 CC feuchten Stickstoff bei 21° C und 742,5 mm Druck.

II. 0,1334 Gr. Substanz gaben 12,2 CC feuchten Stickstoff bei 17° C und 754,5 mm Druck.

III. 0,2186 Gr. Substanz gaben 0,5198 Gr. CO_2 und 0,2301 Gr. H_2O.

	Berechnet für $C_7H_{15}NO$	Gefunden		
		I.	II.	III.
C	65,12	—	—	64,94 pCt.
H	11,63	—	—	11,74 »
N	10,85	10,65	10,53	

Diese Zahlen führen zu dem unerwarteten Ergebniß, daß der Körper dieselbe Zusammensetzung hat, wie das angewandte Acetoxim, während die Eigenschaften beider Substanzen so verschieden wie möglich sind. Daß auch die Moleculargrößen identisch sind, beweisen die folgenden Dampfdichtebestimmungen:

Die Bestimmungen geschahen nach der Methode von V. und C. Meyer im Thymoldampf:

I. 0,0464 Gr. Substanz verdrängten 8,8 CC Luft bei 24°,5 C und 741,3 mm Druck.

II. 0,0508 Gr. Substanz verdrängten 9,8 CC Luft bei 24°,5 C und 741,3 mm Druck.

III. 0,0396 Gr. Substanz verdrängten 7,55 CC Luft bei 24°,5 C und 741,3 mm Druck.

Dampfdichte

berechnet für $C_7H_{15}NO$		gefunden
	I.	4,70
4,47.	II.	4,62
	III.	4,67.

Legt man sich die Frage nach der Constitution des entstandenen Körpers vor, so drängt sich zunächst der Gedanke auf, daß das Oxim, ähnlich dem Kamphoroxim, Wasser verliere und einen nitrilartigen Körper

$$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}\!\!>\!\underset{H}{C} - C - C\!<\!\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} \quad (\text{mit } \diagdown N \diagup)$$

erzeugt habe; dies wäre ein sogenanntes »Meta-Nitril.«

Da aber nach den zahlreichen jetzt vorliegenden Erfahrungen nicht mehr bezweifelt werden kann, daß Metanitrile unbeständig sind und sich da, wo sie entstehen können, immer sogleich verändern (man denke an die Ketine, das Isoindol u. s. w.), so konnte das hypothetische Product im vorliegenden Falle sogleich wieder Wasser aufgenommen und dann ein Hydrat

$$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}\!\!>\!\underset{H}{C} - \underset{\underset{NH}{\|}}{C} - \underset{\underset{OH}{|}}{C}\!<\!\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}$$

geliefert haben. Diese Formel sollte zunächst geprüft werden.

Man versuchte Salze der neuen Base darzustellen. Allein, obwohl in Säure leicht löslich und durch Alkalien aus der Lösung wieder fällbar, giebt sie weder mit Salzsäure noch mit Platinchlorid, weder mit Schwefelsäure noch mit andern Säuren irgend faßbare Derivate. Es wurde dann versucht, die Imidgruppe mittelst salpetriger Säure nachzuweisen.

Jedoch man erhielt kein Nitrosoderivat. Eine überraschende Aufklärung brachte endlich das Verhalten bei der hydrolytischen Spaltung. Kocht man die Base andauernd mit concentrirtem alkoholischen Kali, oder erhitzt man sie mit Salzsäure in zugeschmolzenem Rohre, so wird sie glatt in

Isobuttersäure und Isopropylamin

gespalten. Die Isobuttersäure wurde mit Wasserdampf übergetrieben, in's Kalksalz übergeführt und dieses analysirt. Die Analyse ergab:

0,3405 Gr. des bei 150° getrockneten Salzes gaben 0.2574 Gr. $BaSO_4$.

	Berechnet für $(C_4H_7O_2)_2Ba$	Gefunden
Ba	44,07	44,43 pCt.

Das Isopropylamin wurde als Platinsalz isolirt, dessen Analyse zu folgendem Ergebnisse führte:

0,5988 Gr. des Platindoppelsalzes gaben nach dem Glühen 0,2260 Gr. Platin.

	Berechnet für $(\frac{CH_3}{CH_3}>CH - NH_2 . HCl)_2 PtCl_4$	Gefunden
Pt	37,74	37,17 pCt.

Um sicher zu sein, daß die vorliegende Säure nicht normale, sondern Isobuttersäure sei, wurde die bekannte Kalksalzprobe vorgenommen, welche in unzweideutiger Weise für Isobuttersäure entschied.

Welches ist nun die Constitution dieses schönen und durch seine Bildungsweise so merkwürdigen Körpers?

Die obengenannte Spaltung, im Verein mit der überraschenden Entdeckung E. Beckmann's über die Einwirkung von Fünffach-Chlorphosphor auf das Diphenylacetoxim läßt darüber kaum einen Zweifel übrig. Beckmann hat gezeigt, daß das Diphenylacetoxim mit Chlorphosphor nicht, wie man erwarten sollte, das Chlorid

$$\begin{array}{c} C_6H_5 - C - C_6H_5 \\ \| \\ N - Cl \end{array}$$

erzeugte, sondern daß es — durch eine der überraschendsten intramolekularen Umlagerungen — in das diesem isomere Benzanilidchlorid

$$\begin{array}{c} C_6H_5 - C = N - C_6H_5 \\ | \\ Cl \end{array}$$

übergeht; dieses liefert, mit Wasser zersetzt, dann Benzanilid.

In derselben Weise liefert unser Oxim durch Sprengung der Kohlenstoffbindungen und Ersatz derselben durch Stickstoff-Kohlenstoffverkettung das

Isopropylamid der Isobuttersäure,

d. h. die Verbindung

$$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}>C(NOH) - C<\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}$$

verwandelt sich in das isomere

$$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}>C - CO - NH - CH<\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}$$

und nichts anderes als dies ist der von uns beschriebene flüchtige und krystallisirbare Körper. Daß sich derselbe aus dem als Zwischenproduct entstandenen Aether

$$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}>C - C(N - O - C_2H_5O) - C<\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}$$

bildet, steht fest. Welcher Art aber der Verlauf der Atomverschie-

bung ist, das bleibt hier so dunkel, wie bei der Beckmann'schen Entstehungsweise des Benzanilidchlorids.

Ist die oben entwickelte Ansicht die richtige, so mußte sich der neue Körper leicht durch Synthese erhalten lassen, und um dies zu constatiren, haben wir die

Einwirkung von Isobutyrylchlorid auf Isopropylamin

studiert. Die erste Aufgabe, welche sich hierbei stellte, war die

Gewinnung von Isopropylamin.

Diese bisher so schwer zugängliche Base kann ohne Schwierigkeit unter Benutzung der Beobachtungen von Emil Fischer, Tafel und namentlich von Heinrich Goldschmidt gewonnen werden. Der letztere hat ganz kürzlich gezeigt, daß die Oxime, mit $2^1/_2$procentigem Natriumamalgam in alkoholisch-essigsaurer Lösung reducirt, Amine geben.

Nun ist kaum irgend ein Oxim so leicht darstellbar, als das schön krystallirende Dimethylacetoxim, $CH_3-C(NOH)-CH_3$. Durch Reduction desselben, nach der Methode von H. Goldschmidt, erhielten wir das für die Versuche erforderliche Isopropylamin in genügender Menge, um die Synthese zu ermöglichen. Eine ätherische Lösung von Isopropylamin verwandelt sich mit Isobutyrylchlorid ganz glatt in eine Verbindung, welche in Ansehen, Löslichkeit und Siedepunkt, sowie chemischen Eigenschaften mit unserer Base durchaus identisch ist.

Die Frage nach der Natur dieser Base ist somit in entscheidender Weise beantwortet. Was aber noch der Aufklärung bedarf, ist der folgende Punkt: Wie mitgetheilt, entsteht außer der farblosen, krystallisirenden und völlig geruchlosen Verbindung stets ein Oel von intensivstem Alkaloidgeruche. Ueber die Natur dieser Base Hypothesen anzustellen ist leicht, dieselben zu beweisen aber schwierig, da, wie gesagt, die Base nur in geringer Menge entsteht und von dem Rest an Krystallen, welchen sie noch aufgelöst enthält, vorläufig nicht hat befreit werden können. Die Frage nach der Natur dieser basischen Substanz soll den Gegenstand weiterer Untersuchungen bilden, welche in hiesigem Laboratorium in Angriff genommen werden.

Schließlich sei bemerkt, daß es Eigenthümlichkeit der Oxime mit tertiären Wasserstoffatomen ist, Reactionen, wie die hier beschriebenen, zu geben. Die Oxime:

$\frac{CH_3}{CH_3}>CH-C(NOH)-CH_3$ und $\frac{CH_3}{CH_3}>CH-C(NOH)-C_6H_5$ [1])

(Isopropylmethylacetoxim) (Isopropylphenylacetoxim)

verhalten sich ganz analog; sie geben Substanzen von basischem Character anstatt den zu erwartenden Acetyläther oder neben diesem. Dagegen werden die Oxime des Benzophenons und Acetophenons

$C_6H_5-C(NOH)-C_6H_5$ und $C_6H_5-C(NOH)-CH_3$

durch Chloracetyl einfach in Acetyläther verwandelt. Der erstere ist schon vor Jahren von E. Spiegler im Laboratorium des einen von uns in Zürich dargestellt worden. Die letztere Verbindung hat Herr Rattner im hiesigen Laboratorium dargestellt; sie bildet Krystalle, welche (aus Ligroin umkrystallisirt) bei 53° schmelzen, und ergab bei der Analyse:

0,141 Gr. Substanz lieferten 10,2 CC feuchten Stickstoff bei 15° C und 745 mm Druck.

	Berechnet für $C_6H_5-C(N-O-C_2H_3O)-CH_3$	Gefunden
N	7,91	8,29 pCt.

Göttingen, Universitäts-Laboratorium.

Zur Kenntniß einiger Metalle.

Von

Victor Meyer.

Bei Anlaß der pyrochemischen Untersuchungen, mit welchen einige meiner Schüler und ich jetzt wiederum beschäftigt sind, ist

---

1) Das Isopropylphenylacetoxim, dargestellt von Herrn Rattner, bildet (aus Ligroin umkrystallisirt) Blättchen, welche bei 58° schmelzen. Bei der Analyse lieferten

0,1113 Gr. Substanz 8,3 CC feuchten Stickstoff bei 16° und 764 mm Druck.

	Berechnet für $\frac{CH_3}{CH_3}>CH-C(NOH)-C_6H_5$	Gefunden
N	8,64	8,74 pCt.

Acetylchlorid wirkt auf Isopropylphenylacetoxim sehr heftig. Wird, wie oben beim Diisopropylacetoxim, verfahren, so erhält man (außer viel Harz) wenige Krystalle, die bei 115° schmelzen und einen basischen Charakter zeigen.

Wurde während der Reaction das Acetylchlorid abgekühlt, so entstand ein Gemisch aus dem Acetyläther und unverändertem Oxim.

eine Anzahl vereinzelter Beobachtungen über verschiedene Metalle gemacht worden, welche hier kurz mitgetheilt werden mögen.

I. *Schmelzpunkt des Magnesiums.*

Der Schmelzpunkt des Magnesiums wird in den Lehrbüchern zu ca. 500° angegeben. Von einem Fabrikanten dieses Metalls wurde ich darauf aufmerksam gemacht, daß jene Angabe mit vielen in der Fabrikation gemachten Beobachtungen im Widerspruche stehe und ich veranlaßte daher Herrn Alexander Meyer zu einer neuen Schmelzpunktsbestimmung. Dieselbe ergab, daß Magnesium, in einer Wasserstoffatmosphäre gleichzeitig mit kleinen Proben von Bromnatrium erhitzt, noch nicht schmilzt, wenn dieses Salz vollkommen flüssig ist, und es folgt daher, daß der Schmelzpunkt des Magnesiums über 700° C liegt. Erhitzt man Magnesium in einer Atmosphäre von reinem Wasserstoff neben reiner wasserfreier Soda (in getrennten Schiffchen) auf starke Rothgluth, so kann man sich überzeugen, daß beide annährend gleich schmelzen; es gelang einmal den Schmelzversuch in dem Augenblicke zu unterbrechen, als die Soda zum kleinen, das Magnesium zum größeren Theile geschmolzen war. Da Soda bei 800° schmilzt, so liegt demnach der Schmelzpunkt des Magnesiums zwischen 7- und 800° und man wird kaum fehl gehen, wenn man ihn als sehr nahe unter 800° liegend bezeichnet.

II. *Destillation und Reinigung von Quecksilber.*

Gewöhnlich wird angenommen, daß Quecksilber sich durch bloße Destillation nicht völlig reinigen lasse. Ich selbst habe früher gefunden, daß eine dreimalige Destillation in rohem Quecksilber noch erhebliche Verunreinigungen zurück läßt. Es entstand daher die Frage, ob die Dämpfe des Quecksilbers die fremden Metalle mit überreißen, ähnlich wie es bei der Destillation mit Wasserdampf geschieht, oder ob die Metalle mechanisch mit verspritzt werden. Um diese Frage zu prüfen, habe ich gemeinschaftlich mit Herrn Dr. Daccomo einige Versuche angestellt. Quecksilber wurde absichtlich mit einer Anzahl Metalle (gleichzeitig mit Blei, Wismuth, Zinn, Natrium und Kupfer) vermischt und das Gemisch zunächst aus einer porzellanenen, dann aus einer Glasretorte wiederholt destillirt. (So lange das Metall noch sehr unrein war, wurden die Glasretorten jedesmal zerstört, so daß anfangs die Destillation aus Porzellan, erst später aus Glasgefäßen vorgenommen wurde). Hierbei ergab es sich, daß nach 12 Destillationen keine Spur eines Rückstandes in der Glasretorte blieb. Das nun übergehende Quecksilber enthielt aber

auch keine fremden Metalle mehr beigemengt, sondern war völlig rein. Dies wurde durch folgenden Versuch bewiesen: ca. 2 Gr. wurden in Salpetersäure gelöst, die Lösung im gewogenen Platintigel verdampft und geglüht. Das Gewicht des Tigels blieb unverändert.

Für die rasche, vollkommene Reinigung des Quecksilbers dürfte indessen trotzdem der bekannte Weg der Ueberführung in das Oxydulnitrat und dessen Reinigung durch wiederholtes Umkrystallisiren vorzuziehen sein.

III. *Versuche über Flüchtigkeit der Germaniums.*

In seiner schönen Arbeit über das Germanium giebt Winkler an, daß dies Metall nicht weit über seinem Schmelzpunkte (ca. 900°) flüchtig zu sein scheine. Dies veranlaßte mich, in Gemeinschaft mit Herrn Justus Mensching die Dampfdichtebestimmung des Germaniums zu versuchen. Auf meine Bitte übersandte uns Herr Winkler eine erhebliche Probe des unschätzbaren Metalles in reinen, glänzenden Stückchen. Wir haben die Dampfdichtebestimmung in Porzellanbirnen bei ca. 1350° C sowohl in Wasserstoff- als in Stickstoffgas versucht, allein keine irgend nennenswerthe Verflüchtigung des Metalls erzielen können. Der neue Grundstoff ist daher doch wohl erheblich weniger flüchtig als angenommen wird, wenn auch, nach den Beobachtungen Winkler's, eine thatsächlich stattfindende geringe Verdampfung desselben nicht bezweifelt werden kann.

Nach einer gefälligen Privatmittheilung des Herrn Nilson hat dieser in Gemeinschaft mit Herrn Pettersson ähnliche Beobachtungen gemacht. In einer Kohlensäure-Atmosphäre konnten sie selbst bei ca. 1500° C das Germanium nicht reichlich genug verflüchtigen, um seine Dampfdichte zu bestimmen. — Porzellan scheint von Germanium nicht angegriffen zu werden. Platin wird dagegen, wie wir uns, ganz in Uebereinstimmung mit Winkler, überzeugt haben, sehr leicht von dem geschmolzenen Metalle durchgefressen.

IV. *Versuche über Verdampfung von Magnesium.*

Bei diesem Anlaß seien noch einige Bemerkungen über Versuche zur Bestimmung der Dampfdichte des Magnesiums gestattet. Herr Mensching und ich haben — ebenso wie schon vor 8 Jahren Carl Meyer und ich — zu diesem Zwecke viele Versuche unternommen, die aber immer scheiterten. Läßt man Magnesium in eine mit Stickstoff gefüllte weißglühende Porzellanbirne fallen, so entwickeln sich, infolge einer plötzlich eintretenden Temperaturstei-

gerung — einige Glasblasen, und gleich darauf steigt die Flüssigkeit rasch zurück. Diese Erscheinung ist leicht zu erklären, da Stickstoff sich mit Magnesium verbindet. Auf dieses bekannte Phänomen ist offenbar die plötzliche Temperatursteigerung zurückzuführen. Wendet man eine Atmosphäre von Wasserstoff an, so findet keine Verdampfung und keine Temperatursteigerung statt. Man kann sich aber leicht überzeugen, daß das Porzellan stark angegriffen wird.

Wir haben daher schließlich versucht, das Magnesium im Platinapparate, dessen Boden mit gebrannter Magnesia bedeckt war, zu verflüchtigen. Eine Wasserstoffatmosphäre konnten wir, da natürlich starke Diffusion durch die Platinwandungen stattfinden mußte, nicht anwenden. Da Stickstoff ausgeschlossen ist und auch glühende Kohlensäure durch Magnesium unter Abscheidung von Kohle reducirt wird, so blieb schließlich kaum etwas anderes übrig, als eine Atmosphäre von Kohlenoxyd anzuwenden.

Wir arbeiteten bei beginnender Weißglühhitze, aber es konnte keine nennenswerthe Verflüchtigung des Magnesiums erzielt werden. Die Versuche, die Dampfdichte des Magnesiums zu bestimmen, müssen daher vorläufig wohl als aussichtslos bezeichnet werden.

Schließlich sei bemerkt, daß

Antimon

oberhalb 1300° recht reichlich, aber doch nicht rasch genug verdampft, um eine Gasdichtebestimmung zu ermöglichen. Wir sind daher mit der Construction eines Ofens beschäftigt, welcher uns hoffentlich erlauben wird, die Dampfdichte dieses Grundstoffs bei 1600° C zu bestimmen.

Göttingen, Universitäts-Laboratorium.

Ein Satz aus der Determinantentheorie.

Von

P. Drude.

Herr Prof. Voigt hat in Wied. Ann. Bd. 16 p. 314 den Satz aufgestellt, daß sich eine Determinante von folgender Form stets in die Summe zweier Quadrate zerlegen lasse:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}, & a'_{11}, & a_{21}, & a'_{21}, & \dots & a_{n1}, & a'_{n1}, \\ a'_{11}, & -a_{11}, & a'_{21}, & -a_{21}, & \dots & a'_{n1}, & -a_{n1}, \\ a_{12}, & a'_{12}, & a_{22}, & a'_{22}, & \dots & a_{n2}, & a'_{n2}, \\ a'_{12}, & -a_{12}, & a'_{22}, & -a_{22}, & \dots & a'_{n2}, & -a_{n2}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{1n}, & a'_{1n}, & a_{2n}, & a'_{2n}, & \dots & a_{nn}, & a'_{nn}, \\ a'_{1n}, & -a_{1n}, & a'_{2n}, & -a_{2n}, & \dots & a'_{nn}, & -a_{nn}, \end{vmatrix}$$

Herr Prof. Voigt hat mich aufgefordert, den von mir gefundenen Beweis hierfür sowie die Darstellung der Argumente jener Quadrate mitzutheilen.

Die Determinante D kann angesehen werden als das Resultat der Elimination der Variabeln $x_1, x'_1, \dots x_n, x'_n$ aus den Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{array}{l} a_{11} x_1 + a'_{11} x'_1 + a_{21} x_2 + a'_{21} x'_2 + \dots + a_{n1} x_n + a'_{n1} x'_n = 0 \\ a'_{11} x_1 - a_{11} x'_1 + a'_{21} x_2 - a_{21} x'_2 + \dots + a'_{n1} x_n - a_{n1} x'_n = 0 \\ a_{12} x_1 + a'_{12} x'_1 + a_{22} x_2 + a'_{22} x'_2 + \dots + a_{n2} x_n + a'_{n2} x'_n = 0 \\ a'_{12} x_1 - a_{12} x'_1 + a'_{22} x_2 - a_{22} x'_2 + \dots + a'_{n2} x_n - a_{n2} x'_n = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{1n} x_1 + a'_{1n} x'_1 + a_{2n} x_2 + a'_{2n} x'_2 + \dots + a_{nn} x_n + a'_{nn} x'_n = 0 \\ a'_{1n} x_1 - a_{1n} x'_1 + a'_{1n} x_2 - a_{2n} x'_2 + \dots + a'_{nn} x_n - a_{nn} x'_n = 0 \end{array}$$

Es ist gleichgültig, ob die a reell oder complex sind. Der Bequemlichkeit des Ausdrucks halber möge vorausgesetzt werden, daß sie nur reelle Werthe haben. Dann kann man die x auch als reell annehmen. Man setze nun:

$$x_h + i\, x'_h = \xi_h, \quad a_{hk} - i\, a'_{hk} = \alpha_{hk},$$
$$x_h - i\, x'_h = \xi'_h, \quad a_{hk} + i\, a'_{hk} = \alpha'_{hk},$$

wobei $i^2 = -1$ bedeutet, so werden die Gleichungen (1) zu

$$\begin{array}{l}
\alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{11}\xi_1' + \alpha_{21}\xi_2 + \alpha_{21}'\xi_2' + \;.\;.\; + \alpha_{n1}\xi_n + \alpha_{n1}'\xi_n' = 0 \\
\alpha_{11}\xi_1 - \alpha_{11}'\xi_1' + \alpha_{21}\xi_2 - \alpha_{21}'\xi_2' + \;.\;.\; + \alpha_{n1}\xi_n - \alpha_{n1}'\xi_n' = 0 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\;\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\;\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\alpha_{1n}\xi_1 + \alpha_{1n}'\xi_1' + \alpha_{2n}\xi_2 + \alpha_{2n}'\xi_2' + \;.\;.\; + \alpha_{nn}\xi_n + \alpha_{nn}'\xi_n' = 0 \\
\alpha_{1n}\xi_1 - \alpha_{1n}'\xi_1' + \alpha_{2n}\xi_2 - \alpha_{2n}'\xi_2' + \;.\;.\; + \alpha_{nn}\xi_n - \alpha_{nn}'\xi_n' = 0.
\end{array} \tag{2}$$

Durch paarweise Addition bezw. Subtraction dieser Gleichungen folgt:

$$\begin{array}{ll}
\alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{21}\xi_2 + \;.\;.\; + \alpha_{n1}\xi_n & = 0 \\
\alpha_{12}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \;.\;.\; + \alpha_{n2}\xi_n & = 0 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\
\alpha_{1n}\xi_1 + \alpha_{2n}\xi_2 + \;.\;.\; + \alpha_{nn}\xi_n & = 0 \\
\qquad\qquad \alpha_{11}'\xi_1' + \alpha_{21}'\xi_2' + \;.\;.\; + \alpha_{n1}'\xi_n' & = 0 \\
\qquad\qquad \alpha_{12}'\xi_1' + \alpha_{22}'\xi_2' + \;.\;.\; + \alpha_{n2}'\xi_n' & = 0 \\
\qquad\qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\;\cdot \quad \cdot & \\
\qquad\qquad \alpha_{1n}'\xi_1' + \alpha_{2n}'\xi_2' + \;.\;.\; + \alpha_{nn}'\xi_n' & = 0
\end{array}$$

Diese so gewonnenen linearen Gleichungen sind mit den ursprünglichen (1) völlig äquivalent und da sie aus ihnen durch ganze lineare Operationen gewonnen sind, so kann sich die durch Elimination der ξ entstehende Determinante Δ von D nur durch einen numerischen Factor unterscheiden. Es besteht also die Gleichung:

$$D = k \,.\, \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & . & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & . & \alpha_{n2} \\ . & . & . & . \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & . & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \,.\, \begin{vmatrix} \alpha_{11}' & \alpha_{21}' & . & \alpha_{n1}' \\ \alpha_{12}' & \alpha_{22}' & . & \alpha_{n2}' \\ . & . & . & . \\ \alpha_{1n}' & \alpha_{2n}' & . & \alpha_{nn}' \end{vmatrix} \tag{3}$$

Der Werth von k ergiebt sich sofort, wenn man die α' sämmtlich gleich Null setzt. Dann wird:

$$\alpha_{\lambda h} = \alpha_{\lambda h}' = a_{\lambda h}$$

und es folgt

$$k = \pm 1.$$

Die gestrichenen griechischen Buchstaben sind conjugirt zu den ungestrichenen, aus der Gleichung (3) folgt daher, daß sich D in die Summe zweier Quadrate zerlegen läßt, deren Argumente den reellen, resp. imaginären Theil der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{21}, & . & a_{n1} \\ a_{12}, & a_{22}, & . & a_{n2} \\ . & . & . & . \\ a_{1n}, & a_{2n}, & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

bilden.

Hieraus ergiebt sich sogleich das Bildungsgesetz der Argumente A und A' jener beiden Quadrate. Man setze symbolisch:

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{21}, & . & a_{m1}, \\ a_{12}, & a_{22}, & . & a_{m2}, \\ . & . & . & . \\ a_{1m}, & a_{2m}, & . & a_{mm} \end{vmatrix} = (a_1\, a_2 \,..\, a_m)$$

und

$$a_p \,.\, (a_q\, a_r) = (a_p\, a_q\, a_r).$$

Die Determinante D der $2n$ten Ordnung sei bezeichnet mit D_n, sodaß ist:

$$\pm\, D_n = A_n^2 + A_n'^2.$$

Es besteht dann die Gleichung:

$$(A_{n+1} + i\,A'_{n+1}) = (A_n + i\,A'_n)\,(a_{n+1} + i\,a'_{n+1})$$

das heißt:

$$(4)\qquad \begin{aligned} A_{n+1} &= A_n \,.\, a_{n+1} - A'_n \,.\, a'_{n+1} \\ A'_{n+1} &= A'_n \,.\, a_{n+1} + A_n \,.\, a'_{n+1} \end{aligned}$$

Hierbei bedeutet $A_n \,.\, a_{n+1}$ kein wirkliches Produkt, sondern oben definirtes Symbol; um dasselbe zu berechnen, muß man A_n in den Determinanten $n$ter Ordnung ausdrücken.

Die allgemeinen Formeln für die A sind folgende:

$$(5)\qquad \begin{aligned} A_n &= \sum_{0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}_m (-1)^m \quad S_{2m}\ (a_1\, a_2\, .\,.\, a_n) \\ A'_n &= \sum_{1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}{}_m (-1)^{m-1}\, S_{2m-1}\, (a_1\, a_2\, .\,.\, a_n) \end{aligned}$$

Dabei bedeutet $S_k\ (a_1\, a_2\, .\,.\, a_n)$ die Summe der $\binom{n}{k}$ verschiedenen Determinanten $n$ter Ordnung, welche man erhält, wenn man an die Stelle von k der a's die a' mit demselben Index setzt.

$\left[\frac{n}{2}\right]$ bedeutet die größte in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl. Es ergiebt

sich leicht, daß die Anzahl der Determinanten n^{ter} Ordnung, aus denen sich A_n und A'_n zusammensetzen, bei beiden gleich und zwar gleich 2^{n-1} ist.

Der Beweis der Formeln (5) kann vermöge der Formeln (4) durch den Schluß von n auf $n+1$ geführt werden.

Aus der Definition der S folgt zunächst die Gleichung:

$$S_{2m}(a_1 a_2 \ldots a_n) \,.\, a_{n+1} + S_{2m-1}(a_1 a_2 \ldots a_n) \,.\, a'_{n+1} = S_{2m}(a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1}) \qquad (6)$$

Aus (4) und (5) folgt, wenn man

$$S_0(a_1 a_2 \ldots a_n) \,.\, a_{n+1} = (a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1})$$

von den übrigen Gliedern abtrennt:

$$A_{n+1} = S_0(a_1 a_2 \ldots a_{n+1}) + \sum_{1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}_m (-1)^m S_{2m}(a_1 a_2 \ldots a_n) \,.\, a_{n+1}$$
$$+ \sum_{1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}{}_m (-1)^m S_{2m-1}(a_1 a_2 \ldots a_n) \,.\, a'_{n+1}.$$

Die beiden $\sum$ enthalten eine gleiche oder um 1 verschiedene Anzahl von S, je nachdem n grade ist oder nicht.

Denn es ist bei gradem n:

$$\left[\frac{n}{2}\right] = \left[\frac{n+1}{2}\right],$$

bei ungradem n:

$$\left[\frac{n}{2}\right] + 1 = \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

Bei gradem n erhält man daher unter Benutzung von (6) sofort:

$$A_{n+1} = \sum_{0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}{}_m (-1)^m S_{2m}(a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1}), \qquad (7)$$

bei ungradem n folgt:

$$A_{n+1} = \sum_{0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}_m (-1)^m S_{2m}(a_1 a_2 \ldots a_{n+1}) + (-1)^{\frac{n+1}{2}} S_n(a_1 a_2 \ldots a_n) \,.\, a'_{n+1}.$$

Es ist aber

$$S_n(a_1 a_2 \ldots a_n) = (a'_1 a'_2 \ldots a'_n)$$

d. h. bei ungradem n ergiebt sich dieselbe Formel für A_{n+1} wie bei gradem.

Aus (4) und (5) folgt für A'_{n+1}:

$$A'_{n+1} = \sum_{0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}_m (-1)^m S_{2m}(a_1 a_2 \ldots a_n) \,.\, a'_{n+1} + \sum_{1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}{}_m (-1)^{m-1} S_{2m-1}(a_1 a_2 \ldots a_n) \,.\, a_{n+1}$$

$$= \sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1} (-1)^{m-1} S_{2m-2}(a_1 a_2 \ldots a_n) \cdot a'_{n+1} + \sum_{m=1}^{\left[\frac{n+1}{1}\right]} (-1)^{m-1} S_{2m-1}(a_1 a_2 \ldots a_n) \cdot a_{n+1}$$

d. h. für ungrades n, da dann:

$$\left[\frac{n}{2}\right] + 1 = \left[\frac{n+1}{2}\right] = \left[\frac{n+2}{2}\right]$$

ist, folgt wiederum unter Anwendung der Gleichung (6)

$$A'_{n+1} = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n+2}{2}\right]} (-1)^{m-1} S_{2m-1}(a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1}) \tag{8}$$

Für grades n dagegen ist:

$$A'_{n+1} = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^{m-1} S_{2m-1}(a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1}) + (-1)^{\frac{n}{2}} S_n(a_1 a_2 \ldots a_n) \cdot a'_{n+1}$$

d. h. auch derselbe Ausdruck, wie in (8).

Die Gleichungen (7) und (8) zeigen, daß die Gleichungen (5) richtig für $n+1$ sind, wenn sie es für n sind. Da dies für $n = 1$ offenbar der Fall ist, so ist somit die Richtigkeit der Formeln (5) bewiesen.

Es ergeben sich folgende Gleichungen für specielle Werthe des n:

$$A_1 = (a_1) = a_1$$

$$A'_1 = (a'_1) = a'_1$$

$$A_2 = (a_1 a_2) - (a'_1 a'_2)$$

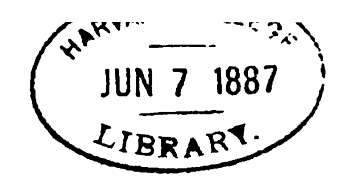
$$A'_2 = (a_1 a'_2) - (a'_1 a_2)$$

$$A_3 = (a_1 a_2 a_3) - (a_1 a'_2 a'_3) - (a'_1 a_2 a'_3) - (a'_1 a'_2 a_3)$$

$$A_4 = (a'_1 a_2 a_3) + (a_1 a'_2 a_3) + (a_1 a_2 a'_3) - (a'_1 a'_2 a'_3)$$

u. s. fort.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).



Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg - Augusts - Universität

zu Göttingen.

4. Mai. | № 7. | 1887.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 5. März.

Es legen vor:

1. von Koenen »Ueber die ältesten und jüngsten Tertiärbildungen bei Kassel«
2. Meyer: 1. von J. Mensching und sich »Beschreibung eines Pyrometers«.
   2. von sich »Ueber eine chemische Eigenschaft Carbonyl- und cyanhaltiger Benzylverbindungen«.
3. Merkel eine Abhandlung des Herrn Prof. Marmé »Neuere Untersuchungen über die Wirkung des Cytisinnitrats«.
4. Riecke: 1. von sich »Zwei Fundamentalversuche zur Lehre von der Pyroelektricität«.
   2. von Herrn Dr. Krüger »über den galvanischen Widerstand dünner Metallschichten.

Ueber die ältesten und jüngsten Tertiärbildungen bei Kassel.

Von

A. von Koenen.

Vor mehreren Jahren hatte ich Gelegenheit gefunden, festzustellen[1]), daß die Eisensteine vom Hopfenberge und von Hohenkirchen nördlich von Kassel unter dem Rupelthon liegen und somit nahezu ein Aequivalent der Braunkohlen von Aebtissinhagen bei Kaufungen sind. Ich hatte daran die Bemerkung geknüpft, daß jener reiche

---

1) Nachrichten der Kgl. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen 1883 S. 346

Eisenstein somit auch im Liegenden des Rupelthones zu suchen sein würde, der bei Harleshausen in größerer Ausdehnung zu Tage tritt.

In Folge dessen wurden von Bergwerks-Interessenten Bohrlöcher und Schurfschächte in dem von mir bezeichneten Gebiete hergestellt, und in der That das Vorhandensein von Eisenstein unter dem Rupelthon in der Nähe des »Erlenloch's« und nördlich vom »Hühnerberge« bis zu 1,2 m. mächtig aufgefunden, und zwar meist auf dem Contakt von Muschelkalk und Tertiärgebirge. Herr Bergwerksdirector Debus hatte die Freundlichkeit, mir u. A. folgende Bohrlochsprofile mitzutheilen:

Am Hühnerberg, an der alten Straße nach Wolfhagen:

1) Dammerde	0,30 m.
2) gelber Letten	0,70 m.
3) schwarzer Sand	1,10 m.
4) weißer Thon	7,93 m.
5) hellbrauner Eisenstein	0,47 m.

Muschelkalk mit einer Kluft, in welche das Bohrgestänge 1,40 m. tief hineinstürzte, und das Wasser des Bohrloches abfloß. Schicht 2 und ev. 3 dürften dem marinen Mittel-Oligocän angehören. Dieses wurde mächtiger angetroffen weiter nördlich:

In der Lieth nahe der neuen Straße nach Dörnberg:

1) gelber Letten	2,29 m.
2) grauer, sandiger Letten	4,30 m.
3) schwarzer Letten	3,50 m.
4) grauer Letten	3,20 m.
5) grauer feiner Sand	2,10 m.
6) fester grauer Thon	6,94 m.
7) schwarzer Sand	4,90 m.
8) weißer Thon	3,20 m.
9) grauer Letten	2,88 m.
10) desgl. mit viel Schwefelkies	0,70 m.

Muschelkalk mit soviel Wasser, daß dasselbe dauernd über Tage ausfloß.

Hier dürften die Schichten 1 bis 7, zusammen 27,14 m. mächtig, dem marinen Mittel-Oligocän angehören, falls nicht der schwarze Sand 7 etwa ein Braunkohlensand ist oder Braunkohlen enthält; in ersterem Falle würden die Braunkohlen dieses Horizontes hier auch fehlen, außerdem aber auch der Eisenstein. Nicht weit von diesem Bohrloch war ein Versuchsschacht, aus welchem ebenfalls oben Wasser ausfloß, und auf dessen Halde, aus grauem Thon bestehend, ich Leda Deshayesiana etc. sammelte.

Etwas weiter östlich ist der bekannte Fundort von marinem

Ober-Oligocän »am Erlenloch bei Harleshausen«, und nach Norden verhüllen die oberoligocänen Quarzsande und Quarzite, augenscheinlich nach Norden einfallend, alles Aeltere.

Vor einiger Zeit hatte ich nun Veranlassung, mir die ungünstig aufgeschlossenen Braunkohlen-Ablagerungen nördlich von Kassel genauer anzusehen, welche von der »Möncheberger Gewerkschaft« schon seit längeren Jahren ausgebeutet werden.

Ebert[1]) hatte dieselben auf Grund der ihm gemachten Angaben wohl zu den untermiocänen Braunkohlen rechnen müssen und die dortigen Sande mit denjenigen in Verbindung gebracht, welche sich über Simmershausen und Rothwesten nach Hohenkirchen hinziehen.

Im vorigen Herbst wurde nun südwestlich vom Bahnhofe Jhringshausen, auf der westlichen Seite der Chaussee nach Kassel, angefangen, einen Schacht abzuteufen, nachdem ein Bohrloch nach gütiger Mittheilung des Herrn Betriebsführer Schulz folgende Schichten angetroffen hatte:

1) Dammerde 0,5 m.
2) feiner grauer Sand 2,5 m.
3) Trieblehm 4,8 m.
4) gelber und grauer Thon 2,4 m.
5) scharfer, heller Sand 3,4 m.
6) Flußgerölle 1,4 m.
7) Kohle 0,5 m.
8) schwarzer Letten 0,56 m.
9) Kohle 4 m.
10) etwas Sand und festes Gestein, vermuthlich Quarzit.

Ein Bohrloch (No. V) etwa 1000 Meter nordnordwestlich von hier und etwa 500 Meter westnordwestlich von Jhringshausen, am Stockwege, hatte dagegen angetroffen:

1) Lehm 3,6 m.
2) thoniger Sand 7,4 m.
3) Kohlenmulm 0,4 m.
4) Thon 7,4 m.
5) Mulm 0,9 m.
6) schwarzer Letten 0,6 m.
7) Kohle 4,5 m.
8) darunter Sand.

Der jetzige Förderschacht I, etwa 1000 Meter südlich von Bahnhof Jhringshausen hat durchteuft:

---

1) Zeitschr. d. deutsch. geol. Ges. 1881 S. 654 u. 677 und Dissert. Gött. 1882 S. 20 u. 33.)

1) Lehm	1 m.
2) grauer Thon	12 m.
3) grauer Sand	0,3 m.
4) Kohle	3 m.
5) weißer Sand mit etwas Quarzit, bis	1 m.
6) Thon	2,5 m.
Röth	

der daneben befindliche Schacht II traf dagegen unter der Kohle

5 { Quarzit 1 m.
Sand 5 m.

6 Letten 0,85 m.

Röth.

Auf der Schachthalde fand ich nun in größerer Ausdehnung grauen Thon mit Bruchstücken von Kalkgeoden und Bruchstücken von Conchylien folgender Arten:

Leda Deshayesiana Duch.
Venericardia tuberculata Münst.
Astarte Kickxii Nyst.
Cyprina rotundata Al. Braun?
Fusus elongatus Nyst.

Von diesen genügt aber namentlich die erste Art schon, um den Thon als Rupelthon, als Mittel-Oligocän zu bezeichnen.

Leider konnte Niemand angeben, ob dieser Thon über oder unter der Kohle anstände, da der Schacht schon vor längeren Jahren hergestellt worden war. Ich vermuthe aber, daß es der obere, 12 Meter-mächtige Thon (Schicht No. 2) ist, theils weil der Rupelthon mächtiger zu sein pflegt, als die unbedeutende Thon- resp. Lettenschicht No. 6 unter der Kohle, theils, weil über dem Rupelthon und unter der Kohle in der ganzen Gegend das marine Ober-Oligocän und mächtige Quarzsande zu liegen pflegen.

Die Kohle vom Möncheberg ist daher wohl gleichaltrig mit der von Aebtissinhagen, Kaufungen, Lichtenau, Hohenkirchen etc.

Auf der Halde lagen aber auch in größerer Zahl Flußgerölle, wie sie in den dicht daneben befindlichen Thongruben unter dem Lehm und über dem Thon sichtbar sind. Es sind dies meist 2 bis 5 cm. große, verschieden gefärbte Kieselschieferstücke, Quarzstücke und innen helle Buntsandsteingerölle etc., besonders letztere öfters über faustgroß.

Nach gütiger Mittheilung des Herrn Schulz steht diese Gerölle-Schicht aber in Verbindung mit derjenigen, welche in dem zuerst angeführten Profile 1,4 m. mächtig (Schicht No. 6) unmittelbar auf der oberen Kohle liegt, indem der Thon nach Norden hin schnell an

Mächtigkeit abnimmt und auf die Gerölle sich dafür Sand auflegt. Der Thon ist somit stark erodirt.

Die Gerölle sind nun ganz gleichartig denjenigen, welche die Fulda noch jetzt mit sich führt, indem die Edder ihr Gerölle paläozoischer Gesteine aus der Gegend von Berleburg, Frankenberg und Waldeck zuführt.

Solche Gerölle sind aber in den oberoligocänen und miocänen Tertiärbildungen des mittleren Deutschland's noch nie beobachtet worden und können auch nicht wohl in denselben erwartet werden, da in jenen Perioden die jetzigen Flußthäler noch nicht existirten, vielmehr die Kuppen des Habichtswaldes, des Meißner, des Hirschberges, des Hohehagen bei Dransfeld und andere mehr damals ohne Zweifel eine zusammenhängende Fläche bildeten und noch nicht durch Thäler und weite Niederungen von einander getrennt waren; nur so kann es erklärt werden, daß einerseits die Tertiär-Ablagerungen an diesen Stellen eine so übereinstimmende Gliederung erhielten, und daß namentlich solche Massen gleichartigen Sandes, oft genug mit Quarz- und Kreide-Geröllen, in solchem Niveau zur Ablagerung gelangten, und zwar mindestens theilweise durch das oberoligocäne Meer.

Die »Flußgerölle« und alles darüberliegende, namentlich der helle Sand (No. 5) und der Thon (No. 4) des Profils am Bahnhof Jhringshausen sind somit jünger, als die übrigen, oligocänen und miocänen Tertiärbildungen der Gegend von Kassel. An Alluvialbildungen kann man dabei schon wegen ihrer Lage bis zu 60 Meter über dem jetzigen Spiegel der Fulda nicht wohl denken, und von solchen sowie auch von Diluvialbildungen jener Gegend unterscheiden sich die Thone und hellen Sande ihrem Aussehen nach recht erheblich.

Dagegen finden sich im oberen Gebiete der Fulda, bei Hersfeld, Fulda etc., wie ich dies früher angeführt habe (Jahrbuch der Kgl. preuß. geolog. Landes-Anstalt pro 1883 S. 193), ziemlich verbreitet helle Quarz-Sande und Fulda-Gerölle, (dort natürlich noch ohne Kieselschiefer) sowie Thone und auch Braunkohlen (Rhina bei Neukirchen) pliocänen Alters, bei Fulda mit Mastodon-Zähnen, und es wird hierdurch die Annahme gerechtfertigt, daß auch die Gerölle und die darüber liegenden Thone und Sande von Möncheberg dem Pliocän zuzurechnen sind. Es wird dies aber um so wahrscheinlicher, als das Pliocän bei uns auch sonst mehrfach durch fluviatile Ablagerungen vertreten ist, ja anscheinend nur durch solche vertreten wird. Ich erinnere hierbei an die Ausführungen Sandberger's (Binnenkonchylien der Vorwelt S. 656, 658, 749, 750) und an die wichtige Arbeit von K. von Fritsch über »das Pliocän im Thalgebiet der zahmen Gera« (Jahrb. d. kgl. preuß. geolog. Landes-Anstalt pro 1883 S. 193)

Es ist somit das oligocäne Tertiärgebirge bei Jhringshausen stark durch die Fulda der Pliocän-Zeit erodirt worden.

Vermuthlich gehört zum Pliocän aber auch der Kohlenmulm, welcher in dem Bohrlochsprofil No. V über dem Thon (Schicht No. 4) angetroffen wurde, da, wie oben erwähnt, die miocänen Kohlen hier nicht unmittelbar über dem Rupelthon und unter dem Pliocän zu liegen pflegen.

Es würden sich dann in der Umgegend von Kassel mindestens vier verschiedene Braunkohlenhorizonte finden, nämlich

1) der eben erwähnte pliocäne,
2) der mittelmiocäne, zwischen Basalt resp. Basalt-Tuff,
3) der untermiocäne unter dem Basalt und Basalt-Tuff, aber über den mächtigen Quarz-Sanden und dem marinen Ober-Oligocän.
4) der zuerst erwähnte, unter dem Rupelthon.

Ein im vorigen Herbst ausgeführtes Bohrloch an der Fulda, 100 Meter südlich von der Eisenbahn nach Waldkappel traf unter Auelehm und ca. 4,5 m. Kies auf ein 2 m. mächtiges Braunkohlenflötz und dann bis zu 29 m. Tiefe auf dunkelblauen Thon. Diese Kohlen sind ihrer Lage nach wohl eher für diluvial aber gar alluvial zu halten, und dasselbe gilt wohl von einem anderen Vorkommen an derselben Bahnlinie dicht vor dem Dorfe Waldau, wo unter dem Kies mächtiger blauer Thon folgte, dann 0,25 m. grober Sand durch Schwefelkies verkittet, dann mooriger Boden und Reste von Braunkohle bis zu 30 m. Tiefe.

Beschreibung eines Pyrometers.

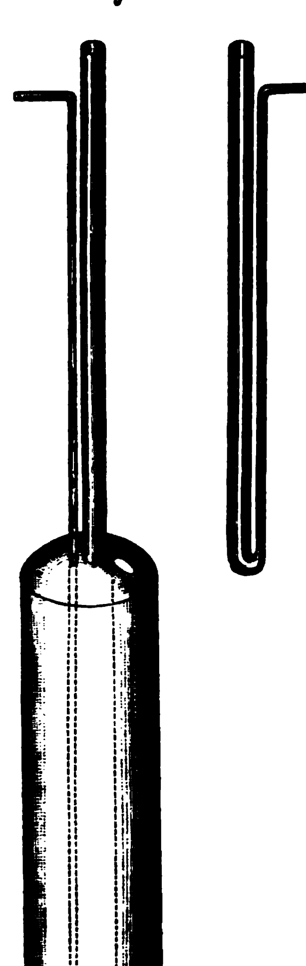
Von

Justus Mensching und **Victor Meyer.**

Im Laufe unserer pyrochemischen Untersuchungen stellte sich das Bedürfniß nach einem Dampfdichtebestimmungsapparat heraus, welcher eine genaue und zugleich bequeme, rasch auszuführende Messung der Versuchstemperatur gestattet. Dieser Bedingung entspricht das gleichzeitig von Crafts und F. Meier sowie von Victor Meyer und H. Züblin beschriebene Verfahren — Verdrängung der im Apparat und in einem »Compensator« erhaltenen Luft — bezw. Stickstoffmenge durch Kohlensäure oder Salzsäure — nur im Punkte der Genauigkeit vollkommen. In Bezug auf die Raschheit der Ausführung läßt es dann zu wünschen, wenn der Apparat zugleich zur Ausführung einer Dampfdichtebestimmung dienen soll. Denn

die Nothwendigkeit, die bis auf den Boden des Apparates führende Gaszuführungsröhre herauszuziehen und dem entsprechend den Kopf des Apparates umzuändern, bedingt einerseits eine, bei hellglühender Röhre nicht ganz einfache Operation, andererseits macht sie es unmöglich, den Apparat bei der Dampfdichtebestimmung mit reinem Stickstoff gefüllt zu erhalten; das Eindringen von etwas Luft beim Herausziehen der Röhre und beim Wechseln des Kopfes ist ganz unvermeidlich.

Es ist uns nun gelungen, einen Apparat zu construiren, der den angegebenen Bedingungen genügt. Die Temperaturmessung führen wir auch jetzt nach dem eben erwähnten Principe aus. Man ermittelt den Gasinhalt des Apparates einerseits bei abgelesener Zimmertemperatur, andererseits bei der Versuchstemperatur, und aus der Vergleichung beider Gasvolume ergiebt sich die gesuchte Temperatur. Das Compensatorrohr zur Unschädlichmachung der kühl bleibenden Theile des Apparates, findet auch hier Anwendung. Eine Beschreibung des für diese Zwecke eingerichteten Apparates, die Art und Weise des Operirens und einige für die Temperaturbestimmungen nothwendige Correctionen sollen im Folgenden näher auseinander gesetzt werden.



Das aus Platin gefertigte Dampfdichtebestimmungsgefäß (s. Figur) besteht aus einem Cylinder von 200mm Höhe und 36mm Durchmesser, an welchen ein engeres 350mm langes und (im Lichten) 4mm weites Platinrohr angesetzt ist; neben diesem Rohr befindet sich noch eine starkwandige Platincapillare von 1mm lichter Weite, welche durch den Deckel bis 3mm über den unteren Boden verläuft und deren oberes Ende in der Länge von 40mm rechtwinklich umgebogen ist. Während bei den früheren Versuchen das Verdrängen des Stickstoffs mittelst eines andern Gases, das leicht durch Absorption von

Stickgas getrennt werden kann, dadurch bewirkt wurde, daß durch den Hals des Dampfdichtebestimmungsgefäßes bis auf den Boden der Birne eine dickwandige Platincapillare geführt wurde, welche, um nach der Messung der Temperatur eine Dampfdichtebestimmung auszuführen, im gelbglühenden Zustande herausgezogen werden mußte, fällt diese lästige Operation bei unserem neuen Apparate fort. Es ist außerdem noch ein unten geschlossener Cylinder von 180^{mm} Länge und 8^{mm} Durchmesser luftdicht in den Apparat eingelassen.

Der für die Temperaturbestimmungen nothwendige Compensator besteht aus einem Platinrohre nebst Capillare, welche am unteren Ende mit einander communiciren; diese besitzen genau dieselben Dimensionen wie das Aufsatzrohr des Hauptapparates nebst Capillare bis zum Deckel, sind also von dem gleichen Inhalte wie die nicht zur Birne gehörigen Theile. Alle Löthungen sind vor dem Knallgasgebläse mit reinem Platin bewirkt, so daß der Apparat weder Gold noch irgend eine andere Substanz außer Platin enthält. Der aus sehr starkwandigem Bleche gefertigte Apparat, welcher uns nach unseren Zeichnungen und Angaben von der Firma Johnson, Matthey & Co. in London geliefert ist, hat ein Gesammtgewicht von 375 g., nämlich: das eigentliche Versuchsgefäß 288 g, der Compensator 87 g.

Die Aufsätze für Apparat und Compensator mit dem Gasentbindungsrohr, welche natürlich ganz gleich sein müssen, sind von Glas gefertigt und unterscheiden sich in keiner Weise von den sonst bei Dampfdichtebestimmungen nach dem Luftverdrängungsverfahren gebräuchlichen. Die oberen Enden der Stiele werden mittelst Kautschukschlauch mit den gläsernen Gasentbindungsröhren verbunden und, um die nöthige Festigkeit und sicheren Verschluß zu erhalten, mit Kupferdrathligaturen versehen. Der Compensator wird seiner ganzen Länge nach, mit Platindrath derartig an den Halstheil des Hauptapparates befestigt, daß das untere Ende den Deckel der Birne berührt, sodaß die oberen Spitzen sich in gleicher Höhe befinden.

Die Dichte- und Temperaturbestimmungen wurden, sobald die Temperatur die Rothglühhitze erreicht hatte, stets in reinstem Stickgase ausgeführt, da die Luft auf die in Betracht kommenden Substanzen wesentlich einwirkt. Der Stickstoff wurde durch Kochen einer Lösung von 1 Th. Natriumnitrit, 1 Th. Salmiak und 1 Th. Kaliumbichromat mit 3 Th. Wasser erhalten und durch wiederholtes Leiten über glühende Kupferdrehspähne und Durchleiten durch frisch bereitete Chromchlorür und alkalische Pyrogallussäurelösung von jeder Spur Sauerstoff befreit. Der in den Apparat eingelassene Hohlcylinder hat für die jetzigen Publikationen keine Bedeutung, sondern

ist für die Ausführung weiterer Arbeiten bestimmt, auf welche wir am Schlusse dieser Abhandlung nochmals zurückkommen werden.

Vor dem von Nilson und Pettersson angegebenen Apparate hat der unserige, außer viel größerer Einfachheit und Bequemlichkeit noch den Vortheil, daß mehrere Bestimmungen in Kohlensäure oder Stickstoff hinter einander ausgeführt werden können.

Zur Erhitzung des Apparates bei hohen Temperaturen diente, sowohl ein großer Perrot'scher Gasofen, als auch ein im Souterrain des hiesigen chemischen Laboratoriums befindlicher, mit dem Hauptschornstein in Verbindung stehender Schmelzofen von beträchtlichen Dimensionen, der mit einem Gemisch von Holzkohlen und Coke geheizt wurde.

Der Perrot'sche Gasofen mit Wiesneg'scher Muffel, welcher aus Paris von V. Wiesneg bezogen ist, hat einen Feuerraum von 500^{mm} Höhe und 300^{mm} Durchmesser, die Muffel aus 15 an den Seiten ineinander geschachtelten Stücken aus Chamotte bestehend, hat eine Höhe von 450^{mm} und einen Durchmesser von 210^{mm}; derselbe gewährt bei gleichmäßigem Gasdrucke eine Zeit lang unveränderliche Temperatur. Die Erhitzung wird durch einen Brenner aus 12 im Kreise angeordneter Röhren, von je 20^{mm} Durchmesser bewirkt, welche sich auf einem Windkessel befinden, in dem die Mischung des Gases mit der, von unten durch vier Löcher, von je 40^{mm} Durchmesser, zugeführten Luft stattfindet; durch einen, unter dem Windkessel angebrachten Schieber kann man die Luftzufuhr nach Belieben reguliren; ferner ist an dem Gaszuleitungsrohre, zwischen Hahn und Brenner, ein Manometer zur Ueberwachung eines gleichmäßigen Druckes angebracht. An dem Ofen befindet sich ein mehrere Meter langes Zugrohr von 150^{mm} Durchmesser, durch welches sowohl die Temperatur im Ofen gesteigert, als auch, durch den heftigen Zug, eine zu große Erwärmung der Luft und der am Apparate befindlichen Kautschukverbindungen, oberhalb des Ofendeckels vermieden wird. Die höchste Temperatur dicht über dem Ofen betrug, wenn derselbe längere Zeit in voller Gluth gehalten wurde, 90° C. An dem Zugrohr ist noch ungefähr in Meter-Höhe eine Klappe angebracht, durch deren Schließen man, nach Beendigung des Versuchs eine langsame Abkühlung des Ofens und der darin befindlichen Apparate bewirken kann.

Dieser verhältnißmäßig große Ofen lieferte uns Temperaturen bis wenig über 1200° C, während der viel kleinere Perrot'sche Gasofen, welchen der Eine von uns in Zürich benutzte, solche bis 1400° C. gewährte. Ob diese verschiedenen Resultate auf den Ofen oder die Gasverhältnisse (Qualität, Leitungen etc.) zurückzuführen sind, darüber sind wir nicht in der Lage, Auskunft ertheilen zu können.

Der oben erwähnte Schmelzofen ist derselbe in welchem die Dampfdichte des Zinks ausgeführt wurde und in den Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen Jahrgang 1887 pag. 9 bereits beschrieben ist.

Durch Verbinden dieses Ofens mit einem Windflügel-Gebläse läßt sich die Temperatur bis ca. 1500° C. steigern. Ueber die mit dem Gebläse angestellten Versuche werden wir demnächst berichten.

Bei den Versuchen, in denen die Füllung des Apparates mit einem bestimmten Gase in der Kälte geschah, wie z. B. mit Kohlensäure, bei den unten beschriebenen Diffusionsversuchen, wurde der Ofen anfangs in der Weise beschickt, daß das Kohlengemisch in kleinen Portionen nachgeschüttet wurde, da bei größeren Mengen durch die bewirkte Abkühlung des kalten Heizmaterials stets ein Zurücksteigen der Sperrflüssigkeit veranlaßt wurde, aus welchem Grunde das Gasentbindungsrohr an einer Stelle zu einer kleinen Kugel aufgeblasen war. (Lothar Meyer Ber. d. D. Ch. Ges. XIII. 991). Erst wenn der Ofen bis in die Höhe des Zuglochs geheizt war, konnte derselbe vollends gefüllt werden. Bei unseren späteren Versuchen haben wir diesen Uebelstand überwunden und einen anderen Weg eingeschlagen, welcher zugleich auch schneller zum Ziele führt.

Nachdem durch ein ganz mäßiges Feuer der Ofen mit den darin befindlichen Apparaten genügend vorgewärmt ist, welches circa eine halbe Stunde beansprucht, werden grobe Holzkohlen aufgeschüttet, welche große Zwischenräume zwischen sich lassen; darauf kommt eine Lage des aus faustgroßen Stücken bestehenden Kohlengemisches und nach kurzer Zeit, wenn das Heizmaterial durchwärmt ist, schichtet man noch einmal erst größere Holzkohlen und dann bis unter den Deckel die eigentliche Feuerung darauf. Ist der Ofen einmal gefüllt, so bedarf es nur von Zeit zu Zeit des Nachschüttens, ohne daß man Gefahr läuft eine Abkühlung, resp. ein Zurücksteigen der Sperrflüssigkeit zu bewirken.

Da, wie St. Claire Deville und Troost gezeigt haben, (Ann. Chem. Pharm. Suppl. II 387) bekanntlich Platin im glühenden Zustande für Wasserstoff und Flammengase vollkommen permeabel ist, dies Metall aber für andere Gase, wie namentlich Luft auch bei Glühhitze ganz undurchdringlich ist, so mußte bei den Versuchen dafür Sorge getragen werden, daß das glühende Platin von den Flammengasen vollständig getrennt sei.

Es geschah dieses in derselben Weise, wie der Eine von uns in Gemeinschaft mit H. Züblin 1879 angegeben hat. (Ber. d. D. Chem. Ges. XII 2204). In die Oefen wurden außen und innen glasirte Berliner Porcellanröhren von 850^{mm} Länge, 40^{mm} lichter Weite und 10^{mm} Wand-

stärke vertical gestellt, so daß sie mit ihrem oberen und unteren Ende aus dem Ofen hervorragen. Im Rost des Schmelzofens befindet sich eine runde Oeffnung, in welche ein mit Sand gefüllter hessischer Tiegel eingesetzt war, durch welchen das Porcellanrohr unten lose verschlossen und im Innern ein Zug nach oben vermieden wird, während beim Arbeiten im Perrot'schen Ofen das eiserne und thönerne Stativ, welche den zu erhitzenden Tiegeln als Unterlage dienen, entfernt war und so das Rohr bis auf den Windkessel des Ofens gestellt werden konnte. Beim Erhitzen wird dann das in der Feuerung befindliche Stück des Rohres gelb- resp. weißglühend, während das obere Ende fast ganz kalt bleibt. Die Oeffnung des, über den Deckel des Ofens hervorragenden Porcellanrohrs, war mit einem trichterförmigen Eisenblechschirm umgeben und, um eine Wärmestrahlung aus dem Rohr zu vermeiden, durch einen in zwei Hälften getheilten Deckel eines hessischen Tiegels verschlossen; in der Mitte dieses Verschlusses befindet sich ein Loch, durch welches der Stiel des Platinapparates mit dem daran befestigten Compensator geht. Nachdem der Apparat zusammengesetzt, wurden durch einen Gipsüberzug sowohl die Deckelhälften fest aneinander gehalten, als auch die Durchbohrung gänzlich geschlossen.

Die Röhren der Berliner Porcellanmanufactur sind von so vorzüglicher Qualität, daß sie nur eine verhältnißmäßig kurze Zeit zum Anwärmen beanspruchen, ohne daß man Gefahr läuft, sie zu zersprengen, und daß man die gleiche Röhre oftmals wieder benutzen kann.

Diese glasirten Porcellanröhren sind für alle Gase absolut undurchdringlich, wie V. Meyer und H. Züblin für Wasserstoff besonders nachgewiesen haben (Ber. d. D. Chem. Ges. XIII pag. 2021), und ist der darin befindliche Platinapparat nur von Luft, also einem durch dieses Metall im glühenden Zustande nicht diffundirenden Stoffe, umgeben.

Es empfiehlt sich, zwischen das Zugrohr des Perrot'schen Ofens und den Hals des Dichtebestimmungsgefäßes noch ein Brett zur Abhaltung der von dem Zugrohr ausgesandten strahlenden Wärme einzuschalten. Wird dies unterlassen, so erwärmt sich der Hals des Apparates langsam ziemlich stark, was zwar ohne endgültigen Nachtheil ist, aber die Unbequemlichkeit mit sich bringt, daß es bedeutend länger dauert, bis der Versuch beginnen kann.

Daß der so zusammengestellte Apparat wirklich absolut gasdicht ist, ist sowohl durch Versuche von Deville und Troost, Victor Meyer und H. Züblin als auch von uns nochmals festgestellt worden.

Durch den im Porcellanrohr befindlichen Platinapparat wurde in der Kälte durch die Platincapillare so lange ein Strom reiner Kohlensäure geleitet, bis alle Luft verdrängt war, also das aus dem Entbindungsrohre austretende Gas von Kalilauge vollständig absorbirt wurde; alsdann auf die höchste Temperatur des Ofens erhitzt und nunmehr von Neuem ein Strom Kohlensäure durchgeleitet, wurde in dem mit Kali gefüllten Gasmeßrohr keine Spur unabsorbirbaren Gases zurückgelassen. Erhitzt man dagegen den Platinapparat ohne die glasirte Porcellanröhre, so diffundirten die Flammengase resp. das Wasserstoffgas des Leuchtgases in ziemlich beträchtlichen Mengen; wir erhielten in Zwischenräumen von 10 zu 10 Minuten, wenn wir, um einen Gegendruck zu vermeiden, den Kohlensäurestrom unterbrachen, 8—10 Ccm eines brennbaren Gases; selbst eine bedeutende Umhüllung mit Chamotte (s. g. Feuercement) verhinderte die Diffusion nicht, sondern verminderte dieselbe nur.

Um die Diffusion der Gase durch die im glühenden Zustande befindlichen Metalle (Eisen und Platin) weiter zu studieren, wurden noch einige Experimente angestellt. Der mit Chamotte umgebene Platinapparat wurde in ein unten geschlossenes gußeisernes Rohr von 350^{mm} Höhe und 65^{mm} Durchmesser gesetzt, welches seinerseits nochmals von einem gußeisernen Cylinder von 110^{mm} Durchmesser umgeben war; die Wandstärke beider Cylinder betrug je 5^{mm} und der äußere größere war noch bis über die Hälfte mit geschmolzenem Blei gefüllt; als dann im Perrot'schen Ofen erhitzt ward, nachdem in dem Apparate in der Kälte die Luft durch Kohlensäure ersetzt war, diffundirten durch das glühende Eisen und Platin noch reichlich Gase, welche mit farbloser Flamme verbrannten.

Außerdem wurde noch folgender Versuch gemacht: Das, in der oben beschriebenen Weise in einem Porcellanrohr befindliche Platingefäß wurde mit reinem Wasserstoffgas gefüllt und, nachdem das Porzellanrohr unten und oben mit geeigneten Verschlüssen, Zu- und Ableitungsröhren versehen, nur mit einer Wasserstoffatmosphäre umgeben, indem nach vollständiger Verdrängung der Luft ein langsamer Strom des Gases beständig durch das Porzellanrohr geleitet wurde. Alsdann ward im Schmelzofen erhitzt und eine Dampfdichtebestimmung chemisch reinen Quecksilbers ausgeführt, welche zunächst ganz normalen Verlauf nahm; dann begann jedoch eine ganz regelmäßige Diffusion des umgebenden Wasserstoffgases, bis durch die allmählige Abkühlung des Ofens und die Verdichtung des Quecksilbers an den oberen kälteren Theilen des Apparates, das Austreten der Gasblasen aufhörte, und, um ein Zurücksteigen der Sperrflüssigkeit zu verhindern, der Versuch unterbrochen werden mußte. Da selbst durch mehrma-

lige Destillation des käuflichen Quecksilbers, dasselbe nicht vollständig rein erhalten werden kann, stellten wir uns für unsere Versuche, solches durch trockne Destillation von einigemal aus salpetersäurehaltigem Wasser umkrystallisirten salpetersaurem Quecksilberoxydul und wiederholte Destillation des Destillates dar (Ber. d. D. Chem. Ges. XI. 2259).

Nachdem durch die ersten Versuche die Anwendbarkeit von Platingefäßen für hohe Temperaturen bei Beobachtung obiger Anordnung aufs Neue erwiesen war, können mit diesem Apparate Dampfdichtebestimmungen mit exacten Temperaturmessungen bei Gelb- und Weißgluth, allerdings nicht höher als bis zum Schmelzpunkt des Berliner Porzellans mit der größten Leichtigkeit ausgeführt werden.

Da durch die Untersuchungen von C. Langer und V. Meyer (Pyrochemische Untersuchungen. Braunschweig Vieweg & Sohn 1885) gezeigt ist, daß der Ausdehnungscoefficient des Sauerstoffs, Stickstoffs, Schwefligsäuregases (Ber. d. D. Chem. Ges. XVIII. 1501) und der Kohlensäure bis 1700° C. constant ist, war die Bestimmung hoher Temperaturen mit diesem Apparate auf luftthermometerischem Wege möglich. Wir verwandten ausschließlich Stickstoff, da wie schon erwähnt, sich dieser am besten von anderen Gasen mittelst Absorption trennen läßt, und er wegen seiner Indifferenz anderen Körpern gegenüber für die Dampfdichtebestimmungen am geeignetsten ist.

Für die Messung der Temperatur ist es nur nothwendig, das Volumen, welches der Apparat, (ausschließlich des Halses, für dessen Inhaltsbestimmung der Compensator diente), bei Zimmertemperatur enthält, und das bei der Versuchstemperatur zu kennen, um aus der Vergleichung beider, letztere zu berechnen. Die Ausführung findet in folgender Weise statt:

An das rechtwinklig umgebogene Ende der Platincapillare wird ein, mit einem Schraubenquetschhahn versehener, dicht anschließender, Kautschukschlauch befestigt, welcher seinerseits mit dem System von Trockenapparaten und Waschflaschen, welche zum Stickstoffgasometer führen, in Verbindung steht. Nachdem alle Luft in dem Apparate durch Stickstoff ersetzt ist, der Apparat durch den Quetschhahn und das unter Wasser tauchende Gasentbindungsrohr luftdicht geschlossen und die Temperatur constant geworden ist, wird über das Gasentbindungsrohr eine in $^1/_{10}$ Ccm. getheilte graduirte Röhre gesetzt, und das Stickgas mittelst trocknem Salzsäuregas verdrängt.

Diese Operation dauert circa 2 Minuten, zur Sicherheit leitet man noch 1 Minute Salzsäure durch, um darauf von Neuem mit Stickstoff zu füllen; dann ist der Apparat sogleich wieder für eine Dampfdichte oder neue Temperaturbestimmung vorbereitet.

Um das Volumen bei Zimmertemperatur zu bestimmen, fehlte es uns an einem genügend großen Meßrohr; wir wandten dann ein gewöhnliches weites Glasrohr an, welches am oberen Ende in eine Capillare ausgezogen, mit Schlauch und Quetschhahn versehn, die Ueberführung in kleinere Röhren unter Wasser mit Leichtigkeit gestattete. Man würde, wenn auf die beschriebene Art und Weise, das Volumen des Apparates bei Zimmertemperatur und unter Berücksichtigung des Barometerstandes, des cubischen Ausdehnungscoëfficienten des Platins etc., bei der Versuchstemperatur bestimmt, unmittelbar die Temperatur berechnen können, wenn nicht die oberen Theile des Versuchsrohrs eine ganz andere Erwärmung erlitten. Um die hier nothwendige Correction anbringen zu können, befindet sich neben dem Halstheil des Hauptversuchsrohrs der anfangs beschriebene Compensator, dessen Volumen in derselben Weise ermittelt wird, wie das des Apparates. Indem man nun die kleinen Mengen Stickstoff, welche sich in dem Compensator, sowohl bei Zimmertemperatur wie bei der Versuchstemperatur befinden, von den betreffenden Mengen im Gesammtapparat abzieht, erhält man genau nur die Volumina der ihrem ganzen Umfange nach der vollen Hitze ausgesetzten Platinbirne, und ebenso den Inhalt, welchen dieselbe bei Zimmertemperatur hat, und kann nun die Versuchstemperatur nach der unten gegebenen Gleichung berechnen.

Zur Verdrängung des Stickstoffs, läßt sich auch Kohlensäure verwenden, wir zogen aber, wie schon bei früheren Versuchen (Crafts und F. Meier, V. Meyer und H. Züblin), die für diese Zwecke bequemere Salzsäure vor, da durch die sofortige Absorption im Wasser, der Endpunkt der Stickstoffaustreibung genau angezeigt wird, andererseits das lästige Operiren mit conc. Kalilauge als Absorptionsflüssigkeit gänzlich vermieden wird, und Salzsäure, wie die Untersuchungen von Crafts und F. Meier bewiesen haben, bei 1500° C. weder eine merkbare Dissociation erleidet, noch Platin angreift. Daß sie bei 1700° C. großentheils zerfällt, haben l. c. Langer und V. Meyer gezeigt.

Da aber die Salzsäure, wie bei genauen Untersuchungen jedes Gas, nicht absolut frei von Spuren von Luft erhalten werden kann, mußte für diese, freilich minimale Verunreinigung noch eine weitere Correction angebracht werden.

Die Salzsäure wurde aus einem Gemisch von 500 g Kochsalz mit 900 g conc. Schwefelsäure und 200 g Wasser entwickelt, welches mit einer kleinen Flamme erwärmt, einen mehrere Stunden andauernden Strom des Gases erzeugt, das vermittelst conc. Schwefelsäure getrocknet wurde. Es ist rathsam, den Entwickler so einzurichten, daß er

nur reichlich die an einem Tage gebrauchte Gasmenge liefert, da nach einer Unterbrechung stets ein stärkeres Erwärmen nothwendig ist, und durch die dann größeren Mengen mitgerissenen Wasserdampfes, das Trocknen des Gases erschwert wird.

Hat man, nachdem alle Luft aus dem Salzsäurekolben vertrieben, die Gasentwicklung möglichst gleichmäßig gestaltet, sammelt man kurz vor und nach dem Versuche, während je 10 Minuten das Gas in einem, in Wasser getauchten Gasmeßrohr besonders auf. Aus diesem, während 20 Minuten erhaltenen Volumen Luft, läßt sich leicht die von dem Hauptvolumen in Abzug zu bringende Menge berechnen (es handelt sich hier nur um Mengen von höchstens 0,1 Ccm); nur muß natürlich beim Austreiben des Stickstoffvolumens eine bestimmte Zeitdauer (2 oder 3 Minuten) genau inne gehalten werden. Bei Temperaturen über 1500° C. ist, wegen der bedeutenden Dissociation der Salzsäure in ihre beiden Componenten, Kohlensäure das einzige Gas, welches zur Verdrängung Anwendung finden kann, und ist auch hier dieselbe Correction nothwendig, da trotz der sorgfältigsten Darstellung Spuren Luft nicht auszuschließen sind. Soll Kohlensäure verwandt werden, so empfiehlt es sich, dieselbe mittelst Zersetzung ausgekochter Sodalösung durch Salzsäure, die man durch einen Tropftrichter einfließen läßt, zu bereiten, welche nach früheren Erfahrungen (Langer u. V. Meyer, Pyrochem. Untersuchungen) weniger Luft enthält, als die reinste Kohlensäure, welche man durch vorsichtiges Erhitzen von Magnesit oder aus festen Metallcarbonaten und Säuren erhalten kann.

Es möge gestattet sein, eine Stelle der citirten Abhandlung hier wiederzugeben: »Nachdem der Kohlensäureapparat eine Zeitlang im Gange war, nahm die Gasentwicklung in demselben einen so gleichförmigen Verlauf, daß während längerer Zeit die Zahl der Blasen, welche in einer gewissen Minutenzahl austraten, die gleiche blieb. Um daher die Menge der beigemischten Gasspuren genau kennen zu lernen, ließen wir bei dem eigentlichen Versuche die Kohlensäure stets die gleiche Zahl von Minuten den Apparat passiren. Alsdann ließen wir, je unmittelbar vor und nach dem Experiment, im gleichen Tempo Kohlensäure allein, und zwar je zehnmal so lange, als der Versuch selbst dauerte, durch den Apparat strömen; sammelten das vor und nachher entwickelte Gas in einem und demselben Gefäße über Natronlauge auf, und bestimmten die gewonnene kleine Menge derselben in einem, mit sehr feiner Theilung versehenen, engen Meßrohre. Den zwanzigsten Theil des so gefundenen Volumens brachten wir dann von dem bei der Temperaturbestimmung gefundenen Volumen in Abzug«.

Zur Berechnung der Versuchstemperaturen benutzten wir dieselbe Formel, die in der Abhandlung von H. Goldschmidt und V. Meyer, Berichte der Deutschen chem. Gesellschaft Band XV Seite 141 angegeben, mit der kleinen Abänderung, daß wir die Volumina nicht allein auf 0°, sondern auch auf normalen Barometerstand (760^{mm}) umrechnen. Es ist dann

$$T = \frac{V - v}{v\alpha - V\gamma}$$

$$V_{(0^\circ 760^{mm})} = \frac{(A - a)(b - w_1)(1 + \alpha t)}{760(1 + \gamma t)(1 + \alpha t_1)}$$

$$v_{(0^\circ 760^{mm})} \frac{(H - h)(b_1 - w_2)}{760(1 + \alpha t_2)}$$

In der Formel haben die Buchstaben folgende Bedeutung:

T die gesuchte Versuchstemperatur;
V die Capacität der Platinbirne bei 0° u. 760^{mm} Barometerstand;
v der in dem erhitzten Apparate enthaltene Stickstoff, trocken und bei 0° und 760^{mm} Barometerstand gedacht;
α der Ausdehnungscoëfficient des Stickstoffs (0,00367);
γ der cubische Ausdehnungscoëfficient des Platins (0,000027)[1];
A der Stickstoffinhalt des ganzen Apparates bei der Zimmertemperatur (t), feucht gemessen bei dem Barometerstande des Versuchs (b) und der Temperatur des Wassers (t_1);
a der Stickstoffinhalt des Compensators unter den gleichen Bedingungen;
H Stickstoffinhalt des ganzen Apparates bei der Versuchstemperatur, feucht gemessen bei dem Barometerstande des Versuchs (b_1) und der Temperatur des Wassers (t_2);
h Inhalt des Compensators unter denselben Bedingungen;
w_1 und w_2 die Werthe der Tension des Wasserdampfes bei den Temperaturen t_1 und t_2.

Um uns von der Genauigkeit der Versuche mit dem neuen Apparate zu überzeugen, bestimmten wir zunächst den Siedepunkt des Wassers und den des Naphtalins, indem wir diese Körper in unten erweiterten Cylindern erhitzten und in den Dampf das Versuchsrohr einführten.

1) Dieser cubische Ausdehnungscoëfficient wurde den Angaben der Literatur entnommen, entbehrt aber großer Genauigkeit, da bei den in Betracht kommenden Temperaturen derselbe noch unsicher ist. Diese Unsicherheit haftet zur Zeit allen luftthermometrischen Messungen bei Weißgluth an. Ich beabsichtige in einer besonderen Untersuchung den Ausdehnungscoefficienten bei Weißgluth zu bestimmen. Victor Meyer.

Die zur Controle und unserer Uebung angestellten Temperaturmessungen ergaben folgende Werthe:

Erster Versuch.

Siedepunktsbestimmung des Wassers.

A. Stickstoffinhalt des Apparates bei Zimmertemperatur.

Zimmertemperatur	17° C.
Corrigirtes Stickstoffvolumen (d. h. Stickstoffvolumen nach Abzug der oben genannten spurenweisen Verunreinigungen), feucht gemessen	199,73 ccm
Temperatur des feucht gemessenen Stickstoffs . .	17,5° C.
Barometerstand	734,5 mm
Stickstoff im Compensator	7,4 ccm

B. Stickstoffinhalt des Apparates bei der Versuchstemperatur.

Corrigirtes Stickstoffvolumen, feucht gemessen . .	157,3 ccm
Barometerstand	733,5 mm
Temperatur des feucht gemessenen Stickstoffs . .	18° C.
Inhalt des Compensators	6,7 ccm
Hiernach berechnet sich die Temperatur zu . . .	99,4° C.

Zweiter Versuch.

Siedepunktsbestimmung des Naphtalins.

C. Stickstoffinhalt des Apparates bei der Versuchstemperatur.

Corrigirtes Stickstoffvolumen, feucht gemessen . .	117,9 ccm
Temperatur des feucht gemessenen Stickstoffs . .	16° C.
Barometerstand	744 mm
Inhalt des Compensators	5,8 ccm

Temperatur = 216,89° C. (Nach den zuverlässigsten Angaben ist der Siedepunkt des Naphtalins zu 217° bestimmt.)

Wir bestimmten sodann noch die höchsten Temperaturen, sowohl des Perrot'schen Ofens, als die des Schmelzofens, bei denen wir in letzterer Zeit Dampfdichtebestimmungen ausgeführt haben.

Dritter Versuch.

Temperatur im Perrot'schen Ofen.

D. Stickstoffinhalt des Apparates bei Zimmertemperatur.

Zimmertemperatur	11° C.
Corrigirtes Stickstoffvolumen, feucht gemessen . .	215,8 ccm[1])
Temperatur des feucht gemessenen Stickstoffs . .	12° C.
Barometerstand	754 mm
Stickstoff im Compensator	9,4 ccm[1])

1) Durch die Beschädigung des Apparates sahen wir uns veranlaßt, den-

E. Stickstoffinhalt des Apparates bei der höchsten Temperatur des Perrot'schen Ofens.

Corrigirtes Stickstoffvolumen, feucht gemessen . .	44,66 ccm
Barometerstand	762 mm
Temperatur des feucht gemessenen Stickstoffs . .	16° C.
Inhalt des Compensators	4 ccm

Temperatur = 1224° C.

Vierter Versuch.

Temperatur im Kohlen-Schmelzofen.

F. Stickstoffinhalt des Apparates der im Schmelzofen erhaltenen höchsten Temperatur.

Corrigirtes Stickstoffvolumen	43,5 ccm
Barometerstand	754 mm
Temperatur des feucht gemessenen Stickstoffs . .	12° C.
Inhalt des Compensators	5,5 ccm

Temperatur = 1321° C.

Es könnte auffällig erscheinen, daß bei der im Schmelzofen um ca. 100° höheren Temperatur, das Volumen des ausgetriebenen Stickstoffs fast gleich, und das des Compensators um 1,5 ccm größer ist, als beim Versuch im Perrot'schen Ofen; dieses hat darin seinen Grund, daß die Glasaufsätze bei den beiden Versuchen nicht von derselben Länge waren.

Zum Schluß müssen wir nochmals auf einen schon am Anfang dieser Abhandlung erwähnten Umstand zurückkommen. Es ist uns bis jetzt kein Apparat bekannt, welcher gestattet, Schmelzpunktbestimmungen bei hohen Hitzegraden zugleich mit exacten Temperaturmessungen vorzunehmen; wir beabsichtigen mit Hülfe unseres Apparates, demnächst derartige Versuche anzustellen; indem wir in den eingelassenen Hohlcylinder die zu untersuchende Substanz geben, bis zum Schmelzpunkt erhitzen und die Temperatur bestimmen.

Dampfdichte des Jodkaliums.

Mit Hülfe des beschriebenen Apparates haben wir in reinstem Stickstoff oberhalb 1300° C. im beschriebenen Schmelzofen die Dampfdichte des Jodkaliums bestimmt, welche zu der Molecularformel KJ stimmt.

Das Jodkalium wurde in Form eines Stäbchens ohne Eimerchen

---

selben umarbeiten zu lassen, und erhielt derselbe etwas andere Dimensionen als bei den ersten Versuchen angegeben.

angewandt, und befand sich bis zum Constantwerden der Temperatur, in dem ebenfalls mit reinstem Stickstoff gefüllten Warteraum der Mahlmann'schen Fallvorrichtung (Ber. d. D. chem. Ges. XVIII 1624).

Nach Beendigung des ersten Versuches, welcher vollkommen normal verlief, wurde schnell Stickstoff durch den Apparat geleitet und eine zweite Bestimmung ausgeführt, welche gleich gute Resultate ergab.

Enthält der Stickstoff die geringsten Spuren Luft, so ist der Versuch vollständig illusorisch, da dann reichlich Joddämpfe auftreten. Nur mit dem neuen Apparate, welcher ohne Herausziehen der Platinröhre und entsprechendes Hineinreißen von Luft zu arbeiten erlaubt, sind daher brauchbare Resultate zu erzielen. Beim Arbeiten mit den älteren Apparaten, erhält man wohl auch gelegentlich für die Formel KJ stimmende Zahlen, doch ist dies lediglich Folge des Zufalls, wenn nämlich, bei abnormaler Vergasung und theilweiser Verdampfung von K_2O neben KJ, das Deficit an verdrängtem Gas durch den entwickelten Dampf des theilweise dissociirten Jods gerade ausgeglichen wurde.

Wir erhielten bei völlig normal verlaufendem Versuch folgende Resultate:

I. Versuch

Substanz 0,0534 Volumen 7,3^{ccm} Barometer 767^{mm} Temperatur 9° C.

II. Versuch

Substanz 0,0570 Volumen 7,8^{ccm} Barometer 767^{mm} Temperatur 9° C.

	I	II	
Gefundene Dichte	5,85	5,85	Berechnet für KJ = 5,75.

Göttingen, Universitäts-Laboratorium.

Ueber eine chemische Eigenschaft Carbonyl- und cyanhaltiger Benzylverbindungen.

Von

Victor Meyer.

Daß durch den Eintritt stark negativer Gruppen Wasserstoffatome des Grubengases sauer, d. h. durch Metalle vertretbar gemacht werden können, ist zuerst in vereinzelten Fällen, nämlich bei der Knallsäure, der Dilitursäure und dem Nitroform, beobachtet worden. Daß die Erscheinung eine allgemeine ist zeigte ich im Jahre 1872, indem ich nachwies, daß Wasserstoffatome, die sich am gleichen Koh-

lenstoffatom mit einer Nitrogruppe befinden, immer durch Metalle vertretbar sind. Alle primären und secundären Nitrokörper erkannte ich demgemäß als Säuren, während die tertiären sich indifferent erwiesen.

Die Forschungen von Wislicenus und von Conrad zeigten später, daß allgemein der Wasserstoff einer CH oder CH_2 Gruppe vertretbar ist, wenn diese sich zwischen 2 CO-Gruppen befindet. Die großartigen synthetischen Erfolge, welche diese letzteren Ermittelungen hatten, haben merkwürdigerweise kaum Veranlassung dazu gegeben, zu prüfen, ob andre negative Gruppen der Nitrogruppe oder den Carbonyl-Gruppen ähnlich zu wirken vermögen. Zwar hat Henry gezeigt, daß das Malonitril 2 Atome Silber aufnimmt, um die Verbindung: $CN - CAg_2 - CN$ zu bilden, auch liegen Untersuchungen von Lovén über gewisse Sulfofettsäurederivate vor; allein etwas weiter abliegende Probleme über die Wirkung negativer Radicale sind nicht in Angriff genommen worden.

Ich habe mir die Frage vorgelegt, ob nicht die Phenylgruppe, deren Negativität durch die saure Natur des Phenols und durch die abgeschwächte Basicität, welche das Di- und Triphenylamin gegenüber dem Anilin zeigen, bewiesen ist, eine ähnliche Wirkung haben möchte, wie die CO-Gruppen. Den ersten Versuch stellte ich in Gemeinschaft mit Herrn Studiosus Oelkers über das Desoxybenzoïn an, und es zeigte sich sogleich, daß dieser Körper die Reaktionsfähigkeit des Acetessigesters und des Malonsäureesters vollkommen theilt, obwohl seine Structurformel: $C_6H_5 - CH_2 - CO - C_6H_5$ zeigt, daß er die Methylengruppe nur mit einem CO in Verbindung enthält. Die Darstellung des Methyl-, Aethyl-, Butyl- und Benzyldesoxybenzoïns, welche genau ebenso leicht und nach ganz denselben Methoden erhalten werden, wie die homologen Acetessig- und Malonsäureester, belehrte uns von der großen Reaktionsfähigkeit des Körpers. Die betreffenden Substanzen sind schön krystallisirende Körper, welche eben so charakteristische Hydroxylaminderivate liefern. Herr Oelkers wird über alle diese Verbindungen eingehend berichten.

Entfernt man die eine der beiden Phenylgruppen des Desoxybenzoïns und setzt an deren Stelle Wasserstoff, so resultirt das Acetophenon, $CH_3 - CO - C_6H_5$, dessen Prüfung aber dadurch erschwert wird, daß es durch Natriumäthylat sowie Natrium in sehr hoch siedende Condensationsproducte verwandelt wird.

Von großem Interesse war es, das Verhalten des Dibenzylketons: $C_6H_5 - CH_2 - CO - CH_2 - C_6H_5$, welches sich ja vom Desoxybenzoïn nur durch Einschiebung einer Methylengruppe unter-

scheidet, zu prüfen. Dasselbe giebt sehr leicht ein gut krystallisirtes Benzylderivat. — Nach den beim Desoxybenzoïn gemachten Erfahrungen war zu vermuthen, daß der Phenylessigaether $C_6H_5 - CH_2 - COOC_2H_5$, in welchem die Methylengruppe zwischen C_6H_5 und CO steht, reaktionsfähig sein würde. Versuche des Herrn Stud. Alexander Meyer zeigten aber, daß dies, wenigstens unter den gewöhnlichen Bedingungen, nicht der Fall ist; dagegen ist der Dinitrophenylessigaether befähigt — ähnlich dem Nitroäthan, dem Acetessigäther und dem Malonsäureäther — mit Diazoverbindungen zu reagiren und so z. B. mit Diazobenzolchlorid das hübsch krystallisirende

$$C_6H_5 - N = N - \underset{\underset{C_6H_3(NO_2)_2}{|}}{\overset{\overset{COOCH_3}{|}}{CH}}$$

zu liefern.

Sehr wichtig erschien es mir, die beiden Verbindungen

$$C_6H_5 - CH_2 - COOC_2H_5 \text{ (Phenylessigäther)}$$

und

$$C_6H_5 - CH_2 - CN \text{ (Benzylcyanid)}$$

mit einander zu vergleichen. Während der erstere, wie erwähnt nicht reaktionsfähig ist, gibt der zweite mit Natriumaethylat und Chlorbenzyl das schön krystallisirende, destillirbare benzylirte Benzylcyanid:

$$C_6H_5 - \underset{\underset{\underset{C_6H_5}{|}}{CH_2}}{\overset{}{CH}} - CN$$

und erweist sich also die Cyangruppe entschieden negativer als die Gruppe $COOC_2H_5$. Allein das Verhalten des Benzylcyanids unterscheidet sich doch in einem Punkte von dem des Desoxybenzoïns; während dieses glatt und vollständig in Homologe verwandelt wird, bleibt beim Benzylcyanid ein Theil unangegriffen, so daß also die gemeinschaftliche Wirkung einer Phenyl- und einer Cyangruppe derjenigen zweier Phenyl- und einer Carbonyl-Gruppe doch nicht ganz äquivalent ist.

Die Thïenylgruppe wirkt der Phenylgruppe gleich. Das dem Desoxybenzoïn entsprechende Keton $C_4H_3S - CO - CH_2 - C_6H_5$ (von Herrn Stud. Pampel dargestellt) reagirt ebenso leicht wie Desoxybenzoïn und liefert gut krystallisirende Derivate. Vergleichende Versuche, welche der beiden einander so sehr ähnlichen Gruppen

Thïenyl und Phenyl die stärker negative ist, werden sich auf diesem Wege vielleicht anstellen lassen.

Aber noch zahlreiche andere Fragen sind durch die hier mitgetheilten Beobachtungen augeregt. Wie verhält es sich mit der Wirkung mehrerer, gleichzeitig in die Essigsäure eingeführter Phenylgruppen? Die Prüfung des Diphenylessigsäureesters wird hierüber Auskunft geben. Dagegen ist kaum zu bezweifeln, daß das Benzoïn sich dem Desexybenzoïn anschließen wird. Auch die Wirkung des Mandelsäureäthers ist zu untersuchen. Vergleichende Versuche über die Wirkung der Naphtyl-, der isomeren Tolylgruppen u. s. w. sind anzustellen, und es ist zu prüfen, wie die Phenylengruppe sich verhält. Die Einwirkung von Diazokörpern und salpetriger Säure auf die als reaktionsfähig erkannten Körper bleibt zu untersuchen. Ja, der Gedanke, daß vielleicht 2 oder 3 Phenylgruppen allein, ohne gleichzeitige Anwesenheit einer Carbonyl-Gruppe acidificirend wirken können, liegt nahe. Versuche, ob sich nicht die aliphatischen Wasserstoffatome des Di- und namentlich des Triphenylmethans unter geeigneten Bedingungen durch Alkyle substituiren lassen, sind bereits begonnen. Ich möchte indessen die zahlreichen weiteren Fragen, welche sich nach dem obigen von selbst aufdrängen, nicht weiter ausspinnen, sondern diese kurze Mittheilung mit der Bemerkung abschließen, daß eine Anzahl meiner Schüler mit dem Studium jener Probleme beschäftigt ist.

Göttingen, Universitäts-Laboratorium.

Neuere Untersuchungen über die Wirkung des Cytisinnitrat.

Von

W. Marmé.

Der K. Gesellschaft d. Wissenschaften habe ich im Jahre 1871[1]) die Ergebnisse einer experimentellen Untersuchung vorgelegt, welche ich mit dem Nitrat des Cytisin, des wirksamen Bestandtheils von Cytisus Laburnum L. ausgeführt hatte. Dieses Cytisin haben weiland August Husemann und ich gemeinschaftlich im Jahre 1864 dar-

---

1) Nachrichten d. K. Gesellschaft d. W. v. 1871. S. 24–44.

gestellt[1]). Eine Vervollständigung, beziehungsweise Berichtigung der früheren Mittheilung erlaube ich mir auf Grund neuer Untersuchungen, die ich im vorigen Sommersemester unternommen habe, aber wegen Erkrankung lange unterbrechen mußte, im Nachstehenden vorzulegen. Zugleich mache ich darauf aufmerksam, daß E. Merck in Darmstadt (Katalog v. Januar 1887) das intensiv giftige Cytisin zum ersten Mal fabrikmäßig dargestellt hat. Das käufliche Präparat bildet, wie ich aus einer direct bezogenen Probe ersehe, schöne, harte, kaum gelblich gefärbte Krystalle, deren wässrige Lösung nur sehr schwach sauer reagirt. Diese letztere Eigenschaft ist um so höher zu schätzen weil das Cytisin, wie Aug. Husemann[2]) hervorgehoben hat, sehr große Neigung zeigt übersättigte Verbindungen einzugehen. Merck theilt hinsichtlich der Wirksamkeit seines Präparates mit, daß schon mit 1,6 mg desselben Professor Kobert einen Hund getödtet habe. Weitere Untersuchungen des Autors werden gleichzeitig in Aussicht gestellt und ein Ergebniß von Experimenten, die Prof. Theod. Husemann mit Mercks Präparat angestellt hat, angeführt. E. Merck fordert endlich zum Versuch einer Verwendung des Cytisinnitrat zu therapeutischen Zwecken auf.

Isolirt haben A. Husemann und ich ursprünglich das Cytisin, indem wir dasselbe aus wässrigen Auszügen unreifer Schoten und reifer Samen des Goldregens mittelst Gerbsäure ausfällten. Die Reindarstellung des Alkaloïds aus dem Tannat ist, wie A. Husemann näher darlegt, umständlich und schwierig. Leichter gewinnt man ein schönes Präparat, wenn man den trocknen und gepulverten Samen, nachdem er von Oel befreit ist, mit verdünntem Spiritus auszieht und nach Entfernung des Weingeistes den wässrigen, angesäuerten Auszug mit Kaliumquecksilberjodid ausfällt und diesen Niederschlag nach dem Verfahren, welches R. Böhm[3]) zur Ausfällung des Cholin benutzt hat, weiter behandelt. Wenn man das Cytisin endlich als Nitrat wiederholt aus Alkohol umkrystallisirt, erhält man ein Präparat, das hinsichtlich seiner Reinheit und Wirksamkeit nichts zu wünschen übrig läßt. Die fabrikmäßige Darstellung des Alkaloïds durch E. Merck ist aber jedenfalls eine dankenswerthe Erleichterung für weitere, und wie ich wünsche recht vielseitige Prüfungen dieser interessanten Pflanzenbase.

---

1) Durch Aug. Husemann's Berufung nach Chur sahen wir uns genöthigt die Fortsetzung der gemeinschaftlich begonnenen Untersuchung in der Weise zu theilen, daß der Chemiker die chemischen ich dagegen die pharmakodynamischen Fragen weiter verfolgte.

2) Neues Jahrbuch f. Pharmacie XXXI S. 1—29.

3) Archiv f. exp Path. u. Pharm. 1885. XIX. 71.

Die dosis toxica und lethalis ist für alle höheren Thiere sehr klein, Hunde unter 10 k Körpergewicht sterben schon wenn 1,5—2 mg in die Jugularvene injicirt werden. Hunde von 10—25 k können größere Dosen Cytisin überstehen. Wird das Cytisinnitrat, wie ich es früher gethan habe, in eine Schenkelvene injicirt, so sind etwas größere Dosen erforderlich. Pflanzenfresser ertragen im Allgemeinen größere Dosen als Fleischfresser. Vergiftungen von Menschen, die unreife Schoten, Samenkörner, Rinde oder Blüthen genossen hatten, sind in den letzten 20 Jahren häufig vorgekommen, aber nur wenige sind tödtlich gewesen. Unter 52 Vergiftungsfällen, die in Virchow-Hirsch's Jahresbericht von 1866—86 mitgetheilt werden und meist Kinder betreffen, endeten nur drei lethal.

Im Allgemeinen läßt sich die Wirkung des Cytisin, wie ich früher dargelegt habe, dahin präcisiren, daß dasselbe zuerst excitirend wirkt, diese Erregung rasch vorübergeht und um so rascher einer Depression oder vollkommenen Lähmung weicht, je größer die zur Wirkung gelangende Giftmenge ist.

In wie weit bei Thieren die Function des Großhirns direct afficirt wird, läßt sich nicht sicher constatiren. Bei schwerer Vergiftung wird, wie aus der Schilderung der vorerwähnten Vergiftungsfälle hervorgeht, die Hirnthätigkeit schon frühzeitig beeinträchtigt. Initiale Aufregung und Lustigkeit ist allerdings bei vergifteten Menschen nur von Rouge in Lausanne gelegentlich einer Vergiftung durch den Genuß von Backwerk, welches Cytisinblüthen enthielt, erwähnt. Unter 14 Vergifteten zeigten nur zwei, welche sehr wenig genossen hatten, Unruhe, Aufregung und Lustigkeit. Sonst werden bei den meisten Vergifteten, namentlich bei der großen Zahl von vergifteten Kindern, die unreife oder reife Schoten mit Samen, oder Samen allein, oder Rinde des Goldregens verzehrt hatten, keine Erregungserscheinungen im Anfangsstadium beobachtet.

Bei fast allen Vergifteten trat unter den Vergiftungserscheinungen neben Störungen der Gehirnthätigkeit Erbrechen auf. Bei Thieren, Hunden und Katzen, wird nach Anwendung giftiger Dosen constant Erbrechen beobachtet und zwar sowohl wenn das Cytisinnitrat innerlich per os applicirt, wie auch, wenn es subcutan oder intravenös injicirt wird. Dem Erbrechen geht ein angestrengtes, aus der Entfernung hörbares und beschleunigtes Athmen vorher. Sind vor der Vergiftung die beiderseitigen Ni. vagi am Halse discidirt, so bleibt das Erbrechen aus. Die Respirationsbewegungen werden dennoch beschleunigt und das Athmen erfolgt auch jetzt keuchend. Bei Menschen, die sich mit Theilen des Cytisus vergiftet hatten, wird gleichfalls Beschleunigung der Athemzüge erwähnt, l. c. 1875 S. 524.

Das Centrum für die Brechbewegungen liegt in der medulla oblongata und hat Beziehungen zu Flourens' Nocud vital, dem dominirenden Athmungscentrum. Durch die subcutane Application des Giftes wird letzteres Centrum, wie das Thierexperiment zeigt, noch vor dem Centrum für die Brechbewegungen erregt. Das Erbrechen wird nach subcutaner Injection des Giftes durch directe Reizung des Brechcentrums in der med. oblongata veranlaßt. Vielleicht kann letzteres auch reflectorisch erregt werden. Jedenfalls tritt auch nach Einführung des Giftes in den Magen fast constant bei Menschen Erbrechen ein. Das Cytisinnitrat zeigt in dieser Beziehung eine ähnliche Wirkungsweise wie das Apomorphinum hydrochloricum. Sehr wesentlich ist aber folgender Unterschied in der Einwirkung beider brechenerregender Substanzen. Mißt man mit Hülfe eines Kymographium den Blutdruck bei einem Hunde in der rechten Schenkelarterie, und injicirt dann subcutan Apomorph. hydrochlor. in emetisch wirkender Dosis, so beobachtet man kurz vor Eintritt des Brechactes eine erhebliche Beschleunigung der Pulsfrequenz und eine geringe Abnahme, jedenfalls keine Steigerung des Blutdrucks. Injicirt man statt des Apomorphin bei einem Hunde subcutan oder intravenös Cytisinum nitricum, so sieht man mit, oder selbst vor der Beschleunigung der Respiration eine beträchtliche Steigerung des Blutdrucks und nicht nur Beschleunigung, sondern auch eine Verstärkung der Herzaction eintreten. Das Cytisin veranlaßt also das Erbrechen durch Reizung des Brechcentrums bei gleichzeitiger Erregung des Respirationscentrums und unter gewaltiger Steigerung des Blutdrucks.

Eliminirt man den Einfluß der gesteigerten Respiration und der Brechbewegungen bei Hunden, indem man dieselben unter Curarewirkung bringt und künstlich respirirt, injicirt man dann Cytisinum nitricum in eine Vene, so zeigt das Quecksilber des Manometer, ganz so wie wenn unter denselben Umständen Strychninnitrat injicirt wird, eine gewaltige Steigerung des Blutdrucks. Das Cytisin wirkt demnach ähnlich wie das Strychnin auf das vasomotorische Centrum. Setzt man einen großen Hund, dessen art. cruralis mit dem Manometer verbunden ist unter die Wirkung von Chloralhydrat und injicirt nun 2 mg Cytisinnitrat intravenös, so sieht man kein oder nur ein unbedeutendes Ansteigen der Quecksilbersäule, weil durch das Chloralhydrat das vasomotorische Centrum in der med. oblong. vorübergehend gelähmt ist. Das Cytisin wirkt demnach erregend auf das vasomotorische Centrum. Wiederholt man denselben Versuch ohne die Thiere vorher durch Curare zu lähmen und ohne Chloralhydrat anzuwenden, so tritt die gewaltige Steigerung des Blutdrucks ganz ebenso ein. Das Cytisin veranlaßt aber nicht die tetanischen

Krämpfe, welche die Injection von Strychnin bei fehlender Curarewirkung zur Folge hat. Die Wirkung auf das vasomotorische Centrum hat Th. Husemann mit dem käuflichen Cytisinpräparat schon erhalten und in Merck's Catalog bereits bekannt gegeben. Ich kann daher diese Wirkung des Cytisin nur bestätigen.

Die tetanisirende Wirkung des Strychnin besitzt das Cytisin nicht. Es zeigt nur eine nicht sehr hochgradig erregende Einwirkung auf das Rückenmark und die motorischen Nerven im Anfangsstadium der Vergiftung von Säugethieren und Amphibien und veranlaßt auch bei vergifteten Menschen bisweilen klonische aber nicht tetanische Krämpfe.

Das Cytisin wirkt aber nicht nur auf das vasomotorische Centrum, sondern auch auf die peripherischen Vasomotoren. Applicirt man auf eine Arterie des Froschmesenteriums einen winzigen Krystall des Cytisinnitrats oder ein Tröpfchen einer völlig neutralisirten Lösung des Giftes, so sieht man, wie ich in der früheren Mittheilung näher ausgeführt habe, eine locale Contraction des Gefäßlumens eintreten. Das Cytisinnitrat kann also durch Erregung des vasomotorischen Centrums und durch locale Einwirkung auf die vasomotorischen Nerven der Gefäße eine hochgradige Verkleinerung der Blutbahn unter gewaltiger Steigerung des Blutdrucks herbeiführen. Die Wirkung des Cytisin auf das vasomotorische Centrum und die vasomotorischen Gefäßnerven kann einen Theil der Symptome, die bei den angezogenen Vergiftungen erwähnt werden, wie allgemeine Blässe, Schwindel, Ohnmachtsanfälle u. a. m. erklären.

Die Verengerung des Blutgefäßlumens ist nicht bedingt durch eine Einwirkung auf die glatten Muskelfasern der Gefäßwand. Diese scheinen dem Cytisin gegenüber unempfindlich zu sein. Es geht dem Cytisin die Wirkung, die dem Eserin, dem wirksamen Bestandtheil des dem Cytisus botanisch nahe stehenden Physostigma venen. zukommt, vollständig ab. Bringt man in den Conjunctivalsack von Katzen Cytisinnitrat, so tritt keine constante Veränderung der Pupille ein. Myosis entsteht auch dann nicht, wenn vorher durch Lähmung der Oculomotoriusäste die Pupille erweitert ist. Bei Menschen wird während einer Cytisinvergiftung bald Mydriasis, bald Myosis beobachtet. Diese Veränderung der Pupille ist aber niemals eine directe Cytisinwirkung. Man darf deshalb auch annehmen, daß die oben erwähnte Verengerung des Blutgefäßlumens nicht durch Einwirkung auf die Muskulatur der Gefäße, sondern durch Einfluß des Cytisin auf die vasomotorischen Nerven bedingt ist.

So lange das vasomotorische Nervensystem unter der intensiven Einwirkung des Cytisinnitrat steht, sind die hemmenden Fasern der

Ni. vagi am Halse der Erregung durch den electrischen Strom nicht zugänglich; ihre hemmende Einwirkung auf die Herzaction ist übercompensirt. Ein Inductionsstrom, der stark genug ist um vor der Injection von Cytisinnitrat durch Reizung der Halsvagi bei Hunden die Herzaction zu verlangsamen oder zu sistiren, bleibt während der intensiven Einwirkung des Cytisin auf das vasomotorische Centrum wirkungslos, vermag aber, sobald die Wirkung der injicirten Giftmenge nachgelassen hat, wieder die Herzaction zu verlangsamen und selbst zu sistiren.

Das automatische Herznervensystem wird vielleicht durch Cytisin erregt; jedenfalls widersteht es lange Zeit der giftigen Einwirkung des Alkaloïds. Selbst nachdem die Respiration in Folge der Vergiftung still steht, schlägt das Herz noch längere Zeit schneller als vor der Darreichung des Giftes fort.

Ob das Cytisin die sensiblen Nerven beeinflußt, vermag das Thierexperiment nicht zu entscheiden. Die motorischen Nerven werden, ebenso wie das Rückenmark, durch Cytisin zuerst erregt, wie ich früher gezeigt habe. Auf diese Erregung folgt bald Lähmung, die sich vom Centrum auf die Peripherie ausdehnt. Nie beginnt, wie ich mich durch oft wiederholte Versuche überzeugt habe, die Lähmung der motorischen Nerven von deren peripherischem Ende aus. Die entgegengesetzte Angabe in meiner ersten Mittheilung ist unrichtig. Wird nach Injection einer großen Dosis Cytisin der Tod rasch durch Lähmung der Respiration herbeigeführt, so sieht man nach erfolgtem Stillstand des Herzens ein Erzittern der verschiedensten Körpermuskeln entsprechend dem Absterben der betreffenden Verzweigungen der motorischen Nerven auftreten. In den Muskeln rufen, nachdem die betreffenden Nerven gelähmt sind, Inductionsströme noch eine Zeit lang Contractionen hervor.

Werden Theile des Goldregens verschluckt, so veranlassen dieselben, wenn nur wenig des giftigen Agens zur Wirkung gelangt, außer Erbrechen und anderen Erscheinungen bisweilen auch heftige Darmentleerungen, meist ohne anatomische Verletzungen des Tractus zu verursachen. Die Erregung des Plexus myentericus gestaltet sich zu stürmischen Bewegungen, unter Kollern in den Gedärmen und kann selbst zu krampfhafter Zusammenziehung der Darmmusculatur führen. Wahrscheinlich leitet der N. vagus die ihn treffenden Reize bis zum Plexus myentericus, falls nicht etwa nur die durch Cytisin veranlaßten Contractionen des Magens als rein mechanische Reize den Darm zu lebhafter Bewegung veranlassen. Ob dem Cytisin vielleicht auch eine deletäre Wirkung ähnlich wie dem Pelletierin auf

Parasiten des Darms und ferner auf Mikroparasiten zukommt, müssen weitere Untersuchungen entscheiden.

Cytisin veranlaßt endlich noch, wenn es in kleinen Dosen zur Wirkung gelangt gewöhnlich eine gesteigerte Harnsecretion. Thiere die größere Dosen vertragen, wie z. B. Ziegen und Kaninchen, secerniren in der Regel weit mehr Harn an Vergiftungstagen als in der Norm. Ob hier dem Cytisin außer dem Einfluß auf die vasomotorischen Nerven, ähnlich wie dem Coffeïn nach Untersuchungen von W. v. Schröder[1]), noch eine besondere Einwirkung auf das Nierenepithel zukommt, werden weitere Untersuchungen zu entscheiden haben.

Eine erfolgreiche Behandlung einer Vergiftung mit Theilen des Goldregens, oder mit Cytisin hat, wie die Erfahrung lehrt, vor allem die Entfernung des Giftes aus den ersten Wegen zu erstreben. Möglichst frühzeitige Entleerung des Magens und Ausspülen des letzteren mit gerbsäurehaltigem Wasser ist meist von Erfolg begleitet. Die weiteren Maßnahmen müssen die Unterhaltung der Respiration anstreben und die Erregung des vasomotorischen Centrums durch geeignete Medicamente herabsetzen.

Den Nachweis einer Vergiftung mit Cytisin kann man in zweifacher Weise versuchen. Einmal gelingt es mit Auszügen aus den erbrochenen Massen vergifteter Individuen kleinere Thiere wie Frösche zu vergiften. Auch lassen sich an Thieren gleiche Versuche mit Auszügen des Harns der Vergifteten oder, falls der Tod eingetreten ist, mit Extracten innerer Organe der frischen Leichen versuchen. Anderseits würde auf den chemischen Nachweis des Giftes einzugehen sein. Daß auch dies möglich ist, werde ich späterhin vielleicht Gelegenheit haben darzuthun.

Indicationen zur therapeutischen Verwerthung des Cytisin lassen sich aus der angegebenen Wirkungsweise in größerer Anzahl ableiten, und werden, wie schon Merck angedeutet hat, gewiß bald aufgestellt werden. Ich stehe zunächst absichtlich davon ab.

Göttingen den 28. Februar 1887.

---

1) Arch. f. exp. Path. u. Pharm. XXII S. 39. 1886.

Zwei Fundamentalversuche zur Lehre von der Pyroëlektricität.

Von

Eduard Riecke.

In der Sitzung vom 1. August 1885 habe ich der K. G. d. W. eine Abhandlung »Ueber die Pyroëlektricität des Turmalins«[1]) vorgelegt; dieselbe beschäftigt sich mit der Auffindung der quantitativen Beziehungen, welche zwischen der pyroëlektrischen Ladung des Turmalins, der Temperatur der Erhitzung, der durch die Ausstrahlung bedingten Temperaturabnahme, der elektrischen Leitungsfähigkeit seiner Oberfläche bestehen. Ich habe in dieser Arbeit eine Theorie der pyroëlektrischen Erregung gegeben auf Grund der Annahme, dass die Moleküle des Turmalins in der Richtung seiner Axe eine permanente Polarität besitzen, sowie dass der Oberfläche desselben eine gewisse elektrische Leitungsfähigkeit zukomme. Diese letztere giebt Veranlassung zu der Bildung einer elektrischen Oberflächenschichte, welche der mit der molekularen Elektricität äquivalenten Oberflächenbelegung gerade entgegengesetzt ist und daher die Wirkungen der lezteren für gewöhnlich kompensirt. Der durch die Beobachtungen gegebene Verlauf der pyroëlektrischen Ladung stand in der That mit den aus der angegebenen Hypothese entwickelten Gesetzen in solcher Uebereinstimmung, dass über die Möglichkeit der zu Grunde gelegten Annahme ein Zweifel nicht bestehen konnte. Ein entscheidender Beweis für die Richtigkeit derselben war aber nur dann gegeben, wenn es gelang einen Turmalin wirklich permanent elektrisch zu erhalten. Diese Aufgabe bildet den Gegenstand der Versuchsreihen, welche in dem ersten Abschnitt der folgenden Abhandlung mitgetheilt sind. Durch dieselben wird bewiesen, dass der Turmalin ein per-

1) Ueber die Pyroëlektricität des Turmalins. Gött. Nachr. 1885. S. 405. Wied. Ann. 1886. Bd. 28. S. 43.

manent elektrischer Körper ist, dessen elektrisches Hauptmoment in die Richtung seiner Axe fällt.

Die in dem zweiten Abschnitt enthaltenen Versuchsreihen zeigen zunächst, dass die von dem Turmalin während der Abkühlung entwickelte Elektricität stets dasselbe Zeichen besitzt. Die Betrachtung der in der früheren Abhandlung gegebenen Curven, welche die zeitliche Veränderung der Ladung bei freier Abkühlung darstellten, konnte zu der Annahme führen, dass die molekulare Elektricität des Turmalins selbst während der Abkühlung erst zu- und dann wieder abnehme. Werden nun die beiden Enden des Turmalins mit Stanniol bekleidet und wird die entwickelte Elektricität durch Ableitung der Belege immer wieder neutralisiert, so müsste eine Wiederabnahme der molekularen Ladung durch einen Wechsel im Zeichen der abgeleiteten Elektricität sich verrathen; tritt ein solcher Wechsel nicht ein, so folgt daraus, dass die Entwickelung der molekularen Elektricität während der Abkühlung stets in demselben Sinne fortschreitet.

Im dritten Abschnitt werden die im Vorhergehenden erwähnten Beobachtungen benutzt zu einer Prüfung des Gesetzes, welches in der früheren Abhandlung für die Entwicklung der Pyroelektricität bei vollkommen isolirender Oberfläche des Turmalins aufgestellt war.

Den Schluss bildet eine Zusammenstellung der bei den verschiedenen untersuchten Turmalinen beobachteten Ladungen.

I.

Wenn ein Turmalin in einem Trockenkasten während mehrerer Stunden erhitzt worden ist, so erweist sich derselbe unmittelbar nach dem Herausnehmen stets unelektrisch. Will man die bei der Abkühlung hervortretende Polarität permanent erhalten, so muss man den Turmalin nach der Entfernung aus dem Trockenkasten in einen Raum versetzen, in welchem die Bildung einer leitenden Oberflächenschicht verhindert wird. Bis zu einem genügenden Grade ist diess der Fall unter der Glocke einer Luftpumpe, wenn die in derselben enthaltene Luft gut getrocknet, von Staub befreit worden ist und wenn eine schwache Verdünnung unter derselben hergestellt wird. Die benutzte Glocke hatte oben eine Oeffnung mit ebenem Rande, welche durch eine aufgeschliffene Glasplatte verschlossen werden konnte. An diese Platte war in excentrischer Stellung eine Schellacksäule angekittet, welche an ihrem unteren Ende mit zwei Ha-

ken versehen war. Die Turmaline wurden mit Hülfe von Cokonfäden, welche um ihre Mitte und das obere Ende geschlungen waren, an diesen Haken aufgehängt, so dass sie frei in dem Raume der Glocke hiengen. In dieser stand seitlich gegen die Mitte der Oeffnung verschoben ein gewöhnliches Goldblattelektroskop, dessen Divergenz einen Maasstab für die elektrische Ladung des Turmalins lieferte. Die excentrische Befestigung der Schellacksäule machte es möglich durch Drehen der Verschlussplatte den Turmalin dem Knopfe des Elektroskops so weit zu nähern, dass er gerade über demselben hieng oder ihn in horizontalem Sinne um den Durchmesser der oberen Oeffnung von dem Elektroskope zu entfernen. Der Raum des Recipienten wurde getrocknet durch wiederholtes Auspumpen und Zulassen von trockener Luft; ausserdem befand sich in demselben noch ein besonderes Trockengefäss, welches bei der Mehrzahl der Versuche mit koncentrirter Schwefelsäure gefüllt war; bei einigen Versuchen wurde statt dieser wasserfreie Phosphorsäure angewandt. Die Divergenz der Goldblätter wurde gemessen mit Hülfe eines ausserhalb der Glocke aufgestellten Glasmaasstabes. Die Stellen der Theilung, welche mit den Goldblättern des Elektroskops zusammenfielen, wurden mit einem Fernrohr beobachtet, das in der Entfernung von einigen Metern aufgestellt war.

Die Beobachtungen beziehen sich auf 6 verschiedene Turmaline, einen von Brasilien, welcher im Folgenden mit B I bezeichnet werden möge, zwei von Elba E I und E II, einen von Snarum S I, einen von Kärnten K, und einen von Mursinsk M I. Die Crystalle B I, E I und S I sind dieselben, welche bei der früheren Untersuchung benutzt und in der angeführten Arbeit beschrieben worden sind. Der Crystall E II hat ein Gewicht von 25,449 g. und röthliche Farbe; er stellt eine strahlige Säule von einer Länge von 4 cm. dar, welche an dem einen Ende unregelmässig abgebrochen, an dem anderen von einer zur Säulenaxe senkrechten angeschliffenen Fläche begrenzt ist. Der Turmalin K hat ein Gewicht von 58.233 g., braune Farbe. Derselbe zeigt in sehr regelmässiger Ausbildung die zweite sechsseitige Säule, deren abwechselnde Kanten durch die drei Flächen der ersten Säule abgestumpft sind. Am antilogen Ende finden sich die Flächen des Rhomboëders, wenn auch in unvollständiger Ausbildung; das analoge Ende zeigt eine muschlige Bruchfläche ziemlich senkrecht gegen die Säulenaxe. Der Turmalin M I hat ein Gewicht von 4,946 g. eine Länge von 1,8 cm. Er ist sammtschwarz, und stellt eine Säule dar von dreieckigem Querschnitte, aber mit stark gewölbten und gestreiften Seitenflächen; das eine Ende zeigt eine Geradendfläche, das andere eine muschlige Bruchfläche.

Es mögen nun die Protokolle der mit den einzelnen Turmalinen angestellten Versuche mitgetheilt werden; in all den Fällen, in welchen eine darauf bezügliche Angabe nicht gemacht ist, wurde der Raum des Recipienten mit koncentrirter Schwefelsäure getrocknet. Die jeweilige Divergenz der Goldblätter des Elektroskopes ist im Folgenden durch A bezeichnet und in Millimetern gemessen.

1. Turmalin B I.

Verstehen wir unter t_0 die Temperatur des Raumes, in welchem sich der Turmalin abkühlt, unter t_1 die Erhitzungstemperatur, so ist die Temperatur $\bar{t}$ während der Abkühlung gegeben durch

$$\frac{\bar{t}-t_0}{t_1-t_0} = e^{-0,15z}$$

Hier bezeichnet z die Zeit, welcher die Mitteltemperatur $\bar{t}$ entspricht. Es ist somit nach der Zeit von 20^m $\frac{\bar{t}-t_0}{t_1-t_0} = \frac{1}{20}$, nach Verfluss von 40^m gleich $\frac{1}{400}$. Im Mittel war bei den folgenden Versuchen $t_1 - t_0 = 88^\circ$; der Temperaturüberschuss des Turmalins über die Temperatur des umgebenden Raumes reducierte sich somit in 20^m auf $4,40^\circ$ in 30^m auf $0,22^\circ$.

1. Versuch.

11. Febr. 1887.

Temperatur des Trockenkastens 106°.

$11^h 25^m$ Turmalin aus dem Kasten herausgenommen.

Verdünnung der Luft durch 3 Züge der Pumpe

Zeit	$12^h 5^m$	$12^h 45^m$	$3^h 40^m$	$4^h 47^m$	$7^h 55^m$
A	21	21	19	18	17.5

12. Febr. 1887 $11^h 15^m$ $A = 8^{mm}$

Luft in den Recipienten zugelassen

$12^h 45^m$ $A = 7,5^{mm}$.

Die Prüfung mit einem Fechnerschen Elektroskop giebt beide Enden entgegengesetzt elektrisch.

2. Versuch.

14. Febr. 1887.

Temperatur des Trockenkastens 98°.

$12^h 17^m$ Turmalin aus dem Kasten herausgenommen.

Verdünnung der Luft durch 3 Züge der Pumpe

Zeit	$12^h 26^m$	$12^h 37^m$	$2^h 50^m$	$3^h 25^m$	$4^h 51^m$	$6^h 8^m$
A	17	17.3	12.8	11.8	10.6	9.6

15. Febr. 1887 $9^h 34^m$ $A = 5{,}3^{mm}$.

12^h Der Turmalin aus dem Recipienten entfernt zeigt bei der Prüfung mit dem Fechnerschen Elektroskop starke polare Elektricität.

3. Versuch.

24. Febr. 1887.

Temperatur des Trockenkastens 112°.

$12^h 17^m$ Turmalin aus dem Kasten herausgenommen.

Verdünnung der Luft durch 3 Züge der Pumpe $12^h 23^m$ $A = 14.0$

Weitere Verdünnung durch 3 Pumpenzüge.

Zeit	$12^h 26^m$	$12^h 35^m$	$2^h 12^m$	$3^h 17^m$	$4^h 49^m$	$6^h 15^m$
A	15.7	16.4	13.9	13.0	11.7	10.9

Das untere Ende des Turmalins wird dem Knopfe des Elektroskops aus der anfänglichen Entfernung von 3 ^{cm} auf $1\frac{1}{2}^{cm}$ genähert

Zeit	$6^h 18^m$	7^h	8^h	9^h
A	16.6	15.7	14.1	13.5

25. Febr. 1887 $9^h 29^m$ $A = 4{,}6^{mm}$.

Das untere Ende des Turmalins wird dem Knopfe des Elektroskops auf 1^{cm} genähert: $A = 6{,}7^{mm}$.

Der Turmalin wird von dem Knopfe des Elektroskops so weit als möglich entfernt: $A = 1^{mm}$.

Luft in den Recipienten eingelassen.

$12^h 1^m$ $A = 1^{mm}$ bei größter Distanz des Turmalins von dem Elektroskop.

Bei Annäherung auf $\frac{1}{2}^{cm}$ $A = 4{,}3^{mm}$.

Die Prüfung mit dem Fechnerschen Elektroskop ergiebt das untere Ende stark positiv, das obere stark negativ elektrisch.

4. Versuch.

28. Febr. 1887.

Raum des Recipienten getrocknet mit wasserfreier Phosphorsäure.

Temperatur des Trockenkastens 107°.

$11^h 19^m$ Turmalin aus dem Kasten herausgenommen.

Verdünnung der Luft durch 5 Züge der Pumpe.

Entfernung des unteren Endes des Turmalins von dem Knopfe des Elektroskopes $2\frac{1}{2}^{cm}$

Zeit	$11^h 26^m$	$11^h 31^m$	$11^h 36^m$
A	17.4	19.2	19.0

Weitere Verdünnung durch 5 Pumpenzüge

Zeit	$11^h 41^m$	$11^h 45^m$	1^h	2^h	3^h	$4^h 20^m$	$5^h 15^m$	$6^h 14^m$	7^h	8^h	9^h
A	17.8	17.8	16.1	14.9	13.8	12.1	12.0	11.7	10.8	10.4	10.2

1. März 1887 $9^h 30^m$ $A = 4,6$

$12^h 45^m$ $A = 3,3.$

Bei größter Distanz des Turmalins von dem Knopfe des Elektroskops $A = 2,1$; bei Annäherung des unteren Endes auf $\frac{1}{2}^{cm}$ $A = 6,3$.

Luft in den Recipienten zugelassen.

5^h $A = 3,1^{mm}$ bei Annäherung des unteren Endes des Turmalins auf $\frac{1}{2}^{cm}$.

$A = 1,3^{mm}$ bei größter Entfernung desselben von dem Knopfe des Elektroskops.

Die Prüfung mit dem Fechnerschen Elektroskop ergiebt das untere Ende positiv, das obere negativ elektrisch.

5. Versuch.

2. März 1887.

Raum des Recipienten getrocknet mit wasserfreier Phosphorsäure.

Temperatur des Trockenkastens 110°.

$11^h 45^m$ Turmalin aus dem Kasten herausgenommen.

Entfernung des unteren Turmalinendes von dem Knopfe des Elektroskops 4^{cm}.

Zeit	$12^h 50^m$	$12^h 7^m$	$1^h 5^m$
A	8.4	10.8	9.8

Verdünnung der Luft durch zwei Züge der Pumpe. Es bleibt $A = 9,8^{mm}$.

Zeit	2^h	4^h	$5^h 37^m$
A	8.4	6.6	4.9

Weitere Verdünnung durch zwei Züge der Pumpe. Es sank A auf $4,6^{mm}$.

Annäherung des unteren Turmalinendes an den Knopf des Elektroskops auf eine Entfernung von 2^{cm} $A = 14,7^{mm}$

Zeit	7^h	8^h	9^h
A	13.4	12.1	11.5

3. März 1887. $9^h 27^m$ $A = 1,2^{mm}$.

Annäherung des unteren Turmalinendes an den Knopf des Elektroskops auf $\frac{1}{2}^{cm}$ $A = 6,5^{mm}$.

Bei der größten möglichen Distanz $A = 1,2^{mm}$.

Luft zu dem Recipienten zugelassen.

$12^h\,28^m$ bei der größten möglichen Entfernung $A = 1{,}1^{mm}$.

Bei Annäherung $A = 3{,}9^{mm}$.

Die Prüfung mit dem Fechnerschen Elektroskop ergab das untere Ende stark positiv, das obere stark negativ elektrisch.

Die Resultate der 5 Versuche sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt; innerhalb jeder einzelnen Reihe sind die Ausschläge A auf gleiche Entfernung des Turmalins von dem Elektroskope reducirt. Die Bestimmung der Werthe von A für übereinstimmende Zeiten erfolgte mit Hülfe der Curven, durch welche die beobachteten zusammengehörigen Werthe der Zeit und der Divergenz A dargestellt werden. Die Zeit ist gerechnet von dem Momente der Herausnahme des Turmalins aus dem Trockenkasten an und ist in Stunden angegeben.

Zeit			A		
0.2	21.3	17.5	24.0		28.7
0.4	21.8	17.1	25.0	17.8	33.1
1	21.2	16.0	23.3	17.0	31.1
2	20.5	13.9	21.0	16.0	26.3
4	19.1	11.0	18.3	14.0	20.2
6	17.9	9.5	16.5	12.0	14.5
8	17.6		14.3	11.1	12.6
10				10.3	10.8
20		5.5	6.0	5.0	
24	7.6			3.6	

2. Turmalin E I.

Die Abkühlungstemperatur ist bei diesem Turmalin bestimmt durch die Formel

$$\frac{\bar{t} - t_0}{t_1 - t_0} = e^{-0.097\,z}$$

Der Temperaturüberschuß des Turmalins über die Temperatur seiner Umgebung sinkt hiernach in 30^m auf $\frac{1}{20}$, in 1 Stunde auf 0,003 des anfänglichen Werthes. Nun beträgt bei den folgenden Versuchen der Temperaturüberschuß zu Anfang 97°, er sinkt also in 30^m auf 4,4°, in einer Stunde auf 0,3°.

1. Versuch.

9. Febr. 1887.

Temperatur des Trockenkastens 104°.

$4^h\,45^m$ Turmalin aus dem Kasten herausgenommen.

Verdünnung der Luft durch 3 Züge der Pumpe.

10. Febr. 1887. $9^h 30^m$ Turmalin über den Knopf des Elektroskopes gestellt. Entfernung des unteren Endes von dem Knopfe $0,3^{cm}$: $A = 11,4^{mm}$.

Luft in den Recipienten zugelassen. 12^h $A = 7,2^{mm}$.

2. Versuch.

23. Febr. 1887.

Temperatur des Trockenkastens 111°.

$5^h 46^m$ Turmalin aus dem Kasten herausgenommen.

Verdünnung der Luft durch 4 Züge der Pumpe.

$5^h 55^m$ $A = 13,3$.

Weitere Verdünnung durch 2 Pumpenzüge.

Zeit	$6^h 1^m$	$6^h 6^m$	$6^h 17^m$	7^h	8^h	9^h
A	11.1	12.8	14.0	13.6	11.6	10.6

24. Febr. 1887. $9^h 30^m$ $A = 1,9$. Unteres Ende des Turmalin über dem Knopfe des Elektroskopes; Entfernung 1^{cm}.

Turmalin von dem Knopfe des Elektroskopes durch Drehen der Verschlußplatte möglichst weit entfernt $A = 1,1$.

Luft in den Recipienten eingelassen.

$12^h 30^m$ Turmalin in der größten Entfernung von dem Knopfe des Elektroskops: $A = 1,1$.

Turmalin über den Knopf desselben gestellt: $A = 1,9$.

Der Turmalin wurde hierauf aus dem Recipienten herausgenommen und dem Knopfe eines anderen Elektroskopes bis auf eine Entfernung von wenigen Millimetern genähert, es ergab sich ein Ausschlag von etwa 10^{mm}. Das untere Ende des Turmalins war positiv elektrisch.

3. Versuch.

25. Febr. 1887.

Temperatur des Trockenkastens 111°.

$12^h 10^m$ Turmalin aus dem Kasten herausgenommen.

Verdünnung durch 3 Züge der Pumpe.

$12^h 15^m$ $A = 6,6^{mm}$.

Weitere Verdünnung durch 3 Pumpenzüge.

Horizontale Entfernung des unteren Endes des Turmalins von dem Knopfe des Elektroskopes $1\frac{1}{2}^{cm}$.

Zeit	$12^h 18^m$	$12^h 25^m$	$3^h 34^m$	$5^h 6^m$	$6^h 8^m$
A	7.0	7.2	6.7	6.1	5.6

Annäherung des Turmalins an das Elektroskop bis auf eine horizontale Entfernung von ½ cm.

Zeit	$6^h 14^m$	7^h	8^h	9^h
A	9.4	9.1	8.8	8.5

26. Febr. 1886. $9^h 10^m$ $A = 2{,}5$.

Turmalin von dem Elektroskope möglichst weit entfernt $A = 1{,}1$.

Genähert, so dass der Turmalin noch etwas über dem Knopf des Elektroskopes stand, $A = 4{,}8$ mm.

Luft in den Recipienten eingelassen.

Bei grösster Entfernuug des Turmalin von dem Elektroskop $A = 1{,}1$.

$12^h 10^m$ Turmalin über den Knopf des Elektroskops gestellt. $A = 5{,}2$.

Die Prüfung mit dem Fechnerschen Elektroskop ergiebt am unteren Ende positive Elektricität.

4. Versuch.

1. März 1887.

Raum des Recipienten getrocknet mit wasserfreier Phosphorsäure.

Temperatur des Trockenkastens 118,5°.

$5^h 6^m$ Turmalin aus dem Kasten herausgenommen.

Verdünnung der Luft durch 6 Züge der Pumpe.

$5^h 18^m$ $A = 12{,}6$.

Weitere Verdünnung durch 3 Pumpenzüge $A = 7{,}5$.

Zeit	$6^h 14^m$	$7^h 28^m$	9^h
A	8.3	7.4	6.8

2. März 1887. $9^h 16^m$: $A = 1{,}0$.

Turmalin über den Knopf des Elektroskops gestellt $A = 3{,}0$.

Luft in den Recipienten eingelassen.

Turmalin in grösster Entfernung von dem Elektroskop.

$11^h 38^m$ $A = 0{,}7$.

Turmalin über den Knopf des Elektroskops gestellt $A = 2{,}0$.

Die Prüfung mit dem Fechnerschen Elektroskop ergiebt am unteren Ende positive, am oberen negative Elektricität.

5. Versuch.

3. März 1887.

Raum des Recipienten getrocknet mit wasserfreier Phosphorsäure. Die Luft in demselben nicht verdünnt.

Temperatur des Trockenkastens 124,5°.

$12^h 34^m$ Turmalin aus dem Kasten herausgenommen.

Zeit	$12^h 43^m$	$12^h 50^m$	$3^h 9^m$	$6^h 10^m$
A	8.2	9.3	5.0	3.2

Turmalin halb über den Knopf des Elektroskops gestellt $A = 9{,}2$

Zeit	7^h	8^h	9^h
A	8.8	8.5	8.2

4. März 1884. $9^h\ 35^m$ $A = 0{,}8^{mm}$.

Turmalin über den Knopf des Elektroskops gestellt $A = 2{,}0$.

Turmalin in die grösste Entfernung von dem Elektroskop gebracht: $A = 4{,}4$; bei der Entfernung giengen die Blätter des Elektroskops erst zusammen, dann wieder auseinander.

Die Verschlussplatte wird mit dem Turmalin weggenommen und das Elektroskop entladen; hierauf die Platte wieder aufgesetzt und der Turmalin über den Knopf des Elektroskops gestellt.

$6^h\ 43^m$: $A = 8{,}1$.

Bei grösster Entfernung des Turmalins von dem Elektroskop $A = 0{,}9$.

$11^h\ 52^m$: $A = 6{,}5$.

Turmalin in die grösste Entfernung von dem Elektroskop gebracht: $A = 0{,}5$.

$12^h\ 47^m$ $A = 5{,}4$.

Die Prüfung mit dem Fechnerschen Elektroskop ergab am unteren Ende starke positive Elektricität.

Die Resultate der Versuche 2—5 sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt; dabei sind nur diejenigen Beobachtungen berücksichtigt, welche nach Herstellung der bleibenden Verdünnung der Luft angestellt worden sind. Die Zeit ist von dem Augenblick der Herausnahme des Turmalin an in Stunden gerechnet. Innerhalb einer Beobachtungsreihe sind die Ausschläge auf gleiche Entfernung zwischen Turmalin und Elektroskop reduciert.

Zeit	A			
0.5	12.9	12.8	9.0	28.0
1	12.0	12.5	8.6	26.0
2	10.8	12.1	7.5	18.3
3	9.8	11.5		12.9
5		10.2	5.8	9.8
7		9.1		8.6
9		8.5		8.0
15	0.8	3.5	0.3	
21		1.5		
24				5.4

3. Turmalin S I.

Für die Temperatur während der Abkühlung gilt die Formel:

$$\frac{\bar{t} - t_0}{t_1 - t_0} = e^{-0.06.z}$$

Die Temperaturdifferenz sinkt in 50^m auf $\frac{1}{20}$, in 1 Stunde 40^m auf $\frac{1}{500}$ des anfänglichen Werthes.

1. Versuch.

15. Febr. 1887.

Temperatur des Trockenkastens 112°.

$3^h\ 9^m$ Turmalin aus dem Kasten herausgenommen.

Verdünnung der Luft durch 3 Züge der Pumpe.

Zeit	$3^h 25^m$	$3^h 48^m$	$5^h 15^m$	$6^h 5^m$
A	15.9	21.8	19.2	16.8

16. Febr. 1887. Der Turmalin wird senkrecht über den Knopf des Elektroskops gestellt.

$9^h\ 20^m$ $A = 3{,}3$.

Luft in den Recipienten eingelassen. $11^h\ 45^m$ ergiebt die Prüfung mit dem Fechnerschen Elektroskop am analogen Ende starke negative Elektricität.

2. Versuch.

16. Febr. 1887.

Temperatur des Trockenkastens 110°.

$4^h\ 10^m$ Turmalin aus dem Kasten herausgenommen.

Verdünnung der Luft durch 4 Züge der Pumpe.

$4^h\ 25^m$ $A = 13{,}8$.

Weitere Verdünnung durch 4 Pumpenzüge.

Zeit	$4^h 35^m$	$5^h 45^m$	$9^h 2^m$
A	18.2	20.7	14.1

17. Febr. 1887. $9^h 13^m$ $A = 3{,}3$.

Turmalin über den Knopf des Elektroskops gestellt; Abstand des unteren Endes von dem Knopfe 2^{cm}; $A = 6{,}3$.

Luft in den Recipienten eingelassen.

$11^h 58^m$ $A = 3{,}0$.

Die Prüfung mit dem Fechnerschen Elektroskop ergiebt am analogen Ende negative Elektricität.

Fassen wir die Beobachtungen in ähnlicher Weise zusammen wie die früheren, so ergiebt sich die Tabelle.

Zeit	0.4	1	2	3	5	20
A	18.0	22.9	19.7	16.8		
	18.2	21.8	19.9	17.9	14.0	3.0

4. Turmalin E II.

Die Abkühlungskonstante kann gleich 0,085 gesetzt werden die Temperaturdifferenz sinkt dann in 40^{m} auf $\frac{1}{30}$, in 75^{m} auf $\frac{1}{500}$ das anfänglichen Werthes.

14. Febr. 1887.

Temperatur des Trockenkastens 110°.

12^{h} 34^{m} Turmalin aus dem Kasten herausgenommen.

Zeit	12^{h} 45^{m}	2^{h} 10^{m}	3^{h} 5^{m}	5^{h} 7^{m}	6^{h} 7^{m}
A	6.2	9.5	8.0	6.4	6.0

18. Febr. 1887. 11^{h} 45^{m} bei der Prüfung mit dem Fechnerschen Elektroskop zeigt der Crystall am unteren Ende starke negative Elektricität.

Aus der graphischen Darstellung der vorhergehenden Beobachtungen ergiebt sich für den Gang der Ladung die Tabelle.

Zeit	0.4	1	2	4	6
A	10.0	10.4	8.7	6.8	5.9

5. Turmalin K.

Die Abkühlungskonstante ist gleich 0,05; in 60 Min. sinkt der Temperaturüberschuß auf $\frac{1}{20}$, in 2 Stunden auf $\frac{1}{400}$ des anfänglichen Betrages.

22. Febr. 1887.

Temperatur des Trockenkastens 109°.

12^{h} 36^{m} Turmalin aus dem Kasten herausgenommen.

Verdünnung der Luft durch 3 Züge der Pumpe.

Zeit	12^{h} 54^{m}	1^{h}	3^{h} 22^{m}	4^{h}	5^{h} 10^{m}	6^{h} 16^{m}	7^{h} 30^{m}
A	15.8	19.7	20.2	18.8	16.8	15.2	14.3

23. Febr. 1887. 9^{h} 16^{m} $A = 3{,}0$.

In der größten Entfernung des Turmalins von dem Elektroskope $A = 1{,}4$.

Luft in den Recipienten zugelassen.

Turmalin über den Knopf des Elektroskops gestellt.
$12^h\,34^m$ $A = 5{,}0$.

Bei größter Entfernung von dem Elektroskop $A = 1{,}5$. Die Prüfung mit dem Fechnerschen Elektroskop ergab an der unteren Fläche starke negative, an dem oberen antilogen Ende starke positive Elektricität.

Für den zeitlichen Verlauf der Ladung ergiebt sich die Tabelle

Zeit	0.4	1.0	2.0	4.0	6.0	8.0	24.0
A	19.1	24.6	22.9	17.6	15.0	13.5	3.5

6. Turmalin M I.

Setzt man die Abkühlungskonstante gleich 0,17, so ergiebt sich daß der Temperaturüberschuß in 20^m auf $\frac{1}{30}$, in 30^m auf $\frac{1}{200}$ des anfänglichen Betrages sinkt.

19. Febr. 1887.

Temperatur des Trockenkastens 102°.
$11^h\,39^m$ Turmalin aus dem Kasten herausgenommen.

Zeit	$11^h\,45^m$	$11^h\,57^m$	$12^h\,12^m$	$12^h\,19^m$
A	2.8	2.9	1.5	1.1

Um 5 Uhr gab die Prüfung mit dem Fechnerschen Elektroskope noch eine sehr schwache polare Ladung zu erkennen.

Zum Schluß mögen noch für die 6 untersuchten Turmaline die Zeiten, in welchen die anfänglich vorhandene Temperaturdifferenz auf den Betrag von $\frac{1}{2}°$ herabsinkt zusammengestellt werden mit den größten Zeiträumen, nach deren Verfluß die polare Ladung der Turmaline mit Hülfe des Fechnerschen Elektroskops nachgewiesen wurde.

Abkühlungszeit	0.58	0.85	1.4	1.0	1.7	0.48
Zeit der Prüfung mit dem Elektroskop	30	24	21	23	24	5.5

Die Zeiten sind in Stunden angegeben.

II.

Wir gehen nun über zu der zweiten Beobachtungsreihe, durch welche zunächst nachgewiesen werden sollte, daß das Zeichen der entwickelten Elektricität während der ganzen Abkühlung dasselbe bleibt.

Bei diesen Versuchen wurde ein Fechnersches Elektroskop benutzt; die Zambonische Säule, welche zur Ladung der Platten diente, befand sich im Inneren einer mit einem Schlitze versehenen Glasröhre. Der eine Pol derselben war zur Erde abgeleitet, der andere wurde gebildet durch eine schmale Messingplatte, welche an einer beliebigen Stelle der Säule durch den Schlitz hindurch zwischen die Platten geschoben werden konnte. Es war auf diese Weise leicht, dem Elektroskop die für die Ausführung der Versuche passende Empfindlichkeit zu geben. Die Platten der Säule wurden mit Hülfe eines an einem einarmigen Hebel wirkenden Gewichtes mit konstantem Druck zusammengepreßt. Von den Platten des Elektroskops war die eine verbunden mit dem positiven Pole der Säule, die andere zur Erde abgeleitet.

Die zu untersuchenden Turmaline wurden an ihren Enden mit Stanniol überzogen. Wenn dieselben nach genügender Erhitzung aus dem Trockenkasten herausgenommen waren, so wurde das negativ elektrische Ende mit dem Knopfe des Elektroskops in leitende Verbindung gebracht, während das andere nach der Erde abgeleitet wurde. Dieß geschah bei dem zweiten und dritten der im folgenden angeführten Versuche so, daß das untere negative Ende des Turmalins direkt an den Knopf des Elektroskops angelegt wurde, während das andere von der Klemme eines mit der Gasleitung durch einen Draht verbundenen Messingstatives gehalten war. Bei den Versuchen 4, 5, 6, 10 und 12 wurde das untere Ende des Turmalins mit einem Drahte verbunden, welcher in der Verlängerung der Axe liegend an seinem Ende eine kleine Schaale von Messing trug; das obere Ende des Turmalins wurde mit einer Messingzange gefaßt und der Turmalin mit dieser an dem Stativ befestigt. Die an dem Ende des Drahtes befindliche Messingschaale wurde durch Herabschieben der Stativklammer federnd gegen den Knopf des Elektroskops gedrückt. Bei den übrigen Versuchen war das obere Ende der Crystalle mit Spiraldrähten verbunden, welche oben hakenförmig umgebogen waren. Mit den Haken wurden die Crystalle an den Arm des Statives gehängt, während die an den unteren Enden befindlichen Messingschalen sich in Folge der Dehnung des Drahtes auf den Knopf des Elektroskops aufsetzten.

Es wurde nun zunächst bestätigt, daß bei der Abkühlung der erhitzten Turmaline die Ausschläge des Aluminiumblattes stets nach der Seite der positiven Elektrode hin erfolgten, daß also in der That während derselben die entwickelte Elektricität stets dasselbe Zeichen besitzt.

Die Empfindlichkeit des Elektroskops war so regulirt, daß nach einiger Zeit das Aluminiumblatt desselben an die positive Elektrode anschlug. Die in dem Blatte befindliche negative Electricität strömte dann nach der Erde ab, während dasselbe gleichzeitig eine positive Ladung annahm, welche einen schwachen Ausschlag nach der anderen Elektrode hin bewirkte. Die fortschreitende Entwicklung der Elektricität des sich abkühlenden Turmalins erzeugte aber sofort eine abermalige negative Ladung des Blattes und nach einiger Zeit erfolgte ein neues Anschlagen desselben an die positive Elektrode. Man sieht, daß ebenso wie bei den Beobachtungen von Gaugain die Zahl der Entladungen ein Maaß für die Menge der entwickelten Elektricität bildet. Es wurden nun die Anschläge des Aluminiumblattes an die positive Elektrode gezählt und die Zeiten beobachtet, zu welchen dieselben erfolgten.

Die Beobachtungen beziehen sich auf 13 Crystalle, von welchen 6 aus Brasilien BI—B VI, 1 aus Elba E III, 1 aus Snarum S II, 5 von Mursinsk stammen. Von den letzteren sind MIa und MIb Bruchstücke des Crystalls MI, welcher schon bei den vorhergehenden Versuchen benutzt worden ist.

Es mögen zunächst die Gewichte und Längen der Crystalle zusammengestellt werden.

Turmalin	B I	B II	B III	B IV	B V	B VI	E III	S II	M Ia	M Ib	M II	M III	M IV
Gewicht, g	6.473	8.259	3.873	4.370	3.773	2.260	1.380	21.348	2.782	2.164	4.107	3.561	2.995
Länge, cm	4.26	4.39	2.87	2.85	2.20	1.66	1.65	5.23	1.60	1.25	1.65	1.71	1.18

In den folgenden Tabellen sind die Beobachtungen zusammengestellt; dabei bezeichnet e die Anzahl der Anschläge des Aluminiumblattes an die positive Elektrode, z die Zeit in Minuten, T die Temperatur, bis zu welcher der Turmalin erhitzt worden war.

Turmalin B I.

$T = 101^{\circ}$

e	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
z	0.52	0.72	0.92	1.13	1.26	1.59	1.84	2.09	2.37	2.67	2.98	3.32	3.68
e	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
z	4.10	4.52	5.00	5.55	6.16	6.89	7.75	8.81	10.17	12.07	14.99	21.56	

Turmalin B II.

Beobachtungsreihe	T	e	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	104		0.50	0.65	0.82	1.02	1.22	1.40	1.60	1.80	2.00	2.21	2.44
3	104	z		0.82	0.97	1.17	1.37	1.52	1.70	1.99	2.18	2.40	2.63
4	101		0.52	0.67	0.82	0.97	1.11	1.25	1.39	1.53	1.68	1.83	2.03
		e	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
2	104		2.67	2.92	3.16	3.42	3.70	4.00	4.33	4.69	5.07	5.45	5.90
3	104	z	2.85	3.10	3.31	3.62	3.91	4.23	4.55	4.90	5.27	5.82	6.12
4	101		2.22	2.40	2.60	2.82	3.03	3.27	3.51	3.69	4.10	4.42	4.78
		e	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
2	104		6.38	6.93	7.53	8.20	8.97	9.87	10.90	12.22	13.86	16.20	20.20
3	104	z	6.61	7.15	7.74	8.43	9.18	10.00	11.06	12.34	14.04	16.19	26.92
4	101		5.17	5.64	6.17	6.77	7.45	8.24	9.18	10.42	12.09	14.57	18.69

Turmalin B III.

Beobachtungsreihe	T	e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	108.5	z	0.45	0.54	0.62	0.72	0.81	0.90	1.00	1.13	1.25
6	107		0.43	0.52	0.60	0.70	0.80	0.94	1.06	1.19	1.33
		e	10	11	12	13	14	15	16	17	18
5	108.5	z	1.43	1.58	1.73	1.92	2.11	2.32	2.55	2.82	3.11
6	107		1.48	1.64	1.80	1.99	2.21	2.44	2.69	2.97	3.29
		e	19	20	21	22	23	24	25	26	
5	108.5	z	3.46	3.87	4.36	4.98	5.82	7.02	9.05	13.60	
6	107		3.67	4.01	4.60	5.23	6.10	7.34	9.67	14.75	

Turmalin B IV.

Beobachtungsreihe	T	e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	106.5	z		0.38	0.47	0.57	0.67	0.78	0.90	1.02	
8	104.5		0.33	0.41	0.49	0.58	0.68	0.79	0.90	1.02	1.15
		e	10	11	12	13	14	15	16	17	18
7	106.5	z	1.30	1.47	1.63	1.82	2.02	2.22	2.47	2.74	3.04
8	104.5		1.29	1.44	1.59	1.76	1.95	2.17	2.40	2.67	2.97
		e	19	20	21	22	23	24	25	26	27
7	106.5	z	3.37	3.75	4.20	4.75	5.39	6.25	7.38	9.20	13.64
8	104.5		3.32	3.73	4.22	4.82	5.61	6.79	8.68		

Trumalin B V.

$T = 104.5$

e	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
z	0.33	0.40	0.49	0.58	0.68	0.79	0.94	1.07	1.20	1.35	1.50	1.64	1.82
e	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
z	2.01	2.22	2.46	2.73	3.04	3.40	3.84	4.60	5.14	6.19	8.67	12.80	

Turmalin B VI.

$T = 111$

e	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
z		0.43	0.50	0.57	0.65	0.75	0.85	0.97	1.10	1.22	1.37
e	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	
z	1.53	1.72	1.92	2.15	2.43	2.87	3.32	3.97	5.03	7.17	

Turmalin E III.

$T = 104^\circ$

e	1	2	3	4	5	6	7	8
z	0.47	0.62	0.80	0 98	1.19	1.43	1.70	2.02
e	9	10	11	12	13	14	15	
z	2.37	2.82	3.34	4.08	5.15	7.28	15.47	

Turmalin S II.

$T = 107.$

e	1	2	3	4	5	6	7	8	9
z	1.58	2.50	3.30	4.05	4.76	5.47	6.14	6.89	7.60
e	10	11	12	13	14	15	16	17	18
z	8.37	9.12	9.97	10.84	11.84	12.90	14.12	15.59	18.25

Turmalin M I a.

Beobachtungsreihe	T	e	1	2	3	4	5	6	7
13	107	z	0.35	0.60	0.90	1.21	1.55	1.93	2.32
14	102	z	0.31	0.53	0.80	1.12	1.45	1.83	2.25
		e	8	9	10	11	12	13	14
13	107	z	2.74	3.21	3.75	4.45	5.28	6.38	8.32
14	102	z	2.70	3.20	3.80	4.52	5.43	6.73	9.03

Turmalin M I b.

$T = 101.$

e	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
z	0.42	0.55	0.68	0.82	0.97	1.13	1.29	1.47	1.65	1.85	2.06	2.28	2.52
e	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
z	2.78	3.05	3.36	3.70	4.10	4.56	5.08	5.71	6.50	7.52	9.02	11.65	

Turmalin M II.

Beobachtungsreihe	T	e	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
16	107	z	0.47	0.59	0.71	0.83	0.95	1.09	1.21	1.35	1.49	1.63	1.77
17	101	z	0.47	0.59	0.72	0.85	0.99	1.12	1.25	1·40	1.55	1.70	1.85
		e	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
16	107	z	1.92	2.08	2.25	2.42	2.59	2.77	2.95	3.14	3.35	3.56	3.78
17	101	z	2.02	2.18	2.35	2.54	2.73	2.92	3.12	3.33	3.57	3.80	4.05
		e	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
16	107	z	4.02	4.26	4.53	4.81	5.11	5.44	5.78	6.15	6.55	7.00	7.57
17	101	z	4.31	4.58	4.87	5.18	5.52	5.89	6.28	6.72	7.20	7.71	8.30
		e	34	35	36	37	38	39	40	41			
16	107	z	8.12	8.74	9.45	10.27	11.25	12.47	14.05	15.97			
17	101	z	9.08	9.89	10.84	12.01	13.51	15.65	19.23				

Turmalin M III.

$T = 109{,}5.$

e	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
z	0.35	0.50	0.65	0.80	0.95	1.10	1.28	1.45	1.62	1.80	1.99
e	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
z	2.19	2.40	2.62	2.85	3.09	3.33	3.60	3.88	4.21	4.55	4.92
e	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
z	5.33	5.78	6.30	6.88	7.53	8.35	9.32	10.49	12.10	14.67	19.97

Turmalin M IV.

$T = 107.$

e	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
z	0.27	0.43	0.58	0.74	0.91	1.10	1.26	1.43	1.64	1.84	2.05	2.27	2.51	2.75
e	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
z	3.02	3.31	3.62	3.96	4.35	4.76	5.23	5.78	6.41	7.17	8.12	9.34	11.22	14.67

III.

Aus der früher von mir entwickelten Theorie der Pyroëlektricität ergab sich, daß bei freier Abkühlung eines Turmalins die Ladung desselben wächst entsprechend dem Gesetze

$$e = E(1 - e^{-az})$$

Vorausgesetzt ist dabei, daß der Einfluß der oberflächlichen Leitung vernachlässigt werden kann. Es läßt sich annehmen, daß diese letztere Bedingung bei den vorhergehenden Versuchen in hinreichendem Maaße erfüllt ist. Dagegen ist von vornherein nicht zu übersehen, in wie weit das Gesetz der Abkühlung durch die mit dem Turmalin verbundenen Metalltheile modificiert wird. Jedenfalls war der Versuch gerechtfertigt, die vorhergehenden Beobachtungen zu der Prüfung des obigen Gesetzes zu verwenden; dabei ergab sich in der That, wenigstens für einen grossen Theil der Beobachtungen, eine vollständige Uebereinstimmung mit demselben.

Die Berechnung der Beobachtungen wurde ausgeführt mit Hülfe einer graphischen Darstellung der in den vorhergehenden Tabellen enthaltenen Werthe von e und z. Aus dieser ergab sich zunächst diejenige Elektricitätsmenge, welche bei dem ersten Anschlag des Aluminiumblattes an die Elektrode zur Entladung kam; mit Hülfe derselben wurde ferner die Größe der ganzen schließlich erreichten Ladung bestimmt. Zur Erleichterung der Rechnung wurden derselben die Werthe von e für eine Reihe von einfachen Werthen der Zeit z entnommen und mit Hülfe dieser die Constante a bestimmt. Die folgenden Tabellen enthalten die auf die angegebene Weise den Beobachtungen entnommenen Werthe von e, die daraus sich ergebenden Werthe von a und die mit dem Mittelwerth von a berechneten Werthe von e.

Turmalin B I. $e = 26.8 \{1 - e^{-0.211\,z}\}$

z	a	e beob.	e ber.
1	0.219	5.3	5.1
2	0.213	9.3	9.2
3	0.217	12.7	12.6
4	0.213	15.6	15.3
6	0.212	19.5	19.3
10	0.213	23.6	23.6
15	0.201	25.6	25.7
∞		26.8	

Turmalin B II.

$e =$	$35.4 \{1 - e^{-0.188z}\}$			$35.3 \{1 - e^{-0.185z}\}$			$36.0 \{1 - e^{-0.221z}\}$		
z	a	e beob.	e ber.	a	e beob.	e ber.	a	e beob.	e ber.
1	0.180	5.8	6.1	0.164	5.3	5.9	0.210	6.8	7.1
3	0.187	15.1	15.2	0.177	14.5	15.0	0.233	18.1	17.5
5	0.190	21.7	21.6	0.186	21.3	21.3	0.234	24.9	24.1
7	0.189	26.0	25.9	0.189	25.8	25.6	0.226	28.6	28.3
9	0.189	28.8	28.9	0.187	28.8	28.6	0.223	31.2	31.1
12	0.188	31.7	31.7	0.190	31.7	31.5	0.219	33.4	33.5
15	0.183	33.2	33.3	0.193	33.3	33.1	0.212	34.5	34.7
20	0.197	34.7	34.6	0.195	34.6	34.4	0.212	35.5	35.6
∞		35.4			35.3			36.0	

Turmalin B III.

$e =$	$30.1 \{1 - e^{-0.378z}\}$			$30.2 \{1 - e^{-0.379z}\}$		
z	a	e beob.	e ber.	a	e beob.	e ber.
0.5		5.1	5.2		5.2	5.2
1	0.420	10.3	9.5	0.412	10.1	9.5
2	0.405	16.7	16.0	0.410	16.8	16.0
4	0.395	23.9	23.5	0.381	23 6	23.6
6	0.337	26.7	27.0	0.350	26.7	27.1
8	0.331	28.0	28.6	0.342	28.2	28.7
12		29.3	29.8		29.4	29.9
∞		30.1			30.2	

Turmalin B IV.

$e =$	$28.8 \{1 - e^{-0.378z}\}$			$28.7 \{1 - e^{-0.382z}\}$		
z	a	e beob.	e ber.	a	e beob.	e ber.
0.5		4.8	4.9		4.8	5.0
1	0.394	9.4	9.0	0.406	9.6	9.1
2	0.386	15.4	15.1	0.403	15.9	15.3
4	0.368	22.1	22.3	0.375	22.4	22.5
6	0.343	25.1	25.7	0.345	25.1	25.8
10		27.7	28.1		27.5	28.1
∞		28 8			28.7	

Turmalin B V. $e = 27.4 \left\{1 - e^{-0.409\, z}\right\}.$

z	a	e beob.	e ber.
0.5		4.7	5.0
1	0.417	9.3	9.2
2	0.429	15.8	15.3
4	0.412	22.1	22.1
6	0.377	24.5	25.0
10		26.2	26.9
∞		27.4	

Turmalin B VI. $e = 25.1 \left\{1 - e^{-0.525\, z}\right\}.$

z	a	e beob.	e ber.
0.5		5.4	5.8
1	0.580	10.8	10.2
2	0.580	17.4	16.3
4	0.500	21.7	22.0
6	0.440	23.3	24.0
10		24.7	25.0
∞		25.1	

Turmalin E III. $e = 16.5 \left\{1 - e^{-0.408\, z}\right\}.$

z	a	e beob.	e ber.
1	0.396	5.4	5.5
2	0.428	9.5	9.2
4	0.427	13.5	13.3
8	0.381	15.7	15.8
∞		16.5	

Turmalin S II. $e = 21.0 \left\{1 - e^{-0.105\, z}\right\}.$

z	a	e beob.	e ber.
2		2.8	4.0
4	0.077	5.6	7.2
8	0.092	11.0	11.0
12	0.116	15.8	15.8
16	0.135	18.6	17.1
20		20.0	18.4
∞		21.0	

Turmalin M I a. $e = 16.0 \{1 - e^{-0.249\, z}\}$.

z	a	e beob.		e ber.
1	0.227	3.0	3.5	3.5
2	0.245	6.1	6.3	6.3
3	0.255	8.6	8.5	8.4
5	0.268	11.9	11.7	11.4
8	0.250	14.0	13.6	13.8
∞		16.0	16.0	

Turmalin M I b. $e = 28.0 \{1 - e^{-0.293\, z}\}$.

z	a	e beob.	e ber.
1	0.286	6.9	7.1
2	0.302	12.7	12.4
3	0.305	16.8	16.4
5	0.278	21.0	21.5
7	0.297	24.5	24.4
10	0.293	26.5	26.5
∞		28.0	

Turmalin M II.

$e =$	$44.7 \{1-e^{-0.199\, z}\}$			$42.5 \{1-e^{-0.203\, z}\}$		
z	a	e beob.	e ber.	a	e beob.	e ber.
1	0.180	7.3	8.0	0.204	7.8	7.8
2	0.193	14.3	14.6	0.195	13.7	14.1
3	0.201	20.2	20.1	0.200	19.1	19.4
4	0.203	24.9	24.5	0.204	23.7	23.6
5	0.206	28.7	28.1	0.203	27.1	27.1
7	0.203	33.9	33.6	0.207	32.5	32.3
9	0.200	37.2	37.2	0.204	35.7	35.7
12	0.201	40.7	40.6	0.203	38.8	38.8
18	0.201	43.5	43.4	0.209	41.5	41.4
∞		44.7			42.5	

Turmalin M III. $e = 34.8 \left\{1 - e^{-0.221\,z}\right\}$

z	a	e beob.	e ber.
1	0.207	6.5	6.9
2	0.220	12.4	12.4
3	0.227	17.2	16.9
4	0.228	20.8	20.4
5	0.228	23.7	23.3
7	0.224	27.6	27.4
10	0.223	31.1	31.0
15	0.214	33.4	33.5
∞		34.8	

Turmalin M IV. $e = 29.2 \left\{1 - e^{-0.242\,z}\right\}$

z	a	e beob.	e ber.
1	0.214	5.6	6.2
2	0.242	11.3	11.2
3	0.249	15.4	15.1
4	0·250	18.5	18.1
6	0.250	22.8	22.4
10	0.250	26.8	26.6
∞		29.2	

Multipliciren wir die im Vorhergehenden bestimmten Maximalwerthe E der elektrischen Ladungen mit den Längen der Turmaline, so repräsentiren diese Produkte die elektrischen Momente der Turmaline unter der Annahme, daß die ganze Ladung auf die Enden derselben koncentrirt ist. Dividiren wir die Produkte noch durch das Gewicht, so erhalten wir die elektrischen Momente μ der Gewichtseinheit. Diese Größen sind im Folgenden zusammengestellt mit Benutzung von cm und g. als Einheiten.

	B I	BII	B III	B IV	B V	B VI	E III	S II	M I a	M I b	M II	M III	M IV
E	26.8	35.6	30.1	28.7	27.4	25.1	16.5	21.0	16.0	28.0	43.6	34.8	29.2
μ	17.6	18.9	22.3	18.7	16.0	18.4	19.7	5.2	9.2	16.1	17.5	16.7	11.6

Die den vorhergehenden Zahlen zu Grunde liegende elektrische Einheit ist eine willkürliche. Um eine Vergleichung derselben mit absoluten Maaßen zu ermöglichen sei daran erinnert, daß sich aus den in meiner früheren Arbeit enthaltenen Resultaten für den Turmalin B I

eine Endflächendichtigkeit von etwa 600 mm, mg Einheiten ergiebt. Im cm g System würde diese Dichtigkeit 60 Einheiten betragen; ebenso groß würde dann das elektrische Moment der Volumeinheit sein, und somit das elektrische Moment der Gewichtseinheit etwa gleich 20 Einheiten des cm g Systems.

Bei der Betrachtung der für μ gefundenen Werthe fällt besonders auf die große Verschiedenheit der beiden Bruchstücke *a* und *b* des Turmalins M I, sowie die schwache Erregung des Turmalins S II., während bei den übrigen Turmalinen die Werthe von μ eine ziemliche Uebereinstimmung zeigen.

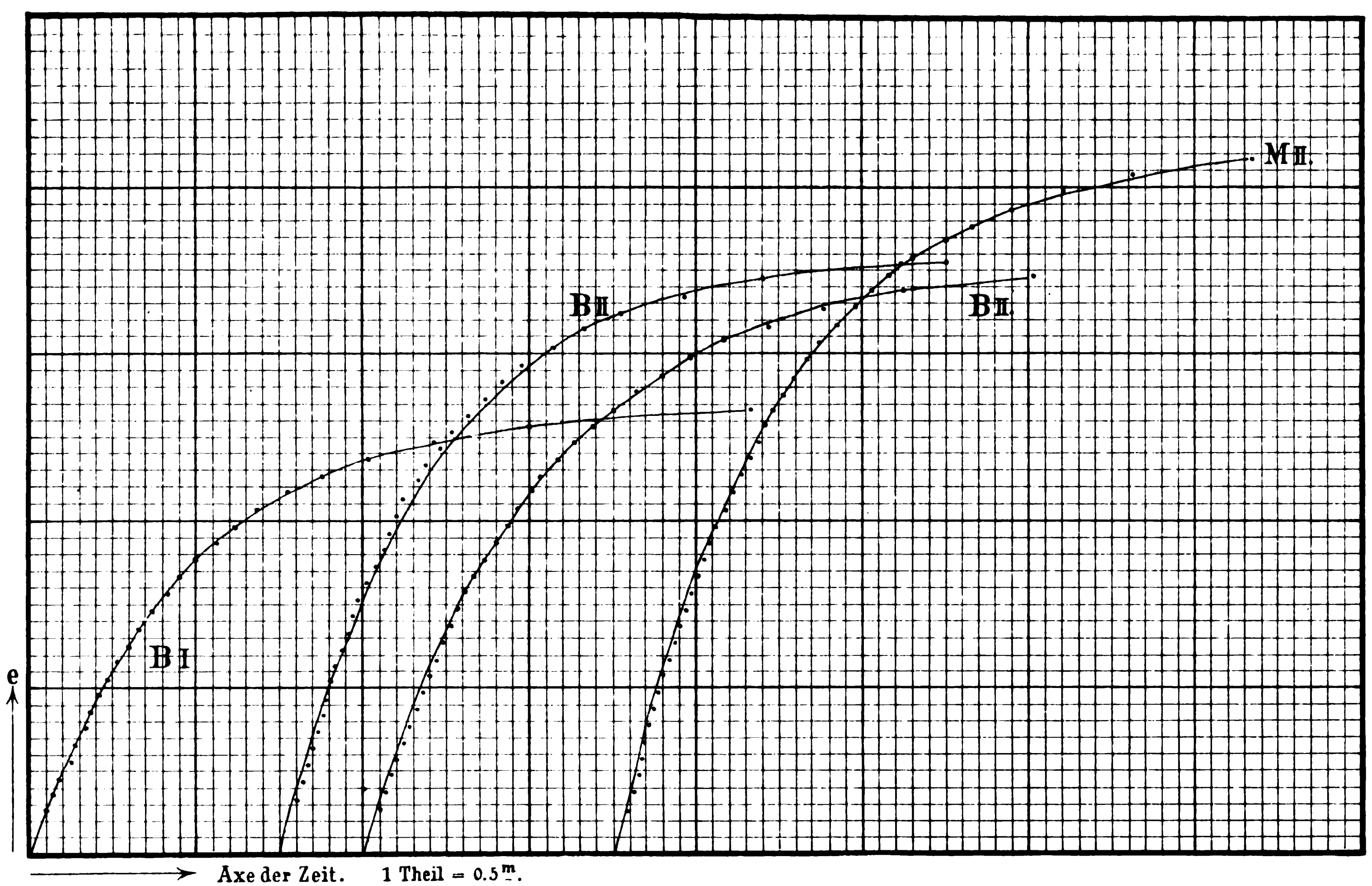
Durch die vorhergehenden Untersuchungen ist gezeigt, daß der Turmalin als ein Körper zu betrachten ist, dessen Moleküle in der Richtung der Axe eine permanente elektrische Polarisation besitzen. Man wird geneigt sein, diese Vorstellung auf die übrigen pyroëlektrischen Crystalle zu übertragen, also anzunehmen, daß die Moleküle derselben mit einem im Allgemeinen mehrpaarigen System elektrischer Pole verbunden und gegeneinander in bestimmter Weise orientirt sind. Man wird dann weiter erwarten, daß die elektrische Polarisation der Moleküle auf die physikalischen Eigenschaften der Crystalle einen gewissen Einfluß üben wird; dieß wird insbesondere von den elastischen Eigenschaften derselben gelten. Diejenigen Relationen, welche sich aus der Annahme einer nach allen Richtungen gleichen Wirkung der Moleküle ergeben, können bei pyroëlektrischen Crystallen nicht erfüllt sein. Nun ist nach den Untersuchungen meines verehrten Freundes Voigt

für Steinsalz	$b = 1,31 \times 10^6$,	$e = 1,29 \times 10^6$
für Flußspath	$b = 6,57 \times 10^6$,	$e = 5,59 \times 10^6$
für Beryll	$c_{12} = 6,74 \times 10^6$,	$c_{44} = 6,66 \times 10^6$
	$c_{11} = 2,8 \times c_{12}$	
für Bergkrystall	$c_{12} = 1,438 \times 10^6$,	$c_{44} = 5,823 \times 10^6$
	$c_{11} = 1,22 \times c_{12}$.	

Bei Abwesenheit polarer Wirkungen müssen die Beziehungen erfüllt sein:

$$b = e$$

$$c_{12} = c_{44} \quad \text{und} \quad c_{11} = 3c_{12}$$



Zu: Eduard Riecke, Zwei Fundamentalversuche zur Lehre von der Pyroelectricität.

Bei Steinsalz sind hiernach polare Kräfte nicht vorhanden, bei Beryll sind dieselben relativ schwach, bei Flußspath und Bergkrystall stark. Wenn nun auch die wenigen vorliegenden Thatsachen einen allgemeinen Schluß nicht gestatten, so verdient es doch bemerkt zu werden, daß in Uebereinstimmung hiermit bei Steinsalz eine pyroëlektrische Erregung nicht beobachtet ist, während sie beim Beryll schwach, bei Flußspath und Bergkrystall verhältnißmäßig stark ist.

Es möge endlich noch eine Thatsache erwähnt werden, welche wahrscheinlich all denjenigen aufgefallen ist, die sich mit der Beständubung des Turmalins abgegeben haben, die Thatsache, daß der Staub der Oberfläche des Turmalins fest und lange anhaftet. Es ist dieß wahrscheinlich eine Wirkung der Adhäsion, eingeleitet durch den Druck, mit welchem die Staubtheilchen gegen die Oberfläche des Turmalins gepreßt werden, solange dieser elektrisch wirksam ist. Ganz dasselbe Anhaften beobachtet man bei den auf einer Harztafel hergestellten Lichtenberg'schen Figuren und es dürfte daher ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen dem Haften des Staubes und der im Vorhergehenden betrachteten permanenten Polarisation des Turmalins nicht bestehen.

In den beigegebenen Figuren sind die für die Turmaline BI, BII, M II angestellten Beobachtungsreihen 1, 2, 4 und 17 zusammengestellt mit den für diese Beobachtungen berechneten Curven.

Göttingen, 23. März 1887.

Universität.

Preisstiftung der Wittwe Petsche geb. Labarre.

Die von der juristischen Fakultät am 7. Juni 1886 gestellte Preisaufgabe

> »*Die staatsrechtliche Lehre von der Regentschaft und Stellvertretung des Monarchen nach deutschem Staatsrecht*«

hat eine Bearbeitung gefunden, welcher die Fakultät zwar nicht den vollen Preis zuerkennen konnte, der aber in Anbetracht des Geleisteten der halbe Preis (Einhundertfünfzig Mark) zugebilligt worden ist.

Als Verfasser hat sich ergeben:

stud. jur. Wilhelm Dieckmann
aus Hannover.

Göttingen 15. April 1887.

Der Dekan der juristischen Fakultät
Ziebarth.

Inhalt von Nr. 7.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).



Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

11. Mai. | № 8. | 1887.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 10. Juli 1886.

Theorie des Lichtes für bewegte Medien.

Von **W. Voigt.**

I. Die Ableitung der Gesetze für die Fortpflanzung des Lichtes in bewegten Medien ist ungemein oft in Angriff genommen, obwohl nur eine kleine Zahl von Erscheinungen zuverlässig festgestellt und eine noch kleinere in allen bedingenden Umständen soweit klar gelegt ist, daß an eine exacte Vergleichung der Beobachtungsresultate mit der Theorie gedacht werden kann, und obwohl demgemäß ein allgemeineres Interesse für den Gegenstand fehlt.

Trotzdem will ich im Folgenden dieses Problem noch einmal behandeln, weil ich glaube, daß in den früheren Theorien der Zusammenhang mit der allgemeinen Elasticitätstheorie nicht immer so gewahrt worden ist, wie mir nothwendig und möglich scheint, und weil ich gefunden habe, daß dieselben Grundsätze, die ich in allen übrigen Gebieten der Optik als Ausgangspunkt gewählt habe, sich auch hier fruchtbar erweisen.

Als mit der Elasticitätstheorie nicht vereinbar erscheint mir die von Fresnel eingeführte Vorstellung einer theilweisen Mitführung des Aethers durch die bewegten ponderabeln Massen, sei dieselbe nun verstanden als eine Verschiebung des gesammten in jenen befindlichen Aethers mit einem Theil der Körpergeschwindig-

keit, oder eines Theiles des Aethers mit der gesammten Körpergeschwindigkeit.

Die erste Vorstellung giebt an der Grenze zweier verschiedener Körper durch die endliche Verschiedenheit der Geschwindigkeit zu beiden Seiten nothwendig ein Zerreißen des Aethers, der ja als fester Körper gedacht ist, — ein Vorgang der bei fortgesetzter Bewegung die Verwandelung des ganzen Aethers in „Staub“ zur Folge haben müßte d. h. in ein Aggregat, welches zur Fortpflanzung von Lichtschwingungen ganz unfähig ist. Dabei ist es zudem ganz unerfindlich, wie sich in einem Medium, das jede Spannung mit Lichtgeschwindigkeit fortpflanzt, durch die Bewegung eines Theiles desselben mit viel geringerer Geschwindigkeit endliche Geschwindigkeitsdifferenzen in der Grenze bilden sollen. Die Elasticitätstheorie giebt, wie ich gelegentlich gezeigt habe, nichts dem Aehnliches[1]).

Die zweite Vorstellung, welche einen Theil des Aethers den ponderabeln Massen anhängend denkt, diesen aber bei Ableitung der Lichtgesetze einfach dem freien Aether zuaddirt scheint mir nicht minder bedenklich. Denn wenn ein Theil des Aethers unter andern Kräften steht, muß er auch andere Elasticität besitzen, das System ist also kein einfaches mehr, sondern ein gemischtes und müßte daher auf stets zwei Lichtgeschwindigkeiten führen.

Alle diese Schwierigkeiten verschwinden mit einem Male, wenn man der Neumann'schen Hypothese beistimmt, nach welcher der Aether allenthalben die gleiche Dichte besitzt, denn dann ergiebt sich von selbst, daß er sich nicht mit den fortbewegten ponderabeln Massen verschiebt. Doch ist es nicht nothwendig, ihn darum in absoluter Ruhe anzunehmen; dies wäre im Gegentheil eine unwahrscheinliche Hypothese und es erscheint plausibler, ihn in irgend welcher selbstständiger Bewegung zu denken, die wegen der großen Geschwindigkeit, mit welcher Spannungen sich im Aether ausgleichen, zwar in (gegenüber den uns zugänglichen) großen Räumen mit constanter Geschwindigkeit und Richtung stattfinden dürfte, aber in Fixsternweiten möglicher Weise merklich verschieden ist. Wenigstens steht dem von Seiten der Elasticitätstheorie nichts entgegen.

Müssen wir also zugeben, daß der Aether eine selbstständige, ja selbst wechselnde Bewegung besitzen kann, so werden wir alle Beobachtungen, welche zur Berechnung die Kenntniß der gesammten relativen Geschwindigkeit der Erde gegen den Aether verlan-

1) W. Voigt, Crelle's Journ. Bd. 89, p. 288. 1882.

gen, als zu einer exacten Prüfung der Theorie unbrauchbar ansehen müssen, weil jene Größe nie bestimmt werden kann; und es werden nur diejenigen Anordnungen des Experimentes brauchbar bleiben, welche die Beobachtung abhängig machen von dem unter Umständen bestimmbaren Werthe der Differenz zwischen zwei verschiedenen solchen Geschwindigkeiten.

Schließen wir sonach eine Betheiligung des Aethers an den fortschreitenden Bewegungen der ponderabeln Massen aus, so kann ein Unterschied der Lichtbewegung in ruhenden und fortschreitenden Körpern nur dadurch hervorgebracht werden, daß die zwischen ponderabeln und Aethertheilchen wirkenden Kräfte hier und dort verschiedenen Gesetzen folgen. Diese Gesetze können sich dabei entweder nur durch die Werthe der Constanten oder aber durch die ganze Form unterscheiden.

Wir nehmen nun zunächst an, es gäbe Medien, die im ruhenden wie im bewegten Zustande vollkommen durchsichtig sind und fragen uns ob Wirkungen zwischen Materie und Aether denkbar sind, die hiermit (d. h. also mit dem Princip der Energie) vereinbar sind und doch die sichergestellten Eigenthümlichkeiten bewegter Medien ergeben.

Dabei berücksichtigen wir, um die Formeln von allem Anfang an zu vereinfachen, daß wir alle Ursache haben, die Dichtigkeit des Aethers als verschwindend neben derjenigen der Materie anzusehen, daß demgemäß, wie in einem ruhenden Körper früher die Ausweichungen der ponderabeln Theile aus der Ruhelage verschwindend klein gegen die der Aethertheilchen gesetzt sind, wir jetzt bei bewegten Medien die Elongationen der ponderabeln Theile in Folge der Lichtbewegung gleichfalls zu vernachlässigen, also das Princip der Energie nur auf den Aether anzuwenden haben. Wir denken uns denselben innerhalb des betrachteten Raumes von nach Richtung und Größe constanter Translations-Geschwindigkeit, können ihn also auf ein entsprechendes Coordinatensystem bezogen als ruhend ansehen.

Wir sind früher zu dem Princip der Energie gelangt durch die Gleichung der lebendigen Kraft [1]):

$$\sum_h \int \frac{dm_h}{2} \frac{\partial (V^2)}{\partial t} = S_i + S_j \qquad (1)$$

welche aussagt: die Summe der Zuwachse der lebendigen Kräfte

1) W. Voigt, Wied. Ann. Bd. 19, p. 878, 1883.

der Aetherbewegung ist gleich der Arbeit S_i der innern Kräfte des Aethers plus derjenigen S_j der Wechselwirkungen zwischen Materie und Aether.

Nach den bekannten Werthen der innern Kräfte des Aethers schreibt sich nach Einfügung von deren Potential Φ:

$$S_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \overline{S}_i,$$

(2) worin

$$\overline{S}_i = \sum^{\lambda} \int do_{\lambda} (\overline{X}_n \overline{u}' + \overline{Y}_n \overline{v}' + \overline{Z}_n \overline{w}')_{\lambda}$$

die Arbeit aller an den Oberflächen des Systems wirkenden innern Kräfte des Aethers bezeichnet. Die Summe bezieht sich auf die Oberflächen o_{λ} aller Körper des Systemes.

Die Arbeit der Wechselwirkungen, deren Componenten parallel den Coordinatenaxen wir A, B, C nennen, ist

$$(3) \qquad S_j = \sum_{\lambda} \int d\tau_{\lambda} (Au' + Bv' + Cw')_{\lambda}.$$

Betrachten wir nun zunächst eine Lichtbewegung, welche zur Zeit ganz innerhalb eines homogenen Körpers des Systems verläuft und keine der Grenzen o_{λ} erreicht hat, (denken uns etwa nur einen einzigen sehr großen homogenen Körper gegeben) so können wir dieselbe in eine feste Oberfläche einschließen, die ebenfalls ganz in diesem Körper liegt und längs deren überall $\overline{u}'$, $\overline{v}'$, $\overline{w}'$ gleich Null ist. Dann giebt unsere Gleichung, da $\overline{S}_i = 0$ ist:

$$(4) \qquad \frac{\partial (T + \Phi)}{\partial t} = S_j.$$

Soll die Energie des Systems constant sein, so muß auch S_j ein vollständiger Differentialquotient nach der Zeit sein von Functionen, die sich nur durch die augenblickliche Configuration des Systemes bestimmen.

Welche Kräfte A, B, C dem entsprechen habe ich schon früher mitgetheilt[1]), allerdings ohne Nachweis; einer gegebenen Anregung folgend trage ich denselben hier nach.

Es soll also gemacht werden:

$$\int (Au' + Bv' + Cw')\, d\tau = -\frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad \text{oder}$$

(4)

$$Au' + Bv' + Cw' = -\frac{\partial \psi}{\partial t},$$

1) W. Voigt, l. c. p. 877.

wobei vorausgesetzt wird, daß A, B, C lineäre Functionen der Differentialquotienten von u, v, w sind, da nur lineäre Functionen das Beobachtungsresultat ergaben, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Intensität des Lichtes unabhängig ist.

Nach (4) können A, B, C nur die Differentialquotienten nach der Zeit enthalten, es ist also allgemein so zu setzen

$$-\phi = \sum_{hk}\left(a_{hk}\frac{\partial^h u}{\partial t^h}\frac{\partial^k u}{\partial t^k} + b_{hk}\frac{\partial^h v}{\partial t^h}\frac{\partial^k u}{\partial t^k} + \cdots\right)$$

$$-\frac{\partial\psi}{\partial t} = \sum_{hk}\left[a_{hk}\left(\frac{\partial^{h+1}u}{\partial t^{h+1}}\frac{\partial^k u}{\partial t^k} + \frac{\partial^h u}{\partial t^h}\frac{\partial^{k+1}u}{\partial t^{k+1}}\right) + \cdots\right]$$

Soll dies auf die obige Formel führen, also jedes Glied einen ersten Differentialquotienten nach der Zeit enthalten, so sind drei Fälle möglich:

I. h und k sind gleich 0,

$$-\psi_I = a_{11}u^2 + a_{12}uv + \cdots.$$

II. h und k sind gleich 1,

$$-\psi_{II} = b_{11}u'^2 + b_{12}u'v' + \cdots.$$

III. h ist gleich 1, k gleich 2, oder umgekehrt, und die Coefficienten sind so bestimmt, daß die Glieder von der Form $u''v''$ etc. sich fortheben; also

$$-\phi_{III} = c_{12}(u'v'' - v'u'') + c_{23}(v'w'' - w'v'') + c_{31}(w'u'' - u'w'').$$

Höhere Differentialquotienten können nicht vorkommen, weil dann keine Möglichkeit ist, lauter Glieder mit einem ersten Differentialquotienten zu erhalten.

Außerhalb dieser Reihe steht der Werth $\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0$ oder $\psi =$ Const., der erhalten wird indem man setzt:

IV.

$$\begin{aligned}-\mathrm{A} &= \partial_{12}v' - \partial_{13}w'\\ -\mathrm{B} &= \partial_{23}w' - \partial_{21}u'\\ -\mathrm{C} &= \partial_{31}u' - \partial_{32}v'\end{aligned}$$

wobei $\partial_{hk} = \partial_{kh}$ ist.

Die so erhaltene erste Reihe von Kräften bietet nur solche, die bei einer Verschiebung eines Volumenelementes Aether ohne Deformation erregt werden.

Zu einer zweiten Reihe gelangt man, wenn man einführt [1]):

---

1) W. Voigt, l. c. p. 879.

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
-\mathrm{A} &= \frac{\partial \mathrm{A}_x}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{A}_y}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{A}_z}{\partial z}\\
-\mathrm{B} &= \frac{\partial \mathrm{B}_x}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{B}_y}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{B}_z}{\partial z}\\
-\mathrm{C} &= \frac{\partial \mathrm{C}_x}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{C}_y}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{C}_z}{\partial z}
\end{aligned}
$$

und hiernach durch theilweise Integration unformt

$$
(6)\qquad \mathrm{S}_j = \mathrm{S}_{ji} - \overline{\mathrm{S}}_j
$$

worin

$$
\begin{aligned}
\mathrm{S}_{ji} = \Sigma^h \int dr_h \Big[&\mathrm{A}_x \frac{\partial u'}{\partial x} + \mathrm{A}_y \frac{\partial u'}{\partial y} + \mathrm{A}_z \frac{\partial u'}{\partial z} + \mathrm{B}_x \frac{\partial v'}{\partial x} + \mathrm{B}_y \frac{\partial v'}{\partial y} + \mathrm{B}_z \frac{\partial v'}{\partial z}\\
&+ \mathrm{C}_x \frac{\partial w'}{\partial x} + \mathrm{C}_y \frac{\partial w'}{\partial y} + \mathrm{C}_z \frac{\partial w'}{\partial z}\Big]_h ,\\
\overline{\mathrm{S}}_j = \Sigma^h \int do_h\, &(\overline{\mathrm{A}}_n \overline{u}' + \overline{\mathrm{B}}_n \overline{v}' + \overline{\mathrm{C}}_n \overline{w}')_h ,
\end{aligned}
$$

falls

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
\mathrm{A}_n &= \mathrm{A}_x \cos(n,x) + \mathrm{A}_y \cos(n,y) + \mathrm{A}_z \cos(n,z)\\
\mathrm{B}_n &= \mathrm{B}_x \cos(n,x) + \mathrm{B}_y \cos(n,y) + \mathrm{B}_z \cos(n,z)\\
\mathrm{C}_n &= \mathrm{C}_x \cos(n,x) + \mathrm{C}_y \cos(n,y) + \mathrm{C}_z \cos(n,z)
\end{aligned}
$$

ist.

Betrachten wir wiederum eine Lichtbewegung, die ganz innerhalb eines homogenen Theiles des Systemes liegt, so fordert das Princip der Energie, daß nunmehr

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
&\int dr_h \Big[\mathrm{A}_x \frac{\partial u'}{\partial x} + \mathrm{A}_y \frac{\partial u'}{\partial y} + \cdots\Big]_h = -\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial t}\\
&\text{oder}\\
&\mathrm{A}_x \frac{\partial u'}{\partial x} + \mathrm{A}_y \frac{\partial u'}{\partial y} + \cdots \qquad = -\frac{\partial \chi}{\partial t} \quad \text{ist.}
\end{aligned}
$$

Diese Form zeigt, daß die $\mathrm{A}_x, \cdots$ nur solche lineäre Functionen sein können, die erste Differentialquotienten nach den Coordinaten, aber höhere nach der Zeit enthalten. Setzt man kurz $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x$ u. s. f., so ist die allgemeine Form für χ:

$$
-\chi = \sum_{hk} \Big(e_{hk} \frac{\partial^h u_x}{\partial t^h} \frac{\partial^k u_x}{\partial t^k} + \cdots\cdots \Big).
$$

Soll dies auf eine Form $\frac{\partial \chi}{\partial t}$ führen, in der jedes Glied einen ersten Differentialquotienten nach der Zeit enthält, so ergeben sich dieselben 3 Fälle möglich wie oben:

I. h und k gleich 0,

$$
-\chi_I = e_{11} u_x^2 + e_{12} u_x v_y + \cdots
$$

II. h und k gleich 1,

$$-\chi_{II} = f_{11} u_x'^2 + f_{12} u_x' v_y' + \cdots$$

III. h gleich 1, k gleich 2 oder umgekehrt und die Coefficienten so bestimmt, daß die Glieder mit zwei zweiten Differentialquotienten nach der Zeit sich fortheben, also

$$-\chi_{III} = g_{12}(u_x' v_y'' - v_y' u_x'') + \cdots.$$

Höhere Differentialquotienten sind nicht mit der gestellten Forderung vereinbar. Dagegen kommt auch hier noch eine Form von $A_x \ldots$ in Betracht, welche $\frac{\partial \chi}{\partial t} = 0$ macht, nämlich

$$\text{IV.} \qquad \begin{aligned} -A_x &= \quad h_{12} u_y' + h_{13} u_z' + \cdots. \\ -A_y &= -h_{21} u_x' + \cdots. \\ -A_z &= -h_{31} u_x' + \cdots \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

Diese zweite Reihe von Kräften enthält solche, die von den Deformationen des Volumenelementes Aether abhängig werden.

Es scheint nun zunächst, als könnte man in der eingeschlagenen Richtung noch weiter gehen, etwa setzen in S_j, fortbildend die Formeln (5):

$$+A = \frac{\partial^2 A_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_{zz}}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 A_{yz}}{\partial y \partial z} + 2\frac{\partial^2 A_{xz}}{\partial x \partial z} + 2\frac{\partial^2 A_{xy}}{\partial x\, \partial y}$$

u. s. f. und darauf durch zweimalige Integration ein Raumintegral gewinnen von der Form

$$S_{j_n} = \Sigma^h \int d\tau_h \left(A_{xx} \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + A_{xy} \frac{\partial^2 u'}{\partial x \partial y} + \cdots \right),$$

welches dann wiederum durch Werthe von $A_{xx} \ldots$ zu einem Differentialquotienten nach der Zeit gemacht werden könnte.

Indessen giebt die zweimalige theilweise Integration hier zwei Oberflächenintegrale, das erste von der Form

$$\Sigma^h \int do_h \left[\left(\overline{\frac{\partial A_{xx}}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial A_{xy}}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial A_{xz}}{\partial z}} \right) \overline{u'} \cos(n, x) + \cdots \right]$$

das zweite:

$$\Sigma^h \int do_h \left[\left(\overline{A_{xx}} \overline{\frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{A_{xy}} \overline{\frac{\partial u'}{\partial y}} + \overline{A_{xz}} \overline{\frac{\partial u'}{\partial z}} \right) \cos(n, x) + \cdots \right].$$

Letzteres ist mit dem Princip der Energie nicht vereinbar, tritt aber auf sobald die Lichtbewegung eine Grenze zwischen mehreren Körpern erreicht hat.

Dies einzusehen bedenke man, daß das Princip der Energie den Zuwachs der Energie in der Zeiteinheit gleich der auf die Zeiteinheit bezogenen zugeführten Arbeit setzt. Die zugeführte Arbeit kann aber, da in unserer Ausgangsgleichung äußere Kräfte, welche auf innere Punkte wirken, nicht eingeführt sind, nur noch von Oberflächendrucken herrühren. Es muß also, wenn deren Componenten $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ sind, die Gleichung (4) sich auf die Form bringen lassen

$$\frac{\partial E}{\partial t} = S_o = \sum_{hk} \int do_{hk} (\overline{Xu'} + \overline{Yv'} + \overline{Zw'}),$$

wo S_o die Arbeit der in der Oberfläche wirkenden äußeren Kräfte bezeichnet. Nun gilt für ein sehr niedriges über einem Grenzelement do_{hk} zwischen dem Körper h und dem Körper k errichtetes cylindrisches Raumelement:

$$\overline{X} + (\overline{X}_n)_h + (\overline{A}_n)_h + (\overline{X}_n)_k + (\overline{A}_n)_k + A_{hk} + A_{kh} = 0$$

u. s. f., falls $(A_n)_h$ die Wirkung der Materie im Körper h, A_{hk} aber diejenige der Materie im Körper k auf den an do_{hk} anliegenden Aether im Körper h bezeichnet. Damit also die in unserer Entwickelung auftretenden Oberflächenintegrale sich zu S_o zusammenfügen können, müssen sie drei mit $\overline{u'}$, $\overline{v'}$, $\overline{w'}$ proportionale Glieder enthalten. Dies findet aber bei dem zuletzt erhaltenen Oberflächenintegral nicht statt, — es sei denn A_{xx}, A_{xy} ... selbst mit u', v', w' proportional, was aber nichts Neues giebt — und demgemäß ist die ihm zu Grunde liegende Verfügung über A, B, C nicht mit dem Princip der Energie vereinbar.

Wir erhalten also auf dem hier nochmals entwickelten Wege keine anderen Kräfte, als die schon früher für ruhende vollkommen durchsichtige Medien abgeleiteten acht Gattungen. Der Einfluß der Bewegung des Körpers könnte sich also, wie es scheint, nur in den Constanten dieser Ausdrücke äußern.

Aber diese Kräfte sind überhaupt nicht geeignet, die Fundamentalerscheinung bewegter durchsichtiger Medien zu ergeben, nämlich eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener Wellen, die in entgegengesetzten Richtungen verschiedene Werthe besitzt, welche Eigenschaft bewegter Medien als durch die Beobachtung von Fizeau über die Verzögerung in bewegter Flüssigkeit erwiesen ist. Alle die entwickelten Kraftgesetze verbinden nämlich mit einer variablen Fortpflanzungsgeschwindigkeit nothwendig Doppelbrechung und führen daher auf durchaus andere Resultate. Wenn also überhaupt die Grundannahme bewegter und dabei vollkommen

durchsichtiger Körper haltbar ist, muß die Gleichung der Energie noch auf andere Weise als bisher gefunden erfüllbar sein.

Es sollte für eine noch durchaus im Innern eines homogenen Körpers des Systems befindliche Lichtbewegung die Arbeit der Wechselwirkung zwischen Aether und Materie ein vollständiger Differentialquotient nach der Zeit sein, d. h. nach (4):

$$\int (\mathrm{A}u' + \mathrm{B}v' + \mathrm{C}w')\, d\tau = -\frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Diese Form wird anders als bisher angenommen erreicht, wenn die linke Seite sich vollständig in ein Oberflächenintegral verwandeln läßt, welches ja bei der gemachten Annahme verschwindet.

Dies findet auf die allgemeinste Weise statt, wenn

$$\mathrm{A}u' + \mathrm{B}v' + \mathrm{C}w' = -\left(\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\right) \tag{9}$$

gesetzt werden kann. Dann ist nämlich

$$\int (\mathrm{A}u' + \mathrm{B}v' + \mathrm{C}w')\, d\tau = -\int do\, (\overline{\mathrm{D}} \cos(n,x) + \overline{\mathrm{E}} \cos(n,y) + \overline{\mathrm{F}} \cos(n,z)) \tag{10}$$

und an einer Oberfläche, längs welcher u', v', w' Null sind, verschwinden auch die D, E, F als nothwendig lineäre Functionen jener Größen.

Damit aber das letzte Oberflächenintegral, wie oben gesagt ist, nur mit u', v', w' proportionale Glieder enthalte [1]), müssen wir den allgemeinsten Ansatz machen:

$$\begin{aligned} \mathrm{D} &= u'\mathrm{D}_1 + v'\mathrm{D}_2 + w'\mathrm{D}_3 \\ \mathrm{E} &= u'\mathrm{E}_1 + v'\mathrm{E}_2 + w'\mathrm{E}_3 \\ \mathrm{F} &= u'\mathrm{F}_1 + v'\mathrm{F}_2 + w'\mathrm{F}_3, \end{aligned} \tag{11}$$

welcher durch Einsetzen in (9) ergiebt:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}u' + \mathrm{B}v' + \mathrm{C}w' = &-\Big[u'\Big(\frac{\partial \mathrm{D}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial z}\Big) + v'\Big(\frac{\partial \mathrm{D}_2}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{E}_2}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial z}\Big) \\ &+ w'\Big(\frac{\partial \mathrm{D}_3}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{E}_3}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{F}_3}{\partial z}\Big)\Big] \\ &-\Big[\mathrm{D}_1 \frac{\partial u'}{\partial x} + \mathrm{D}_2 \frac{\partial v'}{\partial x} + \mathrm{D}_3 \frac{\partial w'}{\partial x} + \mathrm{E}_1 \frac{\partial u'}{\partial y} + \mathrm{E}_2 \frac{\partial v'}{\partial y} + \mathrm{E}_3 \frac{\partial w'}{\partial y} \\ &+ \mathrm{F}_1 \frac{\partial u'}{\partial z} + \mathrm{F}_2 \frac{\partial v'}{\partial z} + \mathrm{F}_3 \frac{\partial w'}{\partial z}\Big]. \end{aligned} \tag{12}$$

1) Wie sich später zeigen wird, erscheint bei den bewegten diese Beschränkung minder zwingend als bei den ruhenden Medien, indessen würde ihre Beseitigung nur den Erfolg haben, daß die Constanten d_{hk}, e_{hk}, f_{hk} in den folgenden Entwickelungen sich als Functionen der Schwingungsdauer darstellen.

Damit hierin rechts dieselbe Form wie links entstehe, bieten sich nur zwei Verfügungen über die D_h, E_h, F_h: entweder dieselben sämmtlich lineär in u', v', w' zu machen, oder aber in $\frac{\partial u'}{\partial x}$, $\frac{\partial u'}{\partial y}$, ... mit so bestimmten Coefficienten, daß sich rechts die Glieder der zweiten Klammer gegenseitig zerstören.

Die letztere Verfügung giebt aber nichts Neues; denn wir erhalten durch sie:

$$-A = \frac{\partial D_1}{\partial x} + \frac{\partial E_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z}$$
$$-B = \frac{\partial D_2}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial z}$$
$$-C = \frac{\partial D_3}{\partial x} + \frac{\partial E_3}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

worin die D_1, D_2 ... so bestimmt sind, daß

$$D_1 \frac{\partial u'}{\partial x} + E_1 \frac{\partial u'}{\partial y} + F_1 \frac{\partial u'}{\partial z} + D_2 \frac{\partial v'}{\partial x} + \ldots . = 0 \quad \text{ist.}$$

Dies ist aber die Grundeigenschaft der Kräfte IV des zweiten Systems (s. p. 183).

Hingegen giebt die erstere Verfügung ein neues Gesetz.

Nehmen wir [1]:

$$(13) \qquad 2D = d_{11} u'^2 + d_{22} v'^2 + d_{33} w'^2 + 2(d_{23} v'w' + d_{31} w'u' + d_{12} u'v')$$

und analog E und F, so folgt:

$$(14) \qquad \begin{aligned} -(Au' + Bv' + Cw') = {} & d_{11} u' \frac{\partial u'}{\partial x} + d_{22} v' \frac{\partial v'}{\partial x} + d_{33} w' \frac{\partial w'}{\partial x} \\ & + d_{23}\left(v' \frac{\partial w'}{\partial x} + w' \frac{\partial v'}{\partial x}\right) + d_{31}\left(w' \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial w'}{\partial x}\right) \\ & + d_{12}\left(u' \frac{\partial v'}{\partial x} + v' \frac{\partial u'}{\partial x}\right) + \cdots\cdots ; \end{aligned}$$

also:

$$(15) \qquad \begin{aligned} -A = {} & d_{11} \frac{\partial u'}{\partial x} + d_{12} \frac{\partial v'}{\partial x} + d_{13} \frac{\partial w'}{\partial x} \\ & + e_{11} \frac{\partial u'}{\partial y} + e_{12} \frac{\partial v'}{\partial y} + e_{13} \frac{\partial w'}{\partial y} \\ & + f_{11} \frac{\partial u'}{\partial z} + f_{12} \frac{\partial v'}{\partial z} + f_{13} \frac{\partial w'}{\partial z} \end{aligned}$$

und ähnlich $-B$ und $-C$.

Diese Formen sind die einzigen, welche in der erörterten

1) Die hier eingeführten Coefficienten d_{hk}, e_{hk}, f_{hk} haben natürlich mit den früher vorübergehend benutzten nichts gemein.

Weise das Princip der Energie erfüllen, und, so viel ich sehe, giebt (15) auch die einzige, welche außer den acht früher abgeleiteten Gesetzen für die Wechselwirkung zwischen Materie und Aether in vollkommen durchsichtigen Medien noch anzunehmen zulässig ist. Es wird sich zeigen, daß dieselbe in der That geeignet ist, die Erscheinungen, welche bewegte Medien darbieten, zu erklären. Dieses darzuthun wollen wir sie nunmehr in ihrer Wirkung verfolgen und zwar zunächst, um von den Begrenzungen unabhängig zu sein, unendlich große homogene Körper voraussetzen, in welchen die Fortpflanzung des Lichtes stattfindet.

II. Ist der betrachtete Körper isotrop, so ist in ihm nur eine ausgezeichnete Richtung vorhanden, nämlich diejenige der Translationsbewegung für welche wir die X-Axe wählen, und alle mit ihr gleiche Winkel einschließenden sind gleichwerthig.

Es muß daher, wenn man die Y- mit der Z- und die Z- mit der —Y-Richtung vertauscht, A ungeändert bleiben, B in C und C in —B übergehen. Dadurch reduciren sich die Werthe (15) auf:

$$-\mathrm{A} = d_{11}\frac{\partial u'}{\partial x}, \quad -\mathrm{B} = d_{22}\frac{\partial v'}{\partial x}, \quad -\mathrm{C} = d_{22}\frac{\partial w'}{\partial x}. \qquad (16)$$

Eine Relation zwischen d_{11} und d_{22} ist zunächst nicht zu geben möglich.

Setzt man diese Werthe in die Bewegungsgleichungen ein, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= A\triangle u - d_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial L}{\partial x}\\
M\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= A\triangle v - d_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial L}{\partial y}\\
M\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= A\triangle w - d_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial L}{\partial z}.\\
\text{neben}\quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0.
\end{aligned}$$

Hierin sind M und A die in früheren Abhandlungen von mir benutzten Constanten des ruhenden durchsichtigen Mediums, L ist der in Folge der Incompressibilität auftretende hydrostatische Druck. M und A enthalten im allgemeinsten Falle die Schwingungsdauer. Die Componenten u, v, w werden nur dann von einander unabhängig, d. h. die Fortpflanzung jeder Gattung polarisirten Lichtes möglich, wenn dieser Druck verschwindet. Es gilt für L:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[d_{11}\frac{\partial u'}{\partial x}+d_{22}\left(\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}\right)\right] = \triangle L$$

oder
$$\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}(d_{11}-d_{22}) = \triangle L.$$

L läßt sich also Null setzen, wenn $d_{11} = d_{22} = d$ ist.

Dann haben die Componenten A, B, C die Werthe

$$(17)\qquad -\mathrm{A} = d\frac{\partial u'}{\partial x},\quad -\mathrm{B} = d\frac{\partial v'}{\partial x},\quad -\mathrm{C} = d\frac{\partial w'}{\partial x}$$

und ist

$$\mathrm{D} = \frac{d}{2}V^2,\qquad \mathrm{E}=\mathrm{F}=0$$

wenn $u'^2+v'^2+w'^2 = V^2$ gesetzt wird; die drei Bewegungsgleichungen aber haben die Form:

$$(18)\qquad M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A\triangle u - d\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}.$$

Setzt man $u = a\sin\frac{1}{\tau}\left(t-\frac{\rho}{\omega}\right)$, worin

$$\rho = \alpha x+\beta y+\gamma z \quad\text{und}\quad \tau = T/2\pi \text{ ist,}$$

so folgt:

$$M\omega^2 = A+d\alpha\omega$$

also

$$(19)\qquad \omega = \frac{\pm\sqrt{4AM+d^2\alpha^2}+d\alpha}{2M},$$

wo nur das obere Vorzeichen zu benutzen ist, wenn man ω als absolute Größe rechnet. Die Wellennormalenfläche giebt also eine Kugel, deren Centrum um die Länge $+\frac{d}{2M}$ auf der X-Axe vom Anfangspunkt abliegt und deren Radius $R = \sqrt{4AM+d^2}/2M$ beträgt.

Von der neuen Constante d ist zunächst nichts weiter zu sagen, als daß sie mit der Translationsgeschwindigkeit des ponderabeln Körpers verschwinden muß. Denn wenn der isotrope Körper ruht, können entgegengesetzte Richtungen sich nicht mehr optisch verschiedenartig erhalten. Außerdem muß sie im freien Aether gleich Null sein. Man kann also für kleine Translationsgeschwindigkeit Ω jedenfalls setzen:

$$d = D\Omega, \qquad (20)$$

wo D eine Größe ist, die auf noch unbekannte Weise von der

Natur des bewegten ponderabeln Körqers abhängt. Setzt man $A/M = \omega^\circ$ als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im ruhenden durchsichtigen Körper (wie wir überhaupt durch den Index $^\circ$ die verschiedenen Größen als auf das ruhende Medium bezogen andeuten wollen), so giebt sich auch:

$$\omega^2 = \omega^{\circ 2} + \frac{D\alpha}{M}\Omega\omega,$$

oder da $\Omega\alpha$ die Componente der Translationsgeschwindigkeit Ω nach der Wellennormale ρ ist, die man mit Ω_ρ bezeichnen kann [1]), kurz auch:

$$\omega^2 = \omega^{\circ 2} + \frac{D\Omega_\rho}{M}\omega. \tag{21}$$

Ist Ω_ρ klein gegen ω, so folgt bis auf zweite Ordnung exclusive:

$$\omega = \omega^\circ + \frac{D}{2M}\Omega_\rho, \tag{22}$$

oder kurz $D/2M = k$ gesetzt:

$$\omega = \omega^\circ + k\Omega_\rho.$$

Diese Form ist vielfach in Arbeiten über unsern Gegenstand nach Fresnels Vorgang vorausgesetzt und zur Erklärung der bekannten Beobachtungen von Arago, Fizeau, Boscovich u. A. benutzt [2]); das erwähnte Fizeau'sche Experiment [3]) zeigt, daß darin $D/2M = k$ nahe gleich $(n^2 - 1)/n^2$ sein muß, für den Brechungsexponenten n des Mediums einen mittleren Werth gesetzt.

Nach der von uns zumeist vertretenen Anschauung, daß M der Dichtigkeit des freien Aethers nahe oder streng gleich ist, würde dies verlangen, daß

$$k = \frac{D}{2M} = \frac{A_0 - A}{A_0}\ ^{4})$$

1) Abweichend von den Theorien, welche auf der „Mitführung" des Aethers durch den ponderabeln Körper beruhen, giebt die unsere auch in der strengen Formel für ω keine Einwirkung der Geschwindigkeitscomponente senkrecht zur Wellennormale.

2) In ausgedehntestem Maaße in Herrn E. Kettelers „Astronomischer Undulationstheorie". Bonn 1873.

3) Fizeau, Pogg. Ann. Erg. Bd. 3, p. 457. Das Experiment ist neuerdings mit demselben Resultat wiederholt worden von A. Michelson und E. W. Morley; Americ. Journ. of Science 1886, p. 377.

4) Nach den von mir früher (Wied. Ann. Bd. 19 p. 884, 1883) abgeleiteten Formeln hat hierin $A_0 - A$ die einfache Bedeutung eines Maaßes der Einwirkung zwischen Materie und Aether im ruhenden Medium.

ist, wo A_0 den Werth bezeichnet, den A im freien Aether annimmt; denn A_0/A ist gleich n^2. Da A die Schwingungsdauer enthalten kann, — z. B. in der Form $a - a'/\tau^2$ von uns abgeleitet ist — würde auch D von der Schwingungsdauer abhängig sein müssen, wenn diese Relation für alle Farben gelten soll. Diese Frage kann zunächst noch offen bleiben.

Da bei der Erklärung der Erscheinung der Aberration und ähnlicher außer der Richtung und Geschwindigkeit der Wellennormalen diejenigen des zugehörigen Strahles zur Anwendung kommen, so gebe ich noch an, daß die Geschwindigkeit ω' des Strahles gegeben ist durch:

$$\omega'^2 = \omega^2 \left(1 + \frac{k^2 \beta^2 \Omega^2}{(\omega - \alpha k \Omega)^2}\right) \tag{23}$$

oder durch:

$$\omega'^2 = \omega^2 \frac{\omega^{\circ 2} + k^2 \Omega^2}{\omega^{\circ 2} + \alpha^2 k^2 \Omega^2},$$

wobei $\beta^2 = 1 - \alpha^2$ ist, seine Richtungscosinus α', β' durch

$$\alpha' = \frac{\omega\alpha + (\beta^2 - \alpha^2) k \Omega}{\sqrt{\omega^{\circ 2} + k^2 \Omega^2}}, \quad \beta' = \frac{\omega\beta - 2\alpha\beta k \Omega}{\sqrt{\omega^{\circ 2} + k^2 \Omega^2}}, \tag{24}$$

endlich der Winkel zwischen Strahl und Normale durch

$$\sin\chi = \frac{\beta k \Omega}{\sqrt{\omega^{\circ 2} + k^2 \Omega^2}}, \tag{25}$$

oder in erster (genauer zweiter) Nährung durch

$$\sin\chi = \frac{\beta k \Omega}{\omega^\circ}.$$

Die Gleichung der Wellenoberfläche erhält man, wenn man in (24) ω nach (23) ausdrückt und dann α (resp. β) eliminirt.

Im Vorstehenden ist angenommen worden, daß die X-Axe des Coordinatensystems in die Translationsrichtung fällt und demgemäß das System der A, B, C bestimmt. Schließt die letztere hingegen mit den Coordinatenaxen Winkel ein, deren Cosinus gleich α_1, β_1, γ_1 sind, so folgt

$$-\mathrm{A} = D\Omega \left(\alpha_1 \frac{\partial u'}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial u'}{\partial y} + \gamma_1 \frac{\partial u'}{\partial z}\right) \text{ u. s. f.}$$

oder indem man die Componenten der Translationsgeschwindigkeit nach den Coordinatenaxen Ω_x, Ω_y, Ω_z einführt:

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{A} &= D\left(\Omega_x \frac{\partial u'}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial u'}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial u'}{\partial z}\right) \\
-\mathrm{B} &= D\left(\Omega_x \frac{\partial v'}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial v'}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial v'}{\partial z}\right) \\
-\mathrm{C} &= D\left(\Omega_x \frac{\partial w'}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial w'}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial w'}{\partial z}\right).
\end{aligned} \tag{26}
$$

Hierdurch wird, falls wieder $u'^2 + v'^2 + w'^2 = V^2$ ist

$$
\mathrm{D} = \tfrac{1}{2} D\Omega_x V^2, \quad \mathrm{E} = \tfrac{1}{2} D\Omega_y V^2, \quad \mathrm{F} = \tfrac{1}{2} D\Omega_z V^2. \tag{27}
$$

Haben wir statt des durchsichtigen ein absorbirendes isotropes Medium, so wird es erlaubt sein, dieselben Kräfte A, B, C für die Einwirkung der Bewegung der ponderabeln Masse auf das Licht beizubehalten, die wir oben benutzt haben. Denn da wir bei ruhenden Körpern gesehen haben, daß die absorbirenden Kräfte sich einfach zu den Energie-erhaltenden addiren, so ist kein Grund ersichtlich, warum es bei bewegten Körpern anders sein soll, und und was wir zur näheren Bestimmung und Specialisirung dieser Kräfte A, B, C angewandt haben, nämlich die Unterschiedslosigkeit aller Richtungen rings um die Richtung der Translation, bleibt auch bei absorbirenden isotropen Medien gültig. Demnach würden für solche die Bewegungsgleichungen die Form haben:

$$
Mu'' = A \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + c \frac{\partial^2 u'}{\partial \rho^2} - bu' - D\Omega_\rho \frac{\partial u'}{\partial \rho}. \tag{28}
$$

Sie integriren sich durch Lösungen der Form:

$$
u = a e^{-\frac{\varkappa \rho}{\tau \omega}} \sin \frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\rho}{\omega}\right),
$$

welche ebene Wellen mit in ihrer ganzen Ausdehnung constanter Amplituden ergeben; dabei muß sein:

$$
\begin{aligned}
M\omega^2 &= A(1-\varkappa^2) + 2\varkappa C + D\Omega_\rho \omega \\
B\omega^2 &= 2\varkappa A - C(1-\varkappa^2) + D\Omega_\rho \omega \varkappa
\end{aligned} \tag{29}
$$

wenn abgekürzt gesetzt ist:

$$
c/\tau = C, \qquad b\tau = B.
$$

Besonders einfach wird das Resultat, wenn man, wie ich sonst gethan, $b = 0$ setzt, und ω in dem mit Ω_ρ multiplicirten Glied durch den Werth ω^0 ersetzt, der für das ruhende Medium gilt; dann ist nämlich

$$
0 = 2\varkappa\left(A + \frac{D}{2}\Omega_\rho \omega^0\right) - C(1-\varkappa^2)
$$

also

$$(30) \qquad \varkappa = \sqrt{1+\left(\frac{A+\frac{D}{2}\Omega_\varrho\omega^\circ}{C}\right)^2} - \frac{A+\frac{D}{2}\Omega_\varrho\omega^\circ}{C}.$$

Haben wir ein Medium mit Absorption von mäßiger Größe, d. h. mit gegen 1 kleinem $\varkappa$, so wird bis auf zweite Ordnung exclusive geschrieben werden können:

$$(30') \qquad \varkappa = \frac{C}{2A+D\Omega_\varrho\omega^\circ}.$$

Dies $\varkappa$ mißt dann sogleich die Größe der Absorption selbst, denn ω, welches im Exponenten der Lösung u in $\varkappa$ dividirt auftritt, ist unter der gemachten Voraussetzung erst in zweiter Ordnung von $\varkappa$ abhängig.

Besitzt das Medium im Zustand der Ruhe eine auswählende Absorption, so haben wir A und C so von τ abhängig zu denken, daß für die stark absorbirten Farben $\varkappa = C/2A$ relativ große Werthe annimmt. Die obige Formel, welche sich innerhalb derselben Annährung auch schreiben läßt:

$$(30'') \qquad \varkappa = \frac{C}{2A}\left(1-\frac{k\Omega_\varrho}{\omega^\circ}\right),$$

da $A = M\omega^\circ$ gesetzt werden kann und $D/2M = k$ ist, zeigt, daß, wenn die auswählende Absorption, wie es wahrscheinlich ist, in erster Linie durch die Werthe von C, nicht von A bedingt ist, nur eine allgemeine Verstärkung oder Schwächung, nicht aber eine Verschiebung der Maxima der Absorption auf andere Farben in Folge der Bewegung des Mediums eintritt.

Die bei gewöhnlichen isotropen Körpern eingeführten Kräfte A, B, C sind ungeändert auf circularpolarisirende anzuwenden, da auch bei diesen alle Richtungen normal zur Translationsrichtung unterschiedslos sind.

Die Formeln für diese Medien werden sonach in der größten Allgemeinheit für periodische Schwingungen [1]):

$$(31) \qquad \begin{aligned} Mu'' &= A\frac{\partial^2 u}{\partial\varrho^2} + Pv' + Q\frac{\partial^2 v'}{\partial\varrho^2} - D\Omega_\varrho\frac{\partial u'}{\partial\varrho} \\ Mv'' &= A\frac{\partial^2 v}{\partial\varrho^2} - Pu' - Q\frac{\partial^2 u'}{\partial\varrho^2} - D\Omega_\varrho\frac{\partial v'}{\partial\varrho} \end{aligned}$$

worin $P = p - \frac{p'}{\tau^2}$, $Q = q - \frac{q'}{\tau^2}$ ist.

1) W. Voigt, Wied. Ann. Bd. 19, p. 890, 1883.

Setzt man hierin:

$$u = a \sin \frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\rho}{\omega}\right), \quad v = b \cos \frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\rho}{\omega}\right),$$

so folgt:

$$a(A - M\omega^2 + D\Omega_\rho \omega) = \tau b\left(P\omega^2 - \frac{Q}{\tau^2}\right)$$

$$b(A - M\omega^2 + D\Omega_\rho \omega) = \tau a\left(P\omega^2 - \frac{Q}{\tau^2}\right)$$

also: $a = \pm b$ und

$$A - M\omega^2 + D\Omega_\rho \omega = \pm\tau\left(P\omega^2 - \frac{Q}{\tau^2}\right)$$

oder

$$\left(A \pm \frac{Q}{\tau}\right) - (M \pm P\tau)\omega^2 + D\Omega_\rho \omega = 0.$$

hieraus für gegen ω kleines Ω_ρ in erster Nährung:

$$\omega = \frac{D\Omega_\rho}{2(M \pm P\tau)} + \sqrt{\frac{A \pm \frac{Q}{\tau}}{M \pm P\tau}}. \tag{32}$$

Man erkennt, daß diese Formeln nur dann einen verschieden großen Einfluß der Translation auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beiden auftretenden circularpolarisirten Wellen ergeben, wenn P einen merklichen Werth hat. Das Glied P rührt aber von denjenigen Kräften her, welche bei einer Verschiebung ohne Deformation erregt werden und welche nach andern Beobachtungsresultaten von mir für gewöhnlich gleich Null angenommen sind. Man erhält durch die letzte Formel ein neues Mittel um die Zulässigkeit jener Annahme zu prüfen.

III. Für nicht isotrope Körper sind natürlich die früheren speciellen Werthe A, B, C nicht anwendbar; man hat hier vielmehr auf die allgemeinsten, Formel (15), zurückzugreifen.

Wir wollen der Betrachtung einen dreifach symmetrischen Krystall unterwerfen, der in einer beliebigen Richtung mit der Geschwindigkeit Ω verschoben wird, so daß deren Componenten nach den Krystall- und Coordinatenaxen Ω_x, Ω_y, Ω_z sind.

Da die Differentialgleichungen lineär sind, so können wir die Wirkung A, B, C der ganzen Translation Ω durch die Superposition der Wirkungen A_1, A_2, A_3 .... ihrer Componenten Ω_x, Ω_y, Ω_z erhalten.

Sei zunächst nur die Componente Ω_x gegeben, dann muß nach den gemachten Annahmen über die Symmetrie bei einer Drehung

des Coordinatensystems um 180° um die X-Axe A_1 ungeändert bleiben, B_1 und C_1 sein Zeichen wechseln; desgleichen bei einer Drehung um 180° um die Y- (resp. Z-)Axe A_1 und C_1 (resp. A_1 und B_1) ungeändert bleiben und B_1 (resp. C_1) sein Zeichen wechseln, denn bei diesen Drehungen wird auch die Translationsrichtung umgekehrt.

Durch Verfolgung dieses Gedankens findet man:

$$
\begin{aligned}
-A_1 &= d_{11}\frac{\partial u'}{\partial x} + e_{12}\frac{\partial v'}{\partial y} + f_{13}\frac{\partial w'}{\partial z}\\
-B_1 &= d_{22}\frac{\partial v'}{\partial x} + e_{21}\frac{\partial u'}{\partial y}\\
-C_1 &= d_{33}\frac{\partial w'}{\partial x} + f_{31}\frac{\partial u'}{\partial z}.
\end{aligned}
$$

Diese Glieder müssen mit Ω_x proportional sein; wir setzen daher:

$$
(33)\qquad
\begin{aligned}
-A_1 &= \Omega_x\left(D_{11}\frac{\partial u'}{\partial x} + E_{12}\frac{\partial v'}{\partial y} + F_{13}\frac{\partial w'}{\partial z}\right)\\
-B_1 &= \Omega_x\left(D_{22}\frac{\partial v'}{\partial x} + E_{12}\frac{\partial u'}{\partial y}\right)\\
-C_1 &= \Omega_x\left(D_{33}\frac{\partial w'}{\partial x} + F_{13}\frac{\partial u'}{\partial z}\right).
\end{aligned}
$$

Dieselben Betrachtungen sind nun auch für die übrigen Componenten Ω_y, Ω_z anzuwenden; die in A_2, B_2, C_2 und A_3, B_3, C_3 auftretenden Constanten mögen analog bezeichnet werden. Alle A_1, A_2, A_3 ... sind dann in die Bewegungsgleichungen für krystallinische doppeltsymmetrische Medien einzusetzen. Wir schreiben dieselben[1]):

$$
\begin{aligned}
Mu'' = {} & A_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_{13}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial L}{\partial x}\\
& -\Omega_x\left(D_{11}\frac{\partial u'}{\partial x} + E_{12}\frac{\partial v'}{\partial y} + F_{13}\frac{\partial w'}{\partial z}\right) - \Omega_y\left(E_{11}\frac{\partial u'}{\partial y} + D_{12}\frac{\partial v'}{\partial x}\right)\\
& -\Omega_z\left(F_{11}\frac{\partial u'}{\partial z} + D_{13}\frac{\partial w'}{\partial x}\right)
\end{aligned}
$$

$$
(34)\qquad
\begin{aligned}
Mv'' = {} & A_{21}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + A_{23}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial L}{\partial y}\\
& -\Omega_x\left(D_{22}\frac{\partial v'}{\partial x} + E_{21}\frac{\partial u'}{\partial y}\right) - \Omega_y\left(D_{21}\frac{\partial u'}{\partial x} + E_{22}\frac{\partial v'}{\partial y} + F_{23}\frac{\partial w'}{\partial z}\right)\\
& -\Omega_z\left(F_{22}\frac{\partial v'}{\partial z} + E_{23}\frac{\partial w'}{\partial y}\right)
\end{aligned}
$$

---

1) W. Voigt, Wied. Ann. Bd. 19, p. 887, 1883. Oben ist zwar $D_{hk} = D_{kh}$, $E_{hk} = E_{kh}$ und $F_{hk} = F_{kh}$ aber nicht ebenso $A_{hk} = A_{kh}$.

$$
\begin{aligned}
Mw'' = A_{31}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_{32}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + A_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial L}{\partial y} \\
-\Omega_x\left(D_{33}\frac{\partial w'}{\partial x} + F_{31}\frac{\partial u'}{\partial z}\right) - \Omega_y\left(E_{33}\frac{\partial w'}{\partial y} + F_{32}\frac{\partial v'}{\partial z}\right) \\
-\Omega_z\left(D_{31}\frac{\partial u'}{\partial x} + E_{32}\frac{\partial v'}{\partial y} + F_{33}\frac{\partial w'}{\partial z}\right).
\end{aligned}
$$

Hierin ist nach der Fresnel'schen Vorstellung über die Lage der Polarisationsebene [1]):

$$A_{11} = A_{12} = A_{13} = A_1,\ A_{21} = A_{22} = A_{23} = A_2,\ A_{31} = A_{32} = A_{33} = A_3 \quad (35a)$$

nach der Neumann'schen hingegen:

$$A_{12} = A_{21} = A_3,\ A_{13} = A_{31} = A_2,\ A_{23} = A_{32} = A_1,$$

und

$$A_{11} = A_{12} + A_{13} - A_{23},\ A_{22} = A_{21} + A_{23} - A_{13},\ A_{33} = A_{31} + A_{32} - A_{12}. \quad (35b)$$

Dabei sind A_1, A_2, A_3 neue Bezeichnungen. L enthält im Wesentlichen den durch die Incompressibilität auftretenden hydrodynamischen Druck.

Setzt man zur Integration:

$$
\begin{aligned}
u &= a \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\rho}{\omega}\right) \\
v &= b \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\rho}{\omega}\right) \\
w &= c \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\rho}{\omega}\right) \\
L &= -\frac{e}{\tau\omega}\cos\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\rho}{\omega}\right)
\end{aligned}
$$

worin $\rho = \mu x + \nu y + \pi z$ ist und $a^2 + b^2 + c^2$ der Bequemlichkeit halber gleich 1 sein mag, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
e\mu &= a[A_{11}\mu^2 + A_{12}\nu^2 + A_{13}\pi^2 - M\omega^2 + \omega(\Omega_x D_{11}\mu + \Omega_y E_{11}\nu + \Omega_z F_{11}\pi)] \\
&\quad + b\omega(\Omega_x E_{12}\nu + \Omega_y D_{12}\mu) + c\omega(\Omega_x F_{13}\pi + \Omega_z D_{13}\mu) \\
e\nu &= b[A_{21}\mu^2 + A_{22}\nu^2 + A_{23}\pi^2 - M\omega^2 + \omega(\Omega_x D_{22}\mu + \Omega_y E_{22}\nu + \Omega_z F_{22}\pi)] \quad (36) \\
&\quad + c\omega(\Omega_y F_{23}\pi + \Omega_z E_{23}\nu) + a\omega(\Omega_y D_{21}\mu + \Omega_x E_{21}\nu) \\
e\pi &= c[A_{31}\mu^2 + A_{32}\nu^2 + A_{33}\pi^2 - M\omega^2 + \omega(\Omega_x D_{33}\mu + \Omega_y E_{33}\nu + \Omega_z F_{33}\pi)] \\
&\quad + a\omega(\Omega_z D_{31}\mu + \Omega_x F_{31}\pi) + b\omega(\Omega_z E_{32}\nu + \Omega_y F_{32}\pi),
\end{aligned}
$$

1) Die durch Specialisirungen dieser Art aus den allgemeinen erhaltenen Formeln werde ich weiterhin kurz als „nach" Fresnel oder Neumann gültig bezeichnen.

dazu nach der Bedingung der Incompressibilität:

$$a\mu + b\nu + c\pi = 0.$$

Das hieraus sich ergebende Gesetz für die Normalengeschwindigkeit ist sehr complicirt; ich betrachte daher, um durch die Behandlung einfacher Fälle die nöthigen Mittel zur Reduction der großen Anzahl (15) unbekannter Constanten zu erhalten, zunächst nur die Richtungen der Hauptaxen und sodann die Hauptebenen, ehe ich zu dem Allgemeinsten übergehe.

Sei $\mu = 1$, $\nu = \pi = 0$, so folgt auch
$a = 0$ und daraus:

$$\begin{aligned} e &= \omega(bD_{12} + cD_{13}) \\ 0 &= b(A_{21} - M\omega^2 + \omega\Omega_x D_{22}) \\ 0 &= c(A_{31} - M\omega^2 + \omega\Omega_x D_{33}). \end{aligned}$$

Also schwingen die längs der X-Axe fortschreitenden Wellen entweder parallel der Y- oder Z-Axe, wie in ruhenden Medien.

Es giebt sich für die parallel der Y-Axe schwingende Welle ($b = 1$, $c = 0$)

$$0 = A_{21} - M\omega^2 + \omega\Omega_x D_{22},$$

aber für die parallel der Z-Axe schwingende ($c = 1$, $b = 0$)

$$0 = A_{31} - M\omega^2 + \omega\Omega_x D_{33}.$$

Ist $\nu = 1$, $\mu = \pi = 0$, also $b = 0$, so kömmt für die parallel der Z-Axe schwingende Welle:

$$0 = A_{32} - M\omega^2 + \omega\Omega_y E_{33},$$

für die parallel der X-Axe:

$$0 = A_{12} - M\omega^2 + \omega\Omega_y E_{11}.$$

Ist endlich $\pi = 1$, $\mu = \nu = 0$, also $c = 0$, so findet sich für die parallel den X-Axe schwingende Welle

$$0 = A_{13} - M\omega^2 + \omega\Omega_z F_{11},$$

für die parallel der Y-Axe:

$$0 = A_{23} - M\omega^2 + \omega\Omega_z F_{22}.$$

Man erhält also für die ordinäre und extraordinäre Welle verschiedenen Einfluß der Translation, wie dies die Beobachtungen zu fordern scheinen, die Hypothese der Entrainirung des Aethers aber nicht zu erklären vermag [1]).

Soll parallel den Hauptaxen gleichen Fortpflanzungsgeschwin-

1) Vergl. hierzu **Ketteler**, l. c. p. 159.

digkeiten im ruhenden Zustande auch gleiche Wirkung der Translation entsprechen, wie dies plausibel ist, so verlangt dies nach **Fresnel** die Relationen:

$$E_{11} = F_{11} = D_1, \quad F_{22} = D_{22} = D_2, \quad D_{33} = E_{33} = D_3, \tag{37a}$$

nach **Neumann**:

$$E_{33} = F_{22} = D_1, \quad F_{11} = D_{33} = D_2, \quad D_{22} = E_{11} = D_3. \tag{37b}$$

Hierin sind D_1, D_2, D_3 neue Bezeichnungen.

Liegt die Wellennormale in einer Hauptebene, so zeigen die Gleichungen (36), daß die Schwingungen nicht nothwendig parallel und normal zu dieser Ebene stattfinden. Dies ist einleuchtend, denn durch die Translation wird die ursprünglich vorhandene Symmetrie zu den Hauptebenen aufgehoben; es erschwert aber die Discussion des Resultates unserer Theorie im hohen Grade. Eine Vereinfachung tritt ein, wenn man, wie wir **vorläufig** thun werden, sich beschränkt auf die Glieder, welche in Bezug auf das Verhältniß Ω/ω von der **ersten** Ordnung sind, — eine Beschränkung, die practisch völlig unbedenklich ist.

Betrachtet man die Fortpflanzung der Wellennormalen in der YZ-Ebene, nimmt also $\mu = 0$ an, so erhält man:

$$\begin{aligned}
0 &= a[A_{12}\nu^2 + A_{13}\pi^2 - M\omega^2 + \omega(\Omega_y \nu E_{11} + \Omega_z \pi F_{11})] \\
&\qquad + \omega\Omega_x(E_{12}\, b\nu + F_{13}\, c\pi) \\
e\nu &= b[A_{22}\nu^2 + A_{23}\pi^2 - M\omega^2 + \omega(\Omega_y \nu E_{22} + \Omega_z \pi F_{22})] \\
&\qquad + \omega c(\Omega_y \pi F_{23} + \Omega_z \nu E_{23}) + \omega a \Omega_x \nu E_{21} \\
e\pi &= c[A_{32}\nu^2 + A_{33}\pi^2 - M\omega^2 + \omega(\Omega_y \nu E_{33} + \Omega_z \pi F_{33})] \\
&\qquad + \omega b(\Omega_y \pi F_{23} + \Omega_z \nu E_{23}) + \omega a \Omega_x \pi F_{31}.
\end{aligned} \tag{38}$$

Setzt man a bis auf 2. Ordnung gleich 1 (schreibe (1)), so ist b und c selber erster Ordnung, also sind die damit multiplicirten Glieder, welche Ω enthalten, zweiter Ordnung. Daher kann man als eine Lösung der Gleichungen (38) bis zu der gegebenen Genauigkeit aufstellen:

$$\begin{aligned}
a &= (1) \\
M\omega_1^2 &= A_{12}\nu^2 + A_{13}\pi^2 + \omega_1(\Omega_y \nu E_{11} + \Omega_z \pi F_{11}).
\end{aligned} \tag{39}$$

Ist hingegen a von erster Ordnung (schreibe $=(0)$), so erhält man aus der zweiten und dritten Gleichung unter Rücksicht auf $\nu b + \pi c = 0$ durch Elimination von e, b und c die Formel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der zweiten Welle, so daß eine zweite Wurzel geschrieben werden kann:

$$(40)\quad a = (0)$$
$$\begin{aligned} M\omega_2^2 = {} & (A_{22} + A_{33})\pi^2\nu^2 + A_{23}\pi^4 + A_{32}\nu^4 \\ & + \omega_2[\Omega_y\nu(E_{33}\nu^2 + (E_{22} - 2F_{23})\pi^2) + \Omega_z\pi((F_{33} - 2E_{23})\nu^2 + F_{22}\pi^2)]. \end{aligned}$$

Dies giebt nach Fresnel interpretirt in Rücksicht auf (35a) und (37a):

$$\text{(41a)}\quad \begin{aligned} M\omega_1^2 &= A_1 + \omega_1\Omega_\varrho D_1 \\ M\omega_2^2 &= A_2\pi^2 + A_3\nu^2 \\ & \quad + \omega_2[\Omega_y\nu(D_3\nu^2 + (E_{22} - 2F_{23})\pi^2) + \Omega_z\pi((F_{33} - 2E_{23})\nu^2 + D_2\pi^2)], \end{aligned}$$

hingegen nach Neumann unter Rücksicht auf (35b) und (37b):

$$\text{(41b)}\quad \begin{aligned} M\omega_1^2 &= A_3\nu^2 + A_2\pi^2 + \omega_1(\Omega_y\nu D_3 + \Omega_z\pi D_2 \\ M\omega_2^2 &= A_1 + \omega_2[\Omega_y\nu(D_1\nu^2 + (E_{22} - 2F_{23})\pi^2) + \Omega_z\pi((F_{33} - 2E_{23})\nu^2 + D_1\pi^2)]. \end{aligned}$$

Es zeigt sich, daß schon die bisherigen Annahmen in der Fresnel'schen Form das Resultat ergeben, daß die Welle, welche im ruhenden Krystall constante Fortpflanzungsgeschwindigkeit besaß, sich verhält wie einem isotropen Körper angehörig. Dies plausible Resultat ist in der letzteren, Neumann'schen Form erst durch eine neue Annahme zu erzielen, nämlich durch die Verfügung:

(42b)

$$E_{22} - 2F_{23} = F_{33} - 2E_{23} = D_1,$$

welcher sich durch die Rüchsicht auf die andern beiden Hauptebenen noch zuordnen:

$$\begin{aligned} F_{33} - 2D_{31} &= D_{11} - 2F_{31} = D_2 \\ D_{11} - 2E_{12} &= E_{22} - 2D_{12} = D_3. \end{aligned}$$

Diese in sich widerspruchslosen Relationen können als eine Bestimmung der 6 Constanten D_{hk}, E_{hk}, F_{hk} angesehen werden, welche die Ablenkung der Schwingungsebene aus den Hauptebenen bedingen. Ihre Rechtfertigung hat die Beobachtung zu liefern, unsere Theorie vermag sie nur wahrscheinlich zu machen.

Hierdurch gewinnen die Neumann'schen Formeln (41b) die Gestalt:

$$\text{(43b)}\quad \begin{aligned} M\omega_1^2 &= A_3\nu^2 + A_2\pi^2 + \omega_1(\Omega_y\nu D_3 + \Omega_z\pi D_2) \\ M\omega_2^2 &= A_1 + \omega_2\Omega_\varrho D_1. \end{aligned}$$

Man erzielt für die Welle mit nicht constanter Geschwindigkeit in den Fresnel'schen Gleichungen die gleiche einfache Form durch die Verfügungen:

$$E_{22} - 2F_{23} = D_3, \quad F_{33} - 2E_{23} = D_2,$$

die zu ergänzen sind durch

$$\begin{aligned} F_{33} - 2D_{31} &= D_1, \quad D_{11} - 2F_{31} = D_3, \\ D_{11} - 2E_{12} &= D_2, \quad E_2 - 2D_{12} = D_1, \end{aligned} \tag{42a}$$

Formeln, die eine analoge Bestimmung von D_{12}, $D_{13} \ldots$ enthalten wie (42b). Die Gleichungen (41a) gewinnen dadurch die Form:

$$\begin{aligned} M\omega_1^2 &= A_1 + \omega_1 \Omega_\rho D_1 \\ M\omega_2^2 &= A_2 \pi^2 + A_3 \nu^2 + \omega_2 (\Omega_y \nu D_3 + \Omega_z \pi D_2), \end{aligned} \tag{43a}$$

die mit der Neumann'schen bis auf die gewöhnliche Unterscheidung der Schwingungsebene identisch ist. Wir fassen sie also practisch in eine Bezeichnung zusammen.

Setzt man

$$A_1/M = \omega_x^{\circ}, \quad A_2/M = \omega_y^{\circ}, \quad A_3/M = \omega_z^{\circ},$$

wo ω_x° die in der Ebene normal zur X-Axe constante Geschwindigkeit im ruhenden Krystall bezeichnet, und ferner

$$D_1/2M = k_x, \quad D_2/2M = k_y, \quad D_3/2M = k_z,$$

wo k_x ebenso den Einfluß der Translation auf diese Welle mit constanter Geschwindigkeit mißt, so schreibt sich:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \omega_x^{\circ 2} + 2\omega_1 \Omega_\rho k_x \\ \omega_2^2 &= \omega_y^{\circ 2} \pi^2 + \omega_z^{\circ 2} \nu^2 + 2\omega_2 (\Omega_y \nu k_z + \Omega_z \pi k_y) \end{aligned} \tag{44}$$

letzteres auch

$$\omega_2^2 = \omega_y^{\circ 2} \pi^2 + \omega_z^{\circ 2} \nu^2 + 2\omega_2 \Omega_\rho (k_y \pi^2 + k_z \nu^2) + 2\omega_2 \Omega_\tau \pi\nu (k_y - k_z),$$

wenn man mit Ω_ρ wieder die Componente von Ω nach der Wellennormale ρ, mit Ω_τ die nach der in der Hauptebene zu ρ normalen Richtung τ bezeichnet; vorausgesetzt ist dabei, daß τ zu ρ liegt, wie die Z- zur Y-Axe.

Da die bisherige Ableitung die Glieder zweiter Ordnung vernachlässigt hat, so kann man (44) auch schreiben:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_1^{\circ} + \Omega_\rho k_x, \\ \omega_2 &= \omega_2^{\circ} + \Omega_\rho (k_y \pi^2 + k_z \nu^2) + \Omega_\tau \pi\nu (k_y - k_z). \end{aligned} \tag{45}$$

Man geht von diesen Formeln für die Hauptebene YZ der zweiaxigen Krystalle sogleich über zu den allgemeinsten Formeln für einaxige Krystalle mit der Z-Axe als Hauptaxe durch Einführung der den neuen Symmetrieverhältnissen entsprechenden Relationen zwischen den Constanten. Zu diesen gelangt man am bequemsten, wenn man die auf Seite 193 ausgeführte Zerlegung der Kräfte A, B, C anwendet und berücksichtigt, daß die A_3, B_3, C_3 bei

einer Drehung des Coordinatensystems um die Z-Axe um 90° sich nicht ändern, die A_1, B_1, C_1 und A_2, B_2, C_2 aber wegen der Gleichwerthigkeit der X- und Y-Richtung in gewisser Weise in einander über gehen. Durch Verfolgung dieses Gedankens finden sich die folgenden Relationen:

$$D_{11} = E_{22}, \quad D_{22} = E_{11}, \quad D_{12} = E_{12}, \quad D_{13} = E_{23}, \quad D_{33} = E_{33},$$
$$F_{11} = F_{22}, \quad F_{13} = F_{23} = 0.$$

Dieselben geben für unsere Endformeln (43) und (44) nur das Resultat, daß die Gleichung

$$D_1 = D_2 \text{ der Relation } A_1 = A_2,$$

welche für die dem ruhenden Medium entsprechenden Constanten gilt, sich zuordnet. Es gilt also bei optisch einaxigen Krystallen für jeden Hauptschnitt, wenn man $\sqrt{1-\pi^2} = \varkappa$, $\omega_x^\circ = \omega_y^\circ = \omega_n^\circ$, $k_x = k_y = k_n$ setzt, wo n die Richtung normal zur Z-Axe im betrachteten Hauptschnitt bezeichnet:

$$(44') \qquad \begin{aligned} \omega_1^2 &= \omega_n^{\circ 2} + 2\omega_1 \Omega_\varrho k_n \\ \omega_2^2 &= \omega_n^{\circ 2}\pi^2 + \omega_z^{\circ 2}\varkappa^2 + 2\omega_2(\Omega_n \varkappa k_z + \Omega_z \pi k_n). \end{aligned}$$

Von letzterer Formel gelangt man sogleich zur Gleichung für die ganze Oberfläche der Normalengeschwindigkeit für einaxige Krystalle:

$$(44'') \qquad \begin{aligned} \omega_o^2 &= \omega_n^{\circ 2} + 2\omega_o \Omega_\varrho k_n \\ \omega_e^2 &= \omega_n^{\circ 2}\pi^2 + \omega_z^{\circ 2}(\mu^2 + \nu^2) + 2\omega_e\left[(\Omega_x \mu + \Omega_y \nu) k_z + \Omega_z \pi k_n\right]. \end{aligned}$$

Bei der (im Grunde hier nothwendigen) Beschränkung auf erste Ordnung lautet (44') [1]:

$$(45') \qquad \begin{aligned} \omega_o &= \omega_o^\circ + \Omega_\varrho k_n \\ \omega_e &= \omega_e^\circ + \Omega_n \varkappa k_z + \Omega_z \pi k_n \\ &= \omega_e^\circ + \Omega_\varrho (k_n \pi^2 + k_z \varkappa^2) + \Omega_\tau \pi\varkappa (k_n - k_z). \end{aligned}$$

Es erscheint besonders bemerkenswerth, daß nach unserer Theorie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der extraordinären Welle nicht nur von der Componente der Translation nach der Wellennormalen abhängig ist, sondern auch die hierzu senkrecht im Hauptschnitt gelegene eine Wirkung ausübt.

Die Formel (44″) gestattet leicht den Uebergang zur Wellenfläche, welche bekanntlich die Enveloppe der Wellennormalen-

---

1) Diese Formeln sind **identisch** mit den von Herrn **Ketteler** aus seinen Beobachtungen an Kalkspathprismen abgeleiteten; s. Astronomische Undulationstheorie p. 672 Formel (64), p. 175 Formel (64a).

fläche ist; ich beschränke mich auf die extraordinäre Welle, da die ordinäre durch das Frühere schon erledigt ist. Wir erhalten zur Bestimmung des Punktes x', y', z', nach welchem der zur Normale (μ, ν, π) gehörige Strahl von der Länge ω' führt, die Gleichungen:

$$\mu x' + \nu y' + \pi z' = \omega_e = \omega_e^\circ + (\mu\Omega_x + \nu\Omega_y)k_s + \pi\Omega_z k_n$$
$$\pi x' - \mu z' = \pi \frac{\partial \omega_e}{\partial \mu} = \pi \frac{\partial \omega_e^\circ}{\partial \mu} + \pi\Omega_x k_s - \mu\Omega_z k_n$$
$$\pi y' - \nu z' = \pi \frac{\partial \omega_e}{\partial \nu} = \pi \frac{\partial \omega_e^\circ}{\partial \nu} + \pi\Omega_y k_s - \nu\Omega_z k_n,$$

wozu wir nehmen

$$\pi z' - \pi z' = 0.$$

Durch die Factoren μ, ν, π erhält man hieraus zunächst:

$$z' = \pi\left(\omega_e^\circ - \mu \frac{\partial \omega_e^\circ}{\partial \mu} - \nu \frac{\partial \omega_e^\circ}{\partial \nu}\right) + \Omega_z k_n$$

und durch Einsetzen:

$$x' = \mu\left(\omega_e^\circ - \nu \frac{\partial \omega_e^\circ}{\partial \nu}\right) + (1 - \mu^2) \frac{\partial \omega_e^\circ}{\partial \mu} + \Omega_x k_s$$
$$y' = \nu\left(\omega_e^\circ - \mu \frac{\partial \omega_e^\circ}{\partial \mu}\right) + (1 - \nu^2) \frac{\partial \omega_e^\circ}{\partial \nu} + \Omega_y k_s;$$

oder indem man die Coordinaten $x^{\circ\prime}$, $y^{\circ\prime}$, $z^{\circ\prime}$, welche dem Ruhezustand ($\Omega = 0$) entsprechen, einführt:

$$x' = x^{\circ\prime} + \Omega_x k_s, \quad y' = y^{\circ\prime} + \Omega_y k_s, \quad z' = z^{\circ\prime} + \Omega_z k_n.$$

Hieraus folgt sogleich die Gleichung der Wellenfläche, indem man in der bekannten Formel für ruhende Medien $x^{\circ\prime}$ mit $x' - \Omega_x k_s$ u. s. f. vertauscht [1]):

$$\frac{(x' - \Omega_x k_s)^2 + (y' - \Omega_y k_s)^2}{\omega_s^{\circ 2}} + \frac{(z' - \Omega_z k_n)^2}{\omega_n^{\circ 2}} = 1. \tag{46}$$

Bei der benutzten (ersten) Annährung ist also die Wellenfläche für den bewegten einaxigen Krystall nur dadurch von der für den ruhenden verschieden, daß sie um Längen $\Omega_x k_s$, $\Omega_y k_s$, $\Omega_z k_n$ längs der Coordinatenaxen verschoben ist [2]).

Die Richtung des Strahles wird in Folge der Translation um einen Winkel φ gedreht, der sich aus den Winkeln φ_x, φ_y, φ_z be-

1) Auch diese Formel giebt Herr Ketteler l. c. p. 183.

2) Für die ordinäre Welle würde sich also eine excentrische Kugel ergeben; auch für isotrope Medien gilt dies angenährt; über das strenge Gesetz s. p. 190.

stimmt, um welche seine Projectionen auf die Coordinatenebenen sich verschieben. Es ist nämlich:

$$\varphi_x = \frac{\nu^{o\prime} \Omega_z k_n - \pi^{o\prime} \Omega_y k_z}{\omega^{o\prime}}, \quad \varphi_y = \frac{\pi^{o\prime} \Omega_x k_z - \mu^{o\prime} \Omega_z k_n}{\omega^{o\prime}}, \quad \varphi_z = \frac{(\mu^{o\prime} \Omega_y - \nu^{o\prime} \Omega_x) k_z}{\omega^{o\prime}}.$$

Umständlicher bestimmt sich die einer gegebenen Wellennormalen entsprechende Strahlengeschwindigkeit ω_e'; es ist

$$(46') \qquad \omega_e'^2 = \frac{\omega_n^{o4} \pi^2 + \omega_z^{o4} \varkappa^2 + 2\omega_e^o (\omega_z^{o2} \Omega_n k_z + \omega_n^{o2} \Omega_z k_n)}{[\omega_e - (\Omega_n \varkappa k_z + \Omega_z \pi k_n)]^2};$$

ähnlich der Winkel χ_e zwischen der Richtung von Strahl und Normale

$$(46'') \qquad \sin \chi_e = \frac{(\omega_z^{o2} - \omega_n^{o2}) \pi \varkappa + \omega_e^o (\Omega_z k_n \varkappa - \Omega_y k_z \pi)}{\omega_e' [\omega_e - (\Omega_n \varkappa k_z + \Omega_z \pi k_n)]^2}.$$

Die Bezeichnung ist dieselbe, wie in Formel (44′).

IV. Ich gehe nunmehr zu den allgemeinsten Formeln für zweiaxige Krystalle über, die jetzt, nachdem durch die speciellen Betrachtungen Relationen zwischen der großen Zahl der ursprünglichen Constanten aufgestellt sind, nicht mehr allzugroße Schwierigkeiten bieten. Hier muß aber wieder der Fall Neumann und Fresnel geschieden werden; ich beschränke mich, um nicht zu ausführlich zu werden, auf den ersteren, da ja die Neumann'sche Anschauung durch die ganze entwickelte Theorie als die wahrscheinlichere erscheint [1]).

In den Formeln (36) sind also die Verfügungen (35b), (37b), (42b) einzuführen, und da die ersteren beiden die Größen A und D, E, F bereits in Parallele bringen, führen wir die weiteren Relationen ein, die jenen Parallelismus vervollständigen:

$$(47) \quad D_{11} = D_2 + D_3 - D_1, \quad E_{22} = D_3 + D_1 - D_2, \quad F_{33} = D_1 + D_2 - D_3$$

und vollkommen entsprechen den früheren Gleichungen:

$$A_{11} = A_2 + A_3 - A_1, \quad A_{22} = A_3 + A_1 - A_2, \quad A_{33} = A_1 + A_2 - A_3.$$

Hierdurch wird das System (36) auf folgende Form gebracht:

$$\begin{aligned} e\mu &= a[A_2 + A_3 + \omega\Omega_\varrho (D_2 + D_3) - K] \\ &\qquad + b\omega \frac{D_1 - D_2}{2} (\Omega_y \mu - \Omega_x \nu) + c\omega \frac{D_1 - D_3}{2} (\Omega_z \mu - \Omega_x \pi), \\ (48) \quad e\nu &= b[A_3 + A_1 + \omega\Omega_\varrho (D_3 + D_1) - K] \\ &\qquad + c\omega \frac{D_2 - D_3}{2} (\Omega_z \nu - \Omega_y \pi) + a\omega \frac{D_2 - D_1}{2} (\Omega_x \nu - \Omega_y \mu), \end{aligned}$$

---

1) Wie bei ruhenden Krystallen, so ist auch bei bewegten die Ableitung der Fresnel'schen Gleichungen erheblich einfacher als die der Neumann'schen.

$$e\pi = c\left[A_1 + A_2 + \omega\Omega_\varrho(D_1 + D_2) - K\right] + a\omega\frac{D_3 - D_1}{2}(\Omega_x\pi - \Omega_z\mu) + b\omega\frac{D_3 - D_2}{2}(\Omega_y\pi - \Omega_z\nu),$$

worin bedeutet:

$$K = M\omega^2 + (A_1\mu^2 + A_2\nu^2 + A_3\pi^2) + \omega(D_1\Omega_x\mu + D_2\Omega_y\nu + D_3\Omega_z\pi).$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit a, b, c und addirt, so erhält man:

$$\begin{aligned} 0 = {} & (A_2 + A_3)a^2 + (A_3 + A_1)b^2 + (A_1 + A_2)c^2 \\ & + \omega\Omega_\varrho\left[(D_2 + D_3)a^2 + (D_3 + D_1)b^2 + (D_1 + D_2)c^2\right] - K \\ & + \omega\left[ab(D_1 - D_2)(\Omega_y\mu - \Omega_x\nu) + bc(D_2 - D_3)(\Omega_z\nu - \Omega_y\pi) + ca(D_3 - D_1)(\Omega_x\pi - \Omega_z\mu)\right]. \end{aligned}$$

Dabei sind μ, ν, π die Richtungscosinus der Wellennormale ρ, a, b, c die der Schwingungsrichtung s; führt man noch α, β, γ als diejenigen einer Richtung σ ein, welche normal zu ρ und s steht und zwar so, daß das System ρ, σ, s mit $X\ Y\ Z$ zur Deckung gebracht werden kann, so ist:

$$\alpha = b\pi - c\nu, \quad \beta = c\mu - a\pi, \quad \gamma = a\nu - b\mu, \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} & \Omega_x = \Omega_\sigma\alpha + \Omega_s a + \Omega_\varrho\mu, \quad \Omega_y = \Omega_\sigma\beta + \Omega_s b + \Omega_\varrho\nu, \quad \Omega_z = \Omega_\sigma\gamma + \Omega_s c + \Omega_\varrho\pi, \\ & \Omega_y\mu - \Omega_x\nu = \Omega_\sigma c - \Omega_s\gamma, \quad \Omega_z\nu - \Omega_y\pi = \Omega_\sigma a - \Omega_s\alpha, \quad \Omega_x\pi - \Omega_z\mu = \Omega_\sigma b - \Omega_s\beta, \end{aligned} \tag{49}$$

falls Ω_s und Ω_σ in demselben Sinne gerechnet werden wie Ω_ϱ. Die Einführung dieser Werthe giebt das überraschend einfache Resultat:

$$\begin{aligned} M\omega^2 = {} & A_1\alpha^2 + A_2\beta^2 + A_3\gamma^2 + \omega\Omega_\varrho(D_1\alpha^2 + D_2\beta^2 + D_3\gamma^2) \\ & - \omega\Omega_\sigma(D_1\alpha\mu + D_2\beta\nu + D_3\gamma\pi), \end{aligned} \tag{50}$$

oder in der früheren Ausdru cksweise:

$$\begin{aligned} \omega^2 = {} & \omega_x'^2\alpha^2 + \omega_y'^2\beta^2 + \omega_z'^2\gamma^2 + 2\omega\Omega_\varrho(k_x\alpha^2 + k_y\beta^2 + k_z\gamma^2) \\ & - 2\omega\Omega_\sigma(k_x\alpha\mu + k_y\beta\nu + k_z\gamma\pi), \end{aligned} \tag{51}$$

welches für die ordinäre oder extraordinäre Welle gilt, jenachdem der der einen oder der andern entsprechende Werth α, β, γ eingesetzt wird. Für $\Omega = 0$ folgt daraus ein eleganter Werth von ω für ruhende Krystalle:

$$M\omega'^2 = A_1\alpha'^2 + A_2\beta'^2 + A_3\gamma'^2. \tag{50'}$$

Diese völlig strenge Formel (50) ergiebt das merkwürdige Resultat, daß der Einfluß der Translation auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Krystallen ausschließlich durch die Componen-

ten von Ω nach der Richtung der Wellennormale ρ und der zu dieser und der Schwingungsrichtung s normalen Richtung σ geschieht. Die Richtung σ, die in der Neumann'schen Theorie der Krystalloptik eine so wichtige Rolle spielt, hat also bei bewegten Medien ebenfalls ihre Bedeutung.

Da ihr in der Fresnel'schen Theorie die Richtung s der Schwingung selbst entspricht, so kann man für diese sogleich das Resultat schreiben:

$$\omega^2 = \omega_x'^2 a^2 + \omega_y'^2 b^2 + \omega_z'^2 c^2 + 2\omega\Omega_\rho (k_x a^2 + k_y b^2 + k_z c^2) \\ - 2\omega\Omega_s (k_x a\mu + k_y b\nu + k_z c\pi).$$

Dasselbe setzt die Verfügungen

$$D_{11} = D_1, \quad D_{22} = D_2, \quad D_{33} = D_3$$

voraus, welche den Relationen

$$A_{11} = A_1, \quad A_{22} = A_2, \quad A_{33} = A_3$$

parallel gehen.

Ueber die Schwingungsrichtung s und die zu ihr normale σ gilt ebenfalls ein einfacher Satz.

Multiplicirt man nämlich die drei Gleichungen (48) resp. mit α, β, γ und addirt so folgt

$$(52) \quad \begin{aligned} 0 = (A_1 + \omega\Omega_\rho D_1)\,a\alpha + (A_2 + \omega\Omega_\rho D_2)\,b\beta + (A_3 + \omega\Omega_\rho D_3)\,c\gamma \\ - \frac{\omega\Omega_\sigma}{2}(D_1 a\mu + D_2 b\nu + D_3 c\pi) - \frac{\omega\Omega_s}{2}(D_1 a\mu + D_2 \beta\nu + D_3 \gamma\pi). \end{aligned}$$

Setzt man hierin $\Omega = 0$ so hat man die Gleichung, die im ruhenden Krystall in Verbindung mit

$$\begin{aligned} \mu\alpha^0 + \nu\beta^0 + \pi\gamma^0 = 0, \quad & \mu a^0 + \nu b^0 + \pi c^0 = 0 \\ \alpha^{02} + \beta^{02} + \gamma^{02} = 1, \quad & a^{02} + b^{02} + c^{02} = 1 \\ a^0\alpha^0 + b^0\beta^0 + c^0\gamma^0 &= 0 \end{aligned}$$

die Richtungen σ und s bestimmt[1]):

$$(52') \qquad 0 = A_1 a^0\alpha^0 + A_2 b^0\beta^0 + A_3 c^0\gamma^0.$$

Da sie symmetrisch in Bezug auf a^0, b^0, c^0 und α^0, β^0, γ^0 ist, zeigt sie, daß für die eine Welle s in dieselbe Richtung fällt, wie für die andere σ, und umgekehrt. Die Gleichung (52) ergiebt, daß dies für bewegte Krystalle nicht mehr allgemein stattfindet, denn da ω bei der Vertauschung von α, β, γ mit a, b, c sich nach (50) ändert, so ist sie in α, β, γ und a, b, c nicht symmetrisch. Be-

1) W. Voigt, Wied. Ann. Bd. 19, p. 895, 1883.

trachtet man indessen, wie vielfach geschieht die Unterschiede der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in einem ruhenden Krystall als eine Größe erster Ordnung gegen diese selbst, so ist der Einfluß der Translation auf die Winkel beider Schwingungsrichtungen zweiter Ordnung.

Fällt die Richtung der Translation in die Wellennormale und dreht sich mit ihr — ein leicht practisch realisirbarer Fall, — so vereinfachen sich die Formeln (50) und (52) in der bemerkenswerthen Weise, daß nur Ω_ϱ und somit Ω ausschließlich in den drei Verbindungen

$$A_1 + \omega\Omega_\varrho D_1, \quad A_2 + \omega\Omega_\varrho D_2, \quad A_3 + \omega\Omega_\varrho D_3$$

auftritt und die Gleichungen dabei die Form, welche sie bei ruhenden Krystallen besitzen, ungeändert beibehalten. Es werden in diesem Falle durch die Translation also nur die Hauptgeschwindigkeiten $\omega_x^{\circ 2} = A_1/M$, $\omega_y^{\circ 2} = A_2/M$, $\omega_z^{\circ 2} = A_3/M$ geändert; die Wellenfläche bleibt der Fresnel'schen bis auf zweite Ordnung exclusive gleich und zwar mit demselben Werth des Winkels zwischen den optischen Axen.

Bei beliebiger Richtung der Translation compliciren sich die Verhältnisse. Um eine klare Anschauung der durch die Bewegung eingetretenen Veränderungen zu erhalten, beschränken wir uns hinsichtlich Ω auf die erste Ordnung und nennen den Zuwachs, den eine beliebige Function φ durch die Translation erleidet

$$\varphi - \varphi^\circ = \delta\varphi,$$

der obere Index $^\circ$ bezeichnet hier, wie stets in dieser Abhandlung, den dem Ruhezustand entsprechenden Werth.

Es folgt dann aus (51) sogleich:

$$\delta\omega = \Omega_\varrho(k_x\alpha^2 + k_y\beta^2 + k_z\gamma^2) - \Omega_\sigma(k_x\alpha\mu + k_y\beta\nu + k_z\gamma\pi) \tag{53}$$

als Zuwachs der Geschwindigkeit durch die Bewegung.

Um die Aenderung der Lage der optischen Axen zu bestimmen wollen wir die Eigenschaft benutzen, daß gegen Wellenebenen, die sich ihnen parallel fortpflanzen, die Krystalle sich verhalten wie isotrope Medien, d. h. für jede Schwingungsrichtung dieselbe Geschwindigkeit ω ergeben müssen.

Diesen Gedanken zu verfolgen gehen wir von der Gleichung (50) aus und drücken in ihr α, β, γ in einer Weise aus, die gestattet, bequem die Richtung σ um die Richtung ϱ zu drehen, und setzen darnach ω unabhängig von dieser Drehung.

Dies erstere geschieht, wenn wir einführen:

$$
(54)\qquad
\begin{aligned}
\alpha &= -\frac{1}{\varkappa}(\pi\mu\cos\vartheta+\nu\,\sin\vartheta)\\
\beta &= -\frac{1}{\varkappa}(\pi\nu\cos\vartheta-\mu\,\sin\vartheta)\\
\gamma &= +\varkappa\cos\vartheta,\ \text{wobei}\ \varkappa^2=\mu^2+\nu^2\ \text{ist.}
\end{aligned}
$$

Hierdurch ist nämlich erfüllt

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1\ \text{und}\ \mu\alpha+\nu\beta+\pi\gamma=0$$

und dabei bezeichnet ϑ den Winkel, um welchen die durch ρ und σ gelegte Ebene in der Richtung von der X- zur Y-Axe gedreht werden muß, um in die Z-Axe zu fallen.

Diese Werthe sind nun in die Gleichung (50) einzusetzen, welche dadurch die Form gewinnt:

$$M\omega^2 = F\cos^2\vartheta + G\sin^2\vartheta + H\sin\vartheta\cos\vartheta.$$

Damit dieselbe ein von ϑ unabhängiges ω gebe, muß sein:

$$F=G,\qquad H=0.$$

Diese beiden Gleichungen, welche die Lage der optischen Axen bestimmen, schreiben wir mit Hülfe der Abkürzungen

$$
(55)\qquad
\begin{gathered}
K_1 = A_1+\omega D_1(\Omega_\varrho-\Omega_x\mu),\ K_2=A_2+\omega D_2(\Omega_\varrho-\Omega_y\nu),\\
K_3=A_3+\omega D_3(\Omega_\varrho-\Omega_z\pi)
\end{gathered}
$$

folgendermaßen:

$$
(56)\qquad
\begin{aligned}
&K_1\pi^2\mu^2+K_2\pi^2\nu^2+K_3(\mu^2+\nu^2)^2-\pi\omega\{\Omega_x\pi\mu[D_2\nu^2-D_3(\mu^2+\nu^2)]\\
&\qquad+\Omega_y\pi\nu[D_1\mu^2-D_3(\mu^2+\nu^2)]-\Omega_z(\mu^2+\nu^2)(D_1\mu^2+D_2\nu^2)\}\\
&\quad=K_1\nu^2+K_2\mu^2+\omega\nu\mu(\Omega_x\nu D_2+\Omega_y\mu D_1)\\
&(K_2-K_1)2\mu\nu\pi=\omega\{\Omega_x\pi\nu[D_3(\mu^2+\nu^2)+D_2(\mu^2-\nu^2)]\\
&\qquad-\Omega_y\pi\mu[D_3(\mu^2+\nu^2)+D_1(\nu^2-\mu^2)]+\Omega_z\mu\nu(\mu^2+\nu^2)(D_1-D_2)\}.
\end{aligned}
$$

Vorstehende noch vollkommen strenge Formeln wollen wir nur in erster Nährung behandeln, indem wir in die Glieder, die mit Ω proportional sind, den Werth $\nu=0$ einführen, der sich bei ruhenden Krystallen unter der Voraussetzung, daß $A_3 > A_2 > A_1$ ist ergiebt, die entsprechenden μ und π seien wie früher durch μ^0 und π^0 bezeichnet; zugleich ist in den nicht in Ω multiplicirten Gliedern ν^2 neben μ^2, π^2 oder 1 zu vernachlässigen. Hieraus folgt, da sich μ^2 in der ersten Gleichung herausheben läßt:

$$
(56')\qquad
\begin{gathered}
K_1\pi^2+K_3\mu^2+\omega^0\mu^0\pi^0(\Omega_x\pi^0 D_3+\Omega_z\mu^0 D_1) = K_2\\
(K_2-K_1)2\nu = \omega^0\mu^{02}\Omega_y(D_1-D_3);
\end{gathered}
$$

ω^0 ist dabei der Werth der Geschwindigkeit in der Richtung der optischen Axen im ruhenden Krystall.

Durch Einführung der Werthe der K_h giebt die erste Formel unter Rücksicht darauf, daß $\Omega_\varrho^\circ = \Omega_x \mu^\circ + \Omega_z \pi^\circ$ ist:

$$\pi^2 = \frac{A_2 - A_3 + \omega^\circ [\Omega_x \mu^\circ (D_2 - D_3) + \Omega_z \pi^\circ (D_2 - D_1)]}{A_1 - A_3},$$

oder (57)

$$\mu^2 = \frac{A_1 - A_2 + \omega^\circ [\Omega_x \mu^\circ (D_3 - D_2) + \Omega_z \pi^\circ (D_1 - D_2)]}{A_1 - A_3}.$$

Ferner wird die zweite Gleichung in erster Nährung:

$$\nu = \frac{\mu^{\circ 2} \omega^\circ \Omega_y (D_1 - D_2)}{2(A_2 - A_1)}, \tag{58}$$

oder in Rücksicht auf das aus der letzten Formel (57) folgende

$$\mu^{\circ 2} = \frac{A_1 - A_2}{A_1 - A_3} \quad \text{auch:}$$

$$\nu = \frac{\omega^\circ \Omega_y (D_1 - D_3)}{2(A_3 - A_1)}. \tag{58'}$$

Für die Discussion heben wir hervor, daß nach den schon benutzten Werthen von $D_h = 2M \frac{n_h^2 - 1}{n_h^2}$:

$$\frac{D_1 - D_3}{A_3 - A_1} > 0 \quad \frac{D_1 - D_2}{A_3 - A_2} > 0 \quad \frac{D_2 - D_3}{A_3 - A_1} > 0$$

ist. Ferner bemerken wir, daß die Gleichungen in Ω_x, Ω_y, Ω_z linear sind und sich daher die Zuwachse: $\delta_x \mu$ von μ in Folge von Ω_x, $\delta_y \nu$ von ν in Folge von Ω_y, $\delta_z \pi$ von π in Folge von Ω_z einzeln behandeln und schließlich summiren lassen. So erhalten wir die einfachen Formeln:

$$\delta_x \mu = \omega^\circ \frac{\Omega_x (D_2 - D_3)}{2(A_3 - A_1)}, \quad \delta_z \pi = \omega^\circ \frac{\Omega_z (D_1 - D_2)}{2(A_3 - A_1)}$$

$$\delta_y \nu = \omega^\circ \frac{\Omega_y (D_1 - D_3)}{2(A_3 - A_1)}. \tag{59}$$

Dabei ist wegen $\mu^2 + \nu^2 = 1$, $\delta_z \mu = -\delta_z \pi$, $\delta_x \pi = -\delta_x \mu$, und nach (57) und (58) $\delta_y \mu = \delta_y \pi = \delta_x \nu = \delta_z \nu = 0$.

Diese Formeln enthalten ein sehr merkwürdiges Resultat. Wie bei isotropen Medien die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in entgegengesetzten Richtungen durch die Translation verschieden modificirt werden, so werden bei zweiaxigen Krystallen durch dieselbe Ursache die beiden Hälften der optischen Axen verschieden verschoben, sodaß also nunmehr vier statt zwei Richtungen zu unterscheiden sind.

Der Inhalt obiger Formeln läßt sich folgendermaßen formuliren.

Durch eine positive Componente Ω_x werden die nach $+X$ liegenden Hälften der optischen Axen einander symmetrisch genährt, die nach $-X$ liegenden von einander entfernt; Analoges wirkt eine positive Componente Ω_z in Bezug auf die Z-Axe. Eine positive Componente Ω_y neigt sämmtliche vier Axenhälften um den gleichen Winkel nach der $+Y$ Seite hin. Als den Winkel der optischen Axen 2η betrachtet man gewöhnlich denjenigen, innerhalb dessen die Z-Axe des Coordinatensystems (das oben definirt ist) sich befindet. Es ist dann

$$\pi = \cos\eta, \qquad \delta\pi = -\sin\eta^\circ\,\delta\eta = \frac{\omega^\circ\,\Omega_z(D_1 - D_2)}{2(A_3 - A_1)},$$

während $\sin^2\eta^\circ = \dfrac{A_1 - A_2}{A_1 - A_3}$ ist. Man erhält also

$$\text{(59')} \qquad \delta\eta = \frac{\omega^\circ\,\Omega_z(D_2 - D_1)}{2\sqrt{(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)}}.$$

Setzt man hierin den durch die Beobachtung, wie sich zeigen wird, gegebenen Werth $D_h/2M = \dfrac{n_h^2 - 1}{n_h^2}$ während $A_h/M = \omega_h^2$ ist, so giebt dies:

$$\text{(59'')} \qquad \delta\eta = \frac{\omega^\circ\,\Omega_z}{v^2}\cdot\sin\eta^\circ,$$

unter v die Lichtgeschwindigkeit im freien Aether verstanden. Es ist hiernach ein Einfluß von nachweisbarer Größe am ersten zu erwarten, wenn man einen Krystall mit der Halbirungslinie des möglichst großen stumpfen Winkels der optischen Axen in die Translationsrichtung bringt. Das Maximum des Einflusses auf 2η ist, für Ω_z die Geschwindigkeit der Erde um die Sonne gesetzt etwa 13″; zwei Messungen, an zwei diametral gegenüberliegenden Stellen der Erdbahn angestellt, müßten also um 26″ differiren. Es dürfte möglich sein, hierauf eine Prüfung der Theorie zu begründen.

Für optisch einaxige Krystalle (die Hauptaxe wieder in der Z-Axe angenommen) folgt wegen $D_1 = D_2$:

$$\delta_x\mu = \frac{\omega^\circ\,\Omega_x(D_1 - D_3)}{2(A_3 - A_1)},$$
$$\delta_y\nu = \frac{\omega^\circ\,\Omega_y(D_1 - D_3)}{2(A_3 - A_1)},$$

also verschieben sich die beiden Hälften der optischen Axe in dem Hauptschnitt, welcher Ω enthält.

Während hiernach die Aenderung der optischen Axen in einer leicht übersichtlichen Weise stattfindet, geschieht die Drehung der Polarisationsebene durch die Translation in complicirterer Art.

Zieht man von Formel (52) ab die Formel (52′), welche für den ruhenden Krystall gilt, so erhält man bei Beschränkung auf erste Ordnung:

$$\begin{aligned} 0 = & A_1(a^\circ\delta\alpha+\alpha^\circ\delta a)+A_2(b^\circ\delta\beta+\beta^\circ\delta b)+A_3(c^\circ\delta\gamma+\gamma^\circ\delta c) \\ & +\omega\Omega_\varrho(D_1a^\circ\alpha^\circ+D_2b^\circ\beta^\circ+D_3c^\circ\gamma^\circ)-\frac{\omega\Omega_\sigma}{2}(D_1a^\circ\mu+D_2b^\circ\nu+D_3c^\circ\pi) \quad (60) \\ & -\frac{\omega\Omega_s}{2}(D_1\alpha^\circ\mu+D_2\beta^\circ\nu+D_3\gamma^\circ\pi). \end{aligned}$$

Hierin drücken wir α, β, γ und a, b, c durch den oben definirten Winkel ϑ aus indem wir zu den Gleichungen (54) noch hinzunehmen:

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{\varkappa}(\pi\mu\sin\vartheta-\nu\cos\vartheta) \\ b &= -\frac{1}{\varkappa}(\pi\nu\sin\vartheta+\mu\cos\vartheta) \qquad (61) \\ c &= +\varkappa\sin\vartheta, \text{ wobei wieder } \varkappa^2=\mu^2+\nu^2 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Aus beiden Systemen folgt:

$$\begin{aligned} \delta\alpha &= -a\delta\vartheta, \quad \delta\beta = -b\delta\vartheta, \quad \delta\gamma = -c\delta\vartheta \\ \delta a &= +\alpha\delta\vartheta, \quad \delta b = +\beta\delta\vartheta, \quad \delta c = +\gamma\delta\vartheta \end{aligned} \qquad (62)$$

also zur Bestimmung von $\delta\vartheta$, der Drehung der Schwingungsrichtungen, die Formel:

$$\delta\vartheta = \qquad (63)$$
$$\frac{\omega^\circ}{2}\cdot\frac{2\Omega_\varrho((D_1a^\circ\alpha^\circ+D_2b^\circ\beta^\circ+D_3c^\circ\gamma^\circ)-\Omega_\sigma(D_1a^\circ\mu+D_2b^\circ\nu+D_3c^\circ\pi)-\Omega_s(D_1\alpha^\circ\mu+D_2\beta^\circ\nu+D_3\gamma^\circ\pi)}{A_1(a^{\circ 2}-\alpha^{\circ 2})+A_2(b^{\circ 2}-\beta^{\circ 2})+A_3(c^{\circ 2}-\gamma^{\circ 2})}.$$

Hierbei läßt sich nach (50′) der Nenner in der einfacheren Form schreiben

$$\pm M(\omega_2^{\circ 2}-\omega_1^{\circ 2}),$$

falls ω_2° und ω_1° im ruhenden Krystall die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beiden parallel fortschreitenden Wellen sind, denn in erster Nährung ist die Richtung s für die eine Welle identisch mit der Richtung σ für die andere. Das obere Zeichen gilt für $\delta\vartheta_1$, das untere für $\delta\vartheta_2$, darunter verstanden die Drehung der ersten oder zweiten Welle. Wir behalten indeß die obige Form als unmißverständlicher bei.

Der Zähler vereinfacht sich durch Einführung der Werthe Ω_x, Ω_y, Ω_z nach (49); man erhält so:

(63′) $\delta\vartheta =$

$$\frac{\omega^0}{2} \cdot \frac{\Omega_x(b^0c^0 - \beta^0\gamma^0)(D_2 - D_3) + \Omega_y(c^0a^0 - \gamma^0\alpha^0)(D_3 - D_1) + \Omega_z(a^0b^0 - \alpha^0\beta^0)(D_1 - D_2)}{A_1(a^{02} - \alpha^{02}) + A_2(b^{02} - \beta^{02}) + A_3(c^{02} - \gamma^{02})}.$$

Durch Zerlegung in die drei mit Ω_x, Ω_y, Ω_z proportionalen Theile findet man die Wirkungen der drei Componenten von Ω gesondert; z. B. giebt sich:

$$\delta_x\vartheta = \frac{\omega^0 \Omega_x (b^0 c^0 - \beta^0 \gamma^0)(D_2 - D_3)}{2[A_1(a^{02} - \alpha^{02}) + A_2(b^{02} - \beta^{02}) + A_3(c^{02} - \gamma^{02})]}.$$

Die Resultate sind nicht so einfach, da sich die Differenzen $b^0 c^0 - \beta^0 \gamma^0$ etc. nur umständlich durch die direct gegebenen Größen μ, ν, π ausdrücken lassen. Man wird, um eine Vorstellung von dem Vorzeichen der einzelnen Glieder zu erhalten, am besten thun, die Grenzen zu bestimmen, längs deren die Ausdrücke verschwinden. Der Nenner, der nur in der Richtung der optischen Axen verschwindet, kann dabei außer Betracht bleiben.

So ist z. B. $\delta_x\vartheta = 0$ für $b^0 c^0 = \beta^0 \gamma^0 = 0$ d. h. für $b^0 = \gamma^0 = 0$ oder $c^0 = \beta^0 = 0$.

Es sind also die XY- und die XZ-Ebene jedenfalls Grenzen der genannten Art, und nach der Symmetrie ist zu ersehen, daß sie die einzigen sind. Es wird also die von der Componente Ω_x herrührende Drehung beim Umgang um die X-Axe zweimal positiv, zweimal negativ.

Einfacher werden diese Verhältnisse bei den optisch einaxigen Krystallen. Dort ist, falls wieder die Z- zur Hauptaxe gewählt wird, $A_1 = A_2$, $D_1 = D_2$; überdies kann man das Coordinatensystem ohne Beschränkung so legen, daß die YZ-Ebene die Geschwindigkeit Ω enthält, also $\Omega_x = 0$, $\Omega_y = \Omega_n$ ist. Daraus folgt:

$$(64) \qquad \delta\vartheta = \frac{\omega^0 \Omega_n (c^0 a^0 - \gamma^0 \alpha^0)(D_3 - D_1)}{2(c^{02} - \gamma^{02})(A_3 - A_1)}.$$

Es wirkt hier also nur die Componente normal zur optischen Axe.

Für die ordinäre Welle ist:

$$\gamma_o^0 = 0, \qquad c_o^0 a_o^0 = -\mu\pi, \qquad c_o^{02} = 1 - \pi^2,$$

also

$$(64') \qquad \delta\vartheta_o = \frac{\omega_o^0 \Omega_n \mu\pi}{2(1 - \pi^2)} \cdot \frac{D_3 - D_1}{A_1 - A_3};$$

für die extraordinäre ist:

$$c_e^0 = 0, \qquad \gamma_e^0 \alpha_e^0 = -\mu\pi, \qquad \gamma_e^{02} = 1 - \pi^2,$$

$$\delta\vartheta_e = \frac{\omega_e^{\circ}\Omega_n \mu\pi}{2(1-\pi^2)} \cdot \frac{D_3 - D_1}{A_1 - A_3} \cdot \qquad (64'')$$

Nach dem früheren Werth $\frac{D_h}{2M} = \frac{n_h^2 - 1}{n_h^2}$ ist:

$$(D_3 - D_1)/2(A_1 - A_3) = 1/v^2,$$

wenn v die Lichtgeschwindigkeit im freien Aether bedeutet. Es wird dann also:

$$\delta\vartheta_o = \frac{\omega_o^{\circ}\Omega_n}{v^2} \cdot \frac{\mu\pi}{1-\pi^2}, \quad \delta\vartheta_e = \frac{\omega_e^{\circ}\Omega_n}{v^2} \cdot \frac{\mu\pi}{1-\pi^2}, \qquad (65)$$

d. h. positiv, wenn die Projection der Wellennormale auf die XZ-Ebene zwischen die $+X$- und $+Z$-, sowie zwischen die $-X$- und $-Z$-Axe, negativ, wenn sie in die dazwischen liegenden Quadranten fällt.

Die absolute Drehung der Polarisationsebene durch die Translation ist nach diesen Schlußformeln nicht von der Stärke der Doppelbrechung abhängig, sondern nur die Differenz der Drehungen in beiden Wellen; auf die Drehung selbst wirkt nur die Größe des Brechungscoefficienten $v/\omega = n$ ein; ihr Werth beträgt, wenn man für Ω_n die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn um die Sonne setzt etwa 6″, ein schwerlich je der Beobachtung zugänglicher Betrag.

Alle die vorstehenden, allgemeinen Folgerungen fließen aus den Grundformeln (50) und (52) mit großer Leichtigkeit, und dadurch ist gerechtfertigt, daß wir dieselben an die Spitze gestellt haben, obgleich sie für die directe Anwendung auf specielle Fälle, z. B. bestimmte Lagen der Wellennormalen den Nachtheil bieten, daß sie die nicht direct gegebenen α, β, γ und a, b, c neben μ, ν, π enthalten. Deshalb soll schließlich die für speciellere Anwendungen bequemere Formel mitgetheilt werden, welche ω nur durch die direct gegebenen Größen darstellt; man erhält sie indem man aus den Gleichungen (48) a/e, b/e, c/e methodisch eliminirt. Das Resultat ist nach einer umständlichen Reduction (wie sie durch die Neumann'schen Constanten-Werthe sich ergiebt) folgendermaßen zu schreiben.

Man setze abgekürzt:

$$A_1 + \Omega_\varrho D_1 - M\omega^2 = I_1$$

$$\omega \frac{D_2 - D_3}{2} (\Omega_z \nu - \Omega_y \pi) = i_1$$

und ebenso die hieraus durch cyclische Vertauschung folgenden Ausdrücke; dann gilt:

$$
(66)\quad \begin{aligned} &\mu^2 (I_2 I_3 - i_1^2) + \nu^2 (I_3 I_1 - i_2^2) + \pi^2 (I_1 I_2 - i_3^2) \\ &+ 2\nu\pi (I_1 i_1 + i_2 i_3) + 2\pi\mu (I_2 i_2 + i_3 i_1) + 2\mu\nu (I_3 i_3 + i_1 i_2) = 0. \end{aligned}
$$

Die Größen i_h verschwinden nach (49) wenn Ω_s und Ω_σ gleich Null ist; liegt also die Translation in der Wellennormale, so gilt:

$$
\frac{\mu^2}{I_1} + \frac{\nu^2}{I_2} + \frac{\pi^2}{I_3} = 0.
$$

Im Allgemeinen ist die Formel (66) nur schwer discutabel; sie gestattet z. B. nicht einmal für die Hauptebenen die Sonderung der beiden Wurzeln für ω in rationaler Form.

Beschränkt man sich auf die erste Ordnung, so kann man (66) schreiben, indem man in der consequent durchgeführten Weise unter I_h^o den Ausdruck $A_h - M\omega^2$ versteht:

$$
(66')\quad \begin{aligned} 0 = {} & \mu^2 I_2^o I_3^o + \nu^2 I_3^o I_1^o + \pi^2 I_1^o I_2^o \\ & + \omega \{ \Omega_x \mu [D_2 (I_3^o + \pi^2 (I_1^o - I_3^o)) + D_3 (I_2^o + \nu^2 (I_1^o - I_2^o))] \\ & + \Omega_y \nu [D_3 (I_1^o + \mu^2 (I_2^o - I_1^o)) + D_1 (I_3^o + \pi^2 (I_2^o - I_3^o))] \\ & + \Omega_z \pi [D_1 (I_2^o + \nu^2 (I_3^o - I_2^o)) + D_2 (I_1^o + \mu^2 (I_3^o - I_1^o))] \}. \end{aligned}
$$

Setzt man hierin $I_1 = I_2$, $D_1 = D_2$, so gelangt man zu der Formel (45') für einaxige Krystalle zurück.

Um innerhalb der durch (66') gezogenen Genauigkeitsgrenze zur Wellenoberfläche überzugehen, schreiben wir die letzte Gleichung abgekürzt:

$$
(66'')\quad \begin{aligned} 0 = {} & \mu^2 I_2^o I_3^o + \nu^2 I_3^o I_1^o + \pi^2 I_1^o I_2^o + \omega [\Omega_x \mu (D_2 H_{31} + D_3 H_{21}) \\ & + \Omega_y \nu (D_3 H_{12} + D_1 H_{32}) + \Omega_z \pi (D_1 H_{23} + D_2 H_{13})] \end{aligned}
$$

und schließen aus ihr die Wirkung der Translation auf die Geschwindigkeit ω in der Form:

$$
\begin{aligned} 2MH\delta\omega = {} & \Omega_x \mu (D_2 H_{31} + D_3 H_{21}) + \Omega_y \nu (D_3 H_{12} + D_1 H_{32}) \\ & + \Omega_z \pi (D_1 H_{23} + D_2 H_{13}), \end{aligned}
$$

oder auch nach der früheren Bezeichnung:

$$
H\delta\omega = \Omega_x \mu (k_y H_{31} + k_z H_{21}) + \Omega_y \nu (k_z H_{12} + k_x H_{32}) + \Omega_z \pi (k_x H_{23} + k_y H_{13}).
$$

Hierin bedeutet:

$$
H = \mu^2 (I_2^o + I_3^o) + \nu^2 (I_3^o + I_1^o) + \pi^2 (I_1^o + I_2^o)
$$

und es gilt:

$$
H = H_{31} + H_{21} = H_{12} + H_{32} = H_{23} + H_{13}.
$$

Die Coordinaten x', y', z' des Punktes, nach welchem der zur Wellennormale (μ, ν, π, ω) gehörige Strahl (μ', ν', π', ω') geht, bestimmen sich dann unter Zuhülfenahme der für den Ruhezustand gültigen $x^{o\prime}$, $y^{o\prime}$, $z^{o\prime}$ in der Form:

$$
\begin{aligned}
x' &= x^{\circ\prime} + \delta x' = x^{\circ\prime} + \mu\left(\delta\omega - \nu\frac{\partial\delta\omega}{\partial\nu}\right) + (\nu^2+\pi^2)\frac{\partial\delta\omega}{\partial\mu} \\
y' &= y^{\circ\prime} + \delta y' = y^{\circ\prime} + \nu\left(\delta\omega - \mu\frac{\partial\delta\omega}{\partial\mu}\right) + (\mu^2+\pi^2)\frac{\partial\delta\omega}{\partial\nu} \qquad (67) \\
z' &= z^{\circ\prime} + \delta z' = z^{\circ\prime} + \pi\left(\delta\omega - \mu\frac{\partial\delta\omega}{\partial\mu} - \nu\frac{\partial\delta\omega}{\partial\nu}\right).
\end{aligned}
$$

Bei der Berechnung ist darauf zu achten, daß das in dem Werthe $\delta\omega$ vorkommende ω° durch die Gleichung

$$\mu^2 I_2^\circ I_3^\circ + \nu^2 I_3^\circ I_1^\circ + \pi^2 I_1^\circ I_2^\circ = 0$$

definirt ist.

Die Entwickelung ist im höchsten Grade umständlich. Man erhält am bequemsten zuerst $\delta z'$ in der Form:

$$
\begin{aligned}
\delta z' = \Omega_z & \frac{(k_x H_{23} + k_y H_{13})}{H} \\
& + \frac{2\pi}{H^3}\{\Omega_x \mu (k_z - k_y)[H_{31}(H - I_1^\circ) I_2^\circ - H_{21}(H - I_2^\circ) I_1^\circ] \\
& \quad + \Omega_y \nu (k_x - k_z)[H_{12}(H - I_1^\circ) I_2^\circ - H_{32}(H - I_2^\circ) I_1^\circ] \qquad (68) \\
& \quad + \Omega_z \pi (k_y - k_x)[H_{23}(H - I_2^\circ) I_1^\circ - H_{13}(H - I_1^\circ) I_2^\circ]\}\,[1]),
\end{aligned}
$$

woraus die übrigen durch cyclische Vertauschung zu bestimmen sind. Da $x^{\circ\prime}$, $y^{\circ\prime}$, $z^{\circ\prime}$ der Gleichung der Fresnel'schen Wellenfläche genügen, so erhält man die dem bewegten Krystall entsprechende, indem man die Werthe $x^{\circ\prime} = x' - \delta x'$, $y^{\circ\prime} = y' - \delta y'$, $z^{\circ\prime} = z' - \delta z'$ in jene einführt. Die resultirende Formel ist kaum zu übersehen.

Ich habe den Werth $\delta z'$ hier besonders deshalb mitgetheilt, weil ich beweisen wollte, daß es eine ungerechtfertigte Willkür sein würde, aus den für einaxige Krystalle (und für die Hauptebenen zweiaxiger) abgeleiteten sehr einfachen Formeln (46)

$$\delta x' = \Omega_x k_x, \quad \delta y' = \Omega_y k_x, \quad \delta z' = \Omega_z k_x$$

die allgemeinen Relationen

$$\delta x' = \Omega_x k_x, \quad \delta y' = \Omega_y k_y, \quad \delta z' = \Omega_z k_z$$

zu schließen [2]).

Formel (68) giebt für die YZ-Ebenen, für welche $\mu = 0$, $\nu^2 + \pi^2 = 1$, und daher

1) Der zweite Theil rechts ist nicht aus dem in Ω_z multiplicirten Glied durch cyclische Vertauschung zu entwickeln, der letzte, in Ω_z multiplicirte Ausdruck hat vielmehr abweichende Form.

2) So thut Herr Ketteler l. c. p. 183 um zur allgemeinen Wellenfläche zu gelangen. Das Resultat führt aber schon bei der Anwendung auf die Hauptebenen zu Widersprüchen.

$$H = I_1^o + I_2^o\pi^2 + I_3^o\nu^2$$
$$H_{31} = I_3^o\nu^2 + I_1^o\pi^2, \quad H_{21} = I_2^o\pi^2 + I_1^o\nu^2, \quad H_{12} = I_1^o,$$
$$H_{32} = I_3^o\nu^2 + I_2^o\pi^2, \quad H_{23} = I_2^o\pi^2 + I_3^o\nu^2, \quad H_{13} = I_1^o \text{ ist},$$

das Resultat:

$$\begin{aligned} \delta z' &= \frac{\Omega_z}{H}[k_z(I_3^o\nu^2 + I_2^o\pi) + k_y I_1^o] \\ &+ \frac{2\pi}{H^3} I_1^o[I_2^o\pi^2 + I_3^o\nu_2][I_2^o - I_1^o + (I_2^o - I_3^o)\nu^2][\Omega_y\nu(k_z - k_z) + \Omega_z\pi(k_y - k_z)]. \end{aligned} \tag{68'}$$

Nun ist in der YZ-Ebene für die eine Welle $I_1^o = 0$, für die andere $I_2^o\pi^2 + I_3^o\nu^2 = 0$, also verschwindet das zweite Glied stets und das erste reducirt sich nach dem Werthe von H für die erste Welle auf $\delta z_1' = \Omega_z k_z$ — analog wird $\delta y_1' = \Omega_y k_z$ — für die zweite auf $\delta z_2' = \Omega_z k_y$, — analog wird $\delta y_2' = \Omega_y k_y$.

Außerdem findet sich aber noch durch

$$\delta x' = \Omega_x \frac{k_y(I_3^o\nu^2 + I_1^o\pi^2) + k_z(I_2^o\pi^2 + I_1^o\nu^2)}{I_1^o + I_2^o\pi^2 + I_3^o\nu^2}$$

die Abweichung des Strahles aus der Hauptebene gegeben, welche für die erste Welle:

$$\delta x_1' = \Omega_x \frac{k_y I_3^o\nu^2 + k_z I_2^o\pi^2}{I_3^o\nu^2 + I_2^o\pi^2}$$

für die zweite

$$\delta x_2' = \Omega_x \frac{k_y(I_3^o\nu^2 + I_1^o\pi^2) + k_z(I_2^o\pi^2 + I_1^o\nu^2)}{I_1^o} = \Omega_x \frac{k_y(I_1^o - I_2^o)\pi^2 + k_z(I_1^o - I_3^o)\nu^2}{I_1^o}$$

beträgt.

Für optisch einaxige Krystalle ist $I_1^o = I_2^o$, $k_x = k_y = k_n$, also

$$\delta x_o' = \Omega_x k_n, \quad \delta y_o' = \Omega_y k_n, \quad \delta z_o' = \Omega_z k_n$$
$$\delta x_e' = \Omega_x k_z, \quad \delta y_e' = \Omega_y k_z, \quad \delta z_e' = \Omega_z k_n,$$

in Uebereinstimmung mit dem früher Gefundenen.

Eine Discussion der allgemeinen Formel (68) mag als zu umständlich und zu wenig fruchtbar, unterbleiben.

V. Die Erscheinungen, welche zu einer Prüfung unserer Theorie zu verwenden sind, werden, da wir nicht innerhalb eines andern Mediums als Luft beobachten können, jederzeit durch Reflexionen und Brechungen an der Grenze zwischen Luft (oder, was für unsere Zwecke dasselbe ist, zwischen freiem Aether) und dem bewegten Körper complicirt sein. Es ist daher, um die Discussion vorhandener Beobachtungen durchzuführen, nothwendig, zu-

nächst die Modification der Reflexions- und Brechungsgesetze zu erörtern, die in durchaus verschiedener Weise stattfindet, jenachdem man annimmt, daß der Aether an der fortschreitenden Bewegung der Körpr Theil nimmt oder nicht. Wir behalten natürlich unsere Hypothese von der Ruhe des Aethers gegen das Coordinatensystem bei.

Ist die Grenze die XY-Ebene, so werden die Grenzbedingungen der Elasticitätstheorie, auf die ich hier noch nicht eingehe, verlangen, daß gewisse Functionen der Verschiebungen u, v, w für die beiden Medien zu jeder Zeit in der Grenze, d. h. für $z = z_0 + \Omega_z t$, gleiche Werthe annehmen. Da die von der Zeit abhängigen Ausdrücke in den u, v, w die Form

$$\frac{1}{T}\left(t - \frac{x \sin\varphi + z \cos\varphi}{\omega}\right)$$

haben, worin T die Schwingungsdauer, φ den Winkel der Wellennormale gegen das ins zweite Medium hinein positiv gerechnete Einfallsloth bezeichnet, so werden die Grenzbedingungen ergeben, daß (falls man einfallende, reflectirte und gebrochene Welle durch die Indices e, r, d unterscheidet) sein muß:

$$\begin{gathered}\frac{1}{T_e}\left(1 - \frac{\Omega_z \cos\varphi_e}{\omega_e}\right) = \frac{1}{T_r}\left(1 - \frac{\Omega_z \cos\varphi_r}{\omega_r}\right) = \frac{1}{T_d}\left(1 - \frac{\Omega_z \cos\varphi_d}{\omega_d}\right), \\ \frac{\sin\varphi_e}{T_e \omega_e} = \frac{\sin\varphi_r}{T_r \omega_r} = \frac{\sin\varphi_d}{T_d \omega_d}.\end{gathered} \tag{69}$$

Hieraus folgt durch Elimination der Schwingungsdauern, falls man allgemeiner die Componente von Ω nach dem Einfallsloth Ω_n nennt:

$$\frac{\sin\varphi_e}{\omega_e - \Omega_n \cos\varphi_e} = \frac{\sin\varphi_r}{\omega_r - \Omega_n \cos\varphi_r} = \frac{\sin\varphi_d}{\omega_d - \Omega_n \cos\varphi_d}. \tag{69'}$$

Bei den meisten Anwendungen werde ich mich auf die erste Annäherung beschränken und, indem ich den Unterschied der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten im ruhenden und im bewegten Zustand

$$\omega - \omega^0 = \Delta\omega$$

setze, und auch die Winkel φ durch die dem Zustand der Ruhe entsprechenden φ^0 ausdrücke nach dem Schema

$$\varphi = \varphi^0 + \delta\varphi,$$

der obigen Formel die folgende Gestalt geben:

$$\begin{aligned}\frac{\delta\varphi_e \cos\varphi_e^0}{\omega_e^0} + \frac{\Omega_n \cos\varphi_e^0 - \Delta\omega_e}{\omega_e^{02}} \sin\varphi_e^0 &= \frac{\delta\varphi_r \cos\varphi_r^0}{\omega_r^0} + \frac{\Omega_n \cos\varphi_r^0 - \Delta\omega_r}{\omega_r^{02}} \sin\varphi_r^0 \\ &= \frac{\delta\varphi_d \cos\varphi_d^0}{\omega_d^0} + \frac{\Omega_n \cos\varphi_d^0 - \Delta\omega_d}{\omega_d^{02}} \sin\varphi_d^0;\end{aligned} \tag{70}$$

wobei dann der Bequemlichkeit halber der obere Index $^\circ$ meist vernachlässigt werden kann. Hierin besteht nun die Aenderung der Geschwindigkeit $\Delta\omega$ im allgemeinsten Falle krystallinischer Medien aus zwei Theilen: der directen Einwirkung der Translation, die wir bisher mit $\delta\omega$ bezeichnet haben, und der indirecten, welche dadurch zu Stande kommt, daß die Wellennormale durch Fortbewegung des Krystalls eine veränderte Richtung annimmt. Wir werden daher zu setzen haben

$$\Delta\omega_e = \delta\omega_e + \frac{\partial\omega_e^\circ}{\partial\varphi_e}\delta\varphi_e$$

und ebenso die übrigen.

Hierdurch nimmt unsere Grundgleichung die Form an:

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta\varphi_e}{\omega_e^\circ}\left(\cos\varphi_e^\circ - \frac{\partial\omega_e^\circ}{\partial\varphi_e}\cdot\frac{\sin\varphi_e^\circ}{\omega_e^\circ}\right) + \frac{\Omega_n\cos\varphi_e^\circ - \delta\omega_e}{\omega_e^{\circ 2}}\sin\varphi_e^\circ \\
(70')\quad &= \frac{\delta\varphi_r}{\omega_r^\circ}\left(\cos\varphi_r^\circ - \frac{\partial\omega_r^\circ}{\partial\varphi_r}\cdot\frac{\sin\varphi_r^\circ}{\omega_r^\circ}\right) + \frac{\Omega_n\cos\varphi_r^\circ - \delta\omega_r}{\omega_r^{\circ 2}}\sin\varphi_r^\circ \\
&= \frac{\delta\varphi_d}{\omega_d^\circ}\left(\cos\varphi_d^\circ - \frac{\partial\omega_d^\circ}{\partial\varphi_d}\cdot\frac{\sin\varphi_d^\circ}{\omega_d^\circ}\right) + \frac{\Omega_n\cos\varphi_d^\circ - \delta\omega_d}{\omega_d^{\circ 2}}\sin\varphi_d^\circ.
\end{aligned}$$

Bei dieser Betrachtung ist die Abhängigkeit der Fortflanzungsgeschwindigkeit von der Farbe ignorirt, die ja in der That im Allgemeinen nur gering ist. Wollte man sie berücksichtigen, so würde, da die Schwingungsdauer T von der im Zustand der Ruhe vorhandenen verschieden ist, überall an Stelle von $\delta\omega$ zu treten haben $\delta\omega + \frac{\partial\omega^\circ}{\partial T}\delta T$, wobei sich δT nach (68) bestimmt. Doch mag diese Correction zunächst unterbleiben.

Die einfachste in Betracht kommende Beobachtung ist die, daß die astronomische Aberration ungeändert bleibt, wenn man Fernröhre mit verschiedenen Flüssigkeiten gefüllt zur Beobachtung anwendet. Da es sich hier um eine Brechung mit einem Einfallswinkel handelt, der unendlich klein erster Ordnung ist, kömmt die Gestalt des zweiten Gliedes in den Nennern von (69') bei Beschränkung auf erste Ordnung nicht in Betracht. Die obigen Formeln erklären die Erscheinung daher in derselben Weise, wie es z. B. von Herrn Ketteler entwickelt ist[1]).

Daß sich der Winkel der äußern Reflexion durch die gemeinsame Bewegung von Beobachter und Spiegel nicht ändert, folgt sehr leicht aus (70'). Hier ist $\omega_e = \omega_r = v$ und $\delta\omega_e = \delta\omega_r = 0$; bezeichnet man also kurz den Einfallswinkel mit e, den Reflexionswinkel mit r, so hat man, wegen $r = \pi - \varphi_r$ und $e^\circ = \pi - r^\circ$:

1) Ketteler, l. c. p. 64.

$$\delta e + \frac{2\Omega_n}{v}\sin e = \delta r$$

als die Aenderung von r in Folge der Bewegung des Spiegels und der Aenderung δe. Nennt man eine Richtung normal zum einfallenden Strahl nach aussen ν, eine ebenso zum austretenden Strahl gelegene ν', so ist δe die Aberration in Folge der Geschwindigkeitscomponente Ω_ν:

$$\delta e = \frac{\Omega_\nu}{v}.$$

Die Aberration beim Austritt:

$$\delta' r = \frac{\Omega_{\nu\prime}}{v}$$

addirt sich zu δr und giebt die gesammte Wirkung der Bewegung:

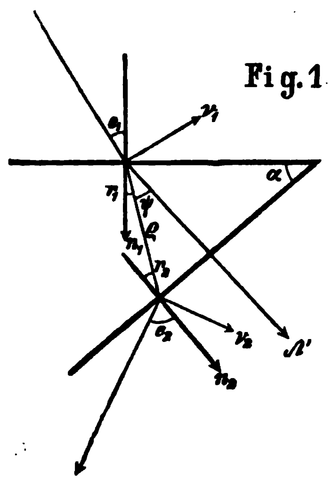
$$\Delta r = \delta r + \delta' r = \frac{(\Omega_\nu + \Omega_{\nu\prime}) + 2\Omega_n \sin e}{v}.$$

Nun möge die Richtung der Translation Ω, die nicht in der Einfallsebene zu liegen braucht, zerlegt werden in zwei Componenten Ω' und Ω'' parallel und senkrecht zur Einfallsebene. Macht die erstere, nämlich Ω' mit n den Winkel ψ, so ist:

$$\Omega_n = \Omega' \cos\psi, \quad \Omega_\nu = \Omega' \sin(\psi - e), \quad \Omega_{\nu\prime} = -\Omega' \sin(\psi + e),$$

also ist $\Delta r \equiv 0$.

Ferner kömmt in Betracht die Beobachtung, daß die messbare prismatische Ablenkung merklich unabhängig von der Orientirung des Prismas gegen die Translationsrichtung des Beobachtungsortes ist.



Sei das Prisma (Fig. 1) vom brechenden Winkel α, bezeichnet e_1, r_1 und e_2, r_2 den äußern und innern Winkel bei der Brechung an der ersten und zweiten Fläche, deren Lagen durch die Richtungen der Normalen n_1 und n_2 gegeben sein mögen, so gilt nach (70'), da die Geschwindigkeit $\omega_e = v$ im umgebenden Medium, welches als Luft oder freier Aether gedacht ist, von der Translation unabhängig ist:

$$(71)\quad \begin{aligned} \frac{\delta e_1 \cos e_1^o}{v} - \frac{n}{v^2}\Omega_{n_1} \sin(e_1^o - r_1^o) &= \frac{\delta r_1}{\omega}\left(\cos r_1^o - \frac{\partial \omega^o}{\partial r_1}\frac{\sin r_1^o}{\omega}\right) - \frac{\delta\omega}{\omega^2}\sin r_1^o, \\ \frac{\delta e_2 \cos e_2^o}{v} - \frac{n}{v^2}\Omega_{n_2} \sin(e_2^o - r_2^o) &= \frac{\delta r_2}{\omega}\left(\cos r_2^o - \frac{\partial \omega^o}{\partial r_2}\frac{\sin r_2^o}{\omega}\right) - \frac{\delta\omega}{\omega^2}\sin r_2^o. \end{aligned}$$

Hierbei ist wegen

$$r_1 + r_1 = \alpha \text{ sowohl } \delta r_1 + \delta r_2 = 0, \text{ als auch}$$

$$\frac{\partial \omega^o}{\partial r_1} + \frac{\partial \omega^o}{\partial r_1} = 0;$$

man erhält also durch Elimination von δr_1, wenn man die Indices ^{o} fortläßt:

$$v\left[\delta e_1 \cos e_1 \left(\cos r_1 - \frac{\partial\omega}{\partial r_1}\frac{\sin r_1}{\omega}\right) + \delta e_2 \cos e_2 \left(\cos r_2 + \frac{\partial\omega}{\partial r_1}\frac{\sin r_1}{\omega}\right)\right]$$
$$= n\left[\Omega_{n_1}\sin(e_1 - r_1)\left(\cos r_2 + \frac{\partial\omega}{\partial r_1}\frac{\sin r_2}{\omega}\right) + \Omega_{n_2}\sin(e_2 - r_2)\left(\cos r_1 - \frac{\partial\omega}{\partial r_1}\frac{\sin r_1}{\omega}\right)\right]$$
$$- n^2\,\delta\omega \sin\alpha.$$

Nun ist δe_1 die Folge der Aberration beim Einfall; bezeichnet man also eine Richtung, welche senkrecht zur einfallenden Wellennormale nach außen hin liegt, mit ν_1, so ist $\delta e_1 = \Omega_{\nu_1}/v$; eine ähnliche Aberration, $\delta' e_2 = \Omega_{\nu_2}/v$, tritt beim Austritt ein, wenn mit ν_2 eine entsprechend gegen die austretende Wellennormale gelegene Richtung bezeichnet wird. $\delta e_2 + \delta' e_2 = \Delta e_2$ giebt die gesammte Veränderung des Austrittswinkels, also den wahrnehmbaren Einfluß der Translation auf die Ablenkung. Dieser bestimmt sich durch:

$$(72)\quad \begin{aligned} & v\,\Delta e_2 \cos e_2 \left(\cos r_1 - \frac{\partial\omega}{\partial r_1}\cdot\frac{\sin r_1}{\omega}\right) \\ &= n\left[\Omega_{n_1}\sin(e_1 - r_1)\left(\cos r_2 + \frac{\partial\omega}{\partial r_1}\frac{\sin r_2}{\omega}\right) + \Omega_{n_2}\sin(e_2 - r_2)\left(\cos r_1 - \frac{\partial\omega}{\partial r_1}\frac{\sin r_1}{\omega}\right)\right] \\ &\quad - \left[\Omega_{\nu_1}\cos e_1 \left(\cos r_2 + \frac{\partial\omega_1}{\partial r_1}\frac{\sin r_2}{\omega}\right) - \Omega_{\nu_2}\cos e_2 \left(\cos r_1 - \frac{\partial\omega}{\partial r_1}\frac{\sin r_1}{\omega}\right)\right] \\ &\quad - n^2\,\delta\omega \sin\alpha. \end{aligned}$$

Nun möge die Translationsgeschwindigkeit Ω, nach der Einfallsebene und normal dazu zerlegt, die Componenten Ω' und Ω'' geben; Ω' schließe mit der Wellennormale im Innern des Prismas den Winkel ψ ein, dann ist:

$$(73)\quad \begin{aligned} \Omega_{n_1} &= \Omega' \cos(\psi + r_1) & \Omega_{n_2} &= \Omega' \cos(\psi - r_2) \\ \Omega_{\nu_1} &= \Omega' \sin(\psi + r_1 - e_1) & \Omega_{\nu_2} &= \Omega' \sin(\psi + e_2 - r_2) \end{aligned}$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial r_1} = -\frac{\partial\omega}{\partial\psi}.$$

Setzt man dies Alles ein, so erhält man nach einigen Reductionen unter Rücksicht auf $\sin e_1/\sin r_1 = \sin e_2/\sin r_2 = n$ das Resultat:

$$
\begin{aligned}
v\,\Delta e \cos e_2 &\left(\cos r_1 + \frac{\partial \omega}{\partial \psi}\frac{\sin r_1}{\omega}\right) \\
&= \left[\mathfrak{Q}'\left((n^2-1)\cos\psi + \frac{\partial \omega}{\partial \psi}\frac{\sin\psi}{\omega}\right) - n^2\,\delta\omega\right]\sin\alpha,
\end{aligned}
\tag{74}
$$

oder auch, wenn man die Componente von $\mathfrak{Q}'$ nach der Wellennormalen mit $\mathfrak{Q}_\varrho$, die normal dazu nach der brechenden Kante hin liegende mit $\mathfrak{Q}_\tau$ bezeichnet:

$$
\begin{aligned}
v\,\Delta e_2 \cos e_2 &\left(\cos r_1 + \frac{\partial \omega^2}{\partial \psi}\frac{\sin r_1}{2\omega^2}\right) \\
&= n^2 \sin\alpha\left[\mathfrak{Q}_\varrho \frac{n^2-1}{n^2} + \mathfrak{Q}_\tau \frac{1}{2v^2}\frac{\partial \omega^2}{\partial \psi} - \delta\omega\right].
\end{aligned}
\tag{74'}
$$

$\mathfrak{Q}_\varrho$ ist dabei dieselbe Größe, die in den früheren Abschnitten unter dieser Bezeichnung verstanden ist; $\partial\omega^2/\partial\psi$ bedeutet die Aenderung, welche ω^2 erfährt, wenn der Winkel ψ der Wellennormale mit der Componente $\mathfrak{Q}'$ durch eine Verschiebung ersterer in der Einfallsebene wächst.

Die Bedingung dafür, daß die Beobachtung der Ablenkung von der Translation unabhängig ist, wird nach (74'):

$$
\mathfrak{Q}_\varrho \frac{n^2-1}{n^2} + \mathfrak{Q}_\tau \frac{1}{2v^2}\frac{\partial \omega^2}{\partial \psi} = \delta\omega. \tag{75}
$$

Ist zunächst das Prisma unkrystallinisch, so ist die Geschwindigkeit ω von ψ unabhängig, es gilt also:

$$
\mathfrak{Q}_\varrho \frac{n^2-1}{n^2} = \delta\omega. \tag{75'}
$$

Diese Veränderung der Geschwindigkeit ist in Uebereinstimmung mit dem Resultat des Fizeau'schen Experimentes, welches wir (p. 13) zur Bestimmung des Constanten k unserer Theorie benutzt haben; letztere ergiebt also auch in Uebereinstimmung mit der Beobachtung die Unabhängigkeit der prismatischen Ablenkung von der Translation.

Für die Anwendung auf ein Prisma von krystallinischer Substanz ist erst $\dfrac{\partial \omega^2}{\partial \psi}$ zu bestimmen. Da sich dasselbe auf die Aenderung der Geschwindigkeit ω im ruhenden Krystall mit der Richtung bezieht, gehen wir aus von der Gleichung für ω; welche aus (66) folgt:

$$(76)\qquad \frac{\mu^2}{A_1 - M\omega^2} + \frac{\nu^2}{A_2 - M\omega^2} + \frac{\pi^2}{A_3 - M\omega^2} = 0$$

und erhalten durch Differentiation nach ψ:

$$(77)\qquad \begin{aligned} &2\left[\frac{\mu\frac{\partial\mu}{\partial\psi}}{A_1 - M\omega^2} + \frac{\nu\frac{\partial\nu}{\partial\psi}}{A_2 - M\omega^2} + \frac{\pi\frac{\partial\pi}{\partial\psi}}{A_3 - M\omega^2}\right] \\ &+ \left[\left(\frac{\mu}{A_1 - M\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\nu}{A_2 - M\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{A_3 - M\omega^2}\right)^2\right] M\frac{\partial\omega^2}{\partial\psi} = 0, \end{aligned}$$

worin wir kurz

$$(78)\qquad \left(\frac{\mu}{A_1 - M\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\nu}{A_2 - M\omega}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{A_3 - M\omega}\right)^2 = G^2$$

setzen wollen.

Nun bezieht sich $\partial\psi$ auf eine Verschiebung der Wellennormale in der Einfallsebene, oder allgemeiner gesagt, in der durch ρ und die Richtung Ω', mit welcher ρ den Winkel ψ einschließt, gelegten Ebene.

Daraus folgt, daß sein muß:

$$(79)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial\mu}{\partial\phi} &= \frac{\mu\cos\phi - \mu'}{\sin\phi} \\ \frac{\partial\nu}{\partial\phi} &= \frac{\nu\cos\phi - \nu'}{\sin\phi} \\ \frac{\partial\pi}{\partial\phi} &= \frac{\pi\cos\phi - \pi'}{\sin\phi}, \end{aligned}$$

wenn

$$\cos(\Omega', x) = \mu', \qquad \cos(\Omega', y) = \nu', \qquad \cos(\Omega', z) = \pi'$$

gesetzt wird.

Hierdurch erhalten wir in Rücksicht auf (76) aus (77):

$$\frac{M}{2}\frac{\partial\omega^2}{\partial\phi}\sin\phi = \frac{1}{G^2}\left[\frac{\mu\mu'}{A_1 - M\omega^2} + \frac{\nu\nu'}{A_2 - M\omega^2} + \frac{\pi\pi'}{A_3 - M\omega^2}\right],$$

oder da

$$(80)\qquad \frac{\mu}{G(A_1 - M\omega^2)} = \alpha, \; \frac{\nu}{G(A_2 - M\omega^2)} = \beta, \; \frac{\pi}{G(A_3 - M\omega^2)} = \gamma$$

die Richtungscosinus der auf der Wellennormale ρ und der Schwingungsrichtung s senkrechten Richtung σ sind:

$$\begin{aligned} \frac{M}{2}\frac{\partial\omega^2}{\partial\phi}\sin\phi &= \frac{1}{G}(\mu'\alpha + \nu'\beta + \pi'\gamma) \\ &= \frac{1}{G}\cos(\Omega', \sigma), \end{aligned}$$

oder endlich, wenn aus (80) $\frac{1}{G}$ in der Form

$$\frac{1}{G} = A_1 \mu\alpha + A_2 \nu\beta + A_3 \pi\gamma \tag{81}$$

bestimmt und eingesetzt wird:

$$\frac{M}{2} \frac{\partial \omega^2}{\partial \phi} \sin\phi = (A_1 \mu\alpha + A_2 \nu\beta + A_3 \pi\gamma) \cos(\Omega', \sigma).$$

Nun ist in der früheren Bezeichnung:

$$A_1/M = \omega_x^2, \quad A_2/M = \omega_y^2, \quad A_3/M = \omega_z^2,$$

also wird auch:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \omega^2}{\partial \phi} \sin\psi = (\omega_x^2 \alpha\mu + \omega_y^2 \beta\nu + \omega_z^2 \gamma\pi) \cos(\Omega', \sigma). \tag{82}$$

Dies ist in Gleichung (75) einzusetzen und ergiebt dann in Rücksicht auf $\Omega_\varrho = \Omega' \cos\phi$, $\Omega_\tau = \Omega' \sin\phi$, auf $v/\omega_x = n_x$ u. s. f.:

$$\delta\omega = \Omega' \left[\frac{n^2 - 1}{n^2} \cos\phi + \left(\frac{1}{n_x^2} \mu\alpha + \frac{1}{n_y^2} \nu\beta + \frac{1}{n_z^2} \pi\gamma \right) \cos(\Omega', \sigma) \right]$$

oder in Rücksicht auf (50′) und falls man $\Omega' \cos(\Omega', \sigma) = \Omega'_\sigma$ setzt:

$$\delta\omega = \Omega_\varrho \left(\frac{n_x^2 - 1}{n_x^2} \alpha^2 + \frac{n_y^2 - 1}{n_y^2} \beta^2 + \frac{n_z^2 - 1}{n_z^2} \gamma^2 \right) + \Omega'_\sigma \left(\frac{1}{n_x^2} \mu\alpha + \frac{1}{n_y^2} \nu\beta + \frac{1}{n_z^2} \pi\gamma \right). \tag{83}$$

Dies ist der Werth, den die Aenderung von ω in Folge der directen Einwirkung der Translation haben müßte, damit die Ablenkung einer Wellenebene durch ein Prisma aus krystallinischer Substanz unter allen Umständen von der Translation unabhängig wäre.

Vergleicht man hiermit das durch unsere Theorie gegebene (53):

$$\delta\omega = \Omega_\varrho (k_x \alpha^2 + k_y \beta^2 + k_z \gamma^2) - \Omega_\sigma (k_x \mu\alpha + k_y \nu\beta + k_z \mu\gamma), \tag{84}$$

so erkennt man, daß beide Formeln identisch werden für:

$$k_x = \frac{n_x^2 - 1}{n_x^2}, \quad k_y = \frac{n_y^2 - 1}{n_y^2}, \quad k_z = \frac{n_z^2 - 1}{n_y^2},$$

falls noch stattfindet:

$$\Omega'_\sigma = \Omega_\sigma.$$

Diese letztere Bedingung ist auf zwei Weisen erfüllbar, nämlich

1) dadurch, daß die Richtung der Translation in die Einfallsebene fällt, also

$$\Omega = \Omega' \quad \text{ist,}$$

2) dadurch, daß die Richtung σ, die normal zur Wellennormale und zur Schwingungsrichtung steht, in der Einfallsebene liegt.

Außerdem verschwindet die Differenz zwischen den beiden Werthen $\delta\omega$ natürlich auch, wenn der Factor von Ω_σ resp. Ω'_σ verschwindet.

Beobachtungen an Prismen aus krystallinischer Substanz dürften nun wohl fast ausschließlich in der Weise angestellt sein, daß die Einfallsebene eine Hauptebene des Krystalls ist; hier verschwindet aber jener Unterschied stets, es wird also die Beobachtung von der Translation vollkommen unabhängig.

In der That, nehmen wir z. B. die Wellennormale in der YZ-Ebene an, so ist
$$\mu = 0$$
und für die erste Welle mit constanter Geschwindigkeit $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$, also der Factor von Ω_σ resp. Ω'_σ gleich Null; für die zweite Welle hingegen liegt die Richtung σ in der Einfallsebene, also ist $\Omega_\sigma = \Omega'_\sigma$.

Für optisch einaxige Krystalle hat der Factor von Ω_σ resp. Ω'_σ den Werth
$$(k_s - k_o)\gamma\pi,$$
er verschwindet also für die ordinäre Welle wegen $\gamma = 0$ stets, für die extraordinäre aber nur wenn die Wellennormale senkrecht oder parallel zur Hauptaxe liegt.

Die gesammte Wirkung der Translation auf die Ablenkung schreibt sich nach (74) durch Einsetzen des Werthes (82), wenn wir das kleine Glied $\frac{\partial\omega^2}{\partial\phi}\cdot\frac{\sin r_1}{2\omega^2}$ im Nenner neben $\cos r_1$ vernachlässigen:

$$\Delta e_2 = -\frac{\Omega_\sigma - \Omega'_\sigma}{v}\cdot\frac{\left(\frac{n}{n_x}\right)^2\alpha\mu + \left(\frac{n}{n_y}\right)^2\beta\nu + \left(\frac{n}{n_z}\right)^2\gamma\pi}{\cos e_2 \cos r_1}\sin\alpha. \tag{85}$$

Hierin ist $\Omega_\sigma - \Omega'_\sigma = \Omega''_\sigma$ die Projection der Componente Ω'' von Ω (welche, wie wir oben festgesetzt hatten, normal zur Einfallsebene steht) auf die Richtung σ, n der der Richtung ρ entsprechende Brechungsindex.

Wir haben für einaxige Krystalle:

$$\Delta e_2 = -\frac{\Omega''_\sigma}{v}\cdot\frac{\left(\frac{n}{n_s}\right)^2 - \left(\frac{n}{n_o}\right)^2}{\cos e_2 \cos r_1}\cdot\gamma\pi\sin\alpha. \tag{86}$$

Der Einfluß der Bewegung wächst also mit der Stärke der Doppelbrechung.

Liegt die Einfallsebene senkrecht zu demjenigen Hauptschnitt, in welchem die gebrochene Wellennormale liegt, und steht die Translation senkrecht zur Einfallsebene, so ist für die extraordinäre Welle $\Omega_\sigma'' = \Omega$, also

$$\Delta e_2 = \frac{\Omega}{v} \cdot \frac{n_\omega^2 - n_\varepsilon^2}{n_\omega^2 \nu^2 + n_\varepsilon^2 \pi^2} \cdot \frac{\gamma \pi \sin \alpha}{\cos e_2 \cos r_1}. \tag{86}$$

Macht die gebrochene Wellennormale mit der Hauptaxe den Winkel 45°, so giebt dies den größten Werth:

$$\Delta e_2 = \frac{\Omega}{v} \cdot \frac{n_\omega^2 - n_\varepsilon^2}{n_\omega^2 + n_\varepsilon^2} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos e_2 \cos r_2};$$

derselbe beträgt bei einem gleichseitigen Kalkspathprisma etwa 3″ und es ließe sich die Beobachtung so einrichten, daß man die doppelte Größe der Messung unterwirft. Freilich liegt auch dann der Werth an der Grenze desjenigen, was mit einem Kalkspathprisma und einem Spectrometer sicher nachweisbar ist; mehr Erfolg verspricht die mikrometrische Beobachtung des kleinen Winkels zwischen dem ordentlichen und außerordentlichen Strahl. Bei andern Krystallen dürfte der Einfluß der Translation auf die prismatische Ablenkung sich vollständig der Beobachtung entziehen.

Noch interessirt das Problem der Reflexion im Innern eines Prismas von krystallinischer Substanz, weil hier Beobachtungen von Herrn E. Ketteler vorliegen.

Wir benutzen die Bezeichnungen der nebenstehenden Figur 2 und haben durch dreimaliges Anwenden des Satzes (70′) indem wir berücksichtigen, daß bei der inneren Reflexion r an Stelle von $\pi - \varphi_r$ gesetzt ist und also auch δr an Stelle von $-\delta\varphi_r$ tritt:

Fig. 2.

$$
(87)\quad
\begin{aligned}
&\frac{\delta e_1 \cos e_1^\circ}{v} - \frac{n_1^\circ}{v^2}\,\Omega_{n_1}\sin(e_1^\circ - r_1^\circ) = \frac{\delta r_1}{\omega_1^\circ}\left(\cos r_1^\circ - \frac{\partial \omega_1^\circ}{\partial r_1}\frac{\sin r_1^\circ}{\omega_1^\circ}\right) - \frac{\delta\omega_1 \sin r_1^\circ}{\omega_1^{\circ 2}},\\
&\frac{\delta e}{\omega_1^\circ}\left(\cos e^\circ - \frac{\partial \omega_1^\circ}{\partial e}\frac{\sin e^\circ}{\omega_1^\circ}\right) - \frac{\delta\omega_1 \sin e^\circ}{\omega_1^{\circ 2}} + \frac{n_1^\circ n_2^\circ}{v^2}\,\Omega_n \sin(e^\circ + r^\circ)\\
&\qquad = \frac{\delta r}{\omega_2^\circ}\left(\cos r^\circ - \frac{\partial \omega_2^\circ}{\partial r}\frac{\sin r^\circ}{\omega_2^\circ}\right) - \frac{\delta\omega_2 \sin r^\circ}{\omega_2^{\circ 2}},\\
&\frac{\delta e_2 \cos e_2^\circ}{v} - \frac{n_2^\circ}{v^2}\,\Omega_{n_2}\sin(e_2^\circ - r_2^\circ) = \frac{\delta r_2}{\omega_2^\circ}\left(\cos r_2^\circ - \frac{\partial \omega_2^\circ}{\partial r_2}\frac{\sin r_2^\circ}{\omega_2^\circ}\right) - \frac{\delta\omega_2 \sin r_2^\circ}{\omega_2^{\circ 2}}.
\end{aligned}
$$

Hierin bezeichnet ω_1° die Geschwindigkeit im Zustande der Ruhe in der ersten innern Wellennormale ρ_1, ω_2° in der zweiten ρ_2; dieselben sind nur dann gleich, wenn die bezüglichen Richtungen krystalloptisch gleichwerthig sind.

In diesen Formeln ist aber

$$
\begin{aligned}
e &= r_1 + \beta, \quad & r &= r_2 + \gamma \quad \text{also}\\
\delta e &= \delta r_1, & \delta r &= \delta r_2
\end{aligned}
$$

und auch

$$
\frac{\partial \omega_1}{\partial e} = \frac{\partial \omega_1}{\partial r_1}, \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial r} = \frac{\partial \omega_2}{\partial r}.
$$

Man kann nun δe und δr eliminiren und die gesammte Wirkung der Translation auf die Ablenkung, $\Delta e_2 = \delta e_2 + \delta' e_2$, berechnen, worin $\delta' e_2$ die Aberration der austretenden Wellennormale wie früher gleich Ω_{ν_2}/v ist; δe die Aberration der einfallenden Wellennormale ist gleich Ω_{ν_1}/v zu setzen. Die Richtungen ν_1 und ν_2 sind, wie aus der Figur zu ersehen, ebenso eingeführt wie im vorigen Problem.

Bildet die Componente von Ω nach der Einfallsebene Ω' mit der Normale n auf der spiegelnden Prismenfläche den Winkel ψ, so wird:

$$
(88)\quad
\begin{aligned}
\Omega_n &= \Omega'\cos\psi, \quad \Omega_{n_1} = \Omega'\cos(\psi - \beta), \quad \Omega_{n_2} = -\Omega'\cos(\psi + \gamma),\\
\Omega_{\nu_1} &= \Omega'\sin(\psi - \beta - e_1), \quad \Omega_{\nu_2} = -\Omega'\sin(\psi + \gamma + e_2).
\end{aligned}
$$

Führt man diese Werthe in das Resultat der obigen Elimination ein, so erhält man nach etwas umständlichen Reductionen folgende ohne die Indices $^\circ$ geschriebene Gleichung:

$$
(89)\quad v\Delta e_2 \cos e_2\left(\cos r - \frac{\partial\omega_2}{\partial r}\frac{\sin r}{\omega_2}\right)\left(\cos r_1 - \frac{\partial\omega_1}{\partial e}\frac{\sin r_1}{\omega_1}\right)
$$

$$
= \sin\beta\left(\cos r_2 - \frac{\partial\omega_2}{\partial r}\frac{\sin r_2}{\omega_2}\right)\left[\Omega'\left(\cos(\psi - e)(n_1^2 - 1) - \frac{\sin(\psi - e)}{\omega_1}\frac{\partial\omega_1}{\partial e}\right) - n_1^2\,\partial\omega_1\right]
$$

$$
+ \sin\gamma\left(\cos r_1 - \frac{\partial\omega_1}{\partial e}\frac{\sin r_1}{\omega_1}\right)\left[\Omega'\left(\cos(\psi + r)(n_2^2 - 1) + \frac{\sin(\psi + r)}{\omega_2}\frac{\partial\omega_2}{\partial r}\right) + n_2^2\,\delta\omega_2\right].
$$

Man erkennt, daß für jedes beliebige β und γ die Veränderung der Ablenkung Δe_2 nur dann verschwindet, wenn erfüllt ist:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}'\left(+\cos(\psi-e)(n_1^2-1)-\frac{\sin(\psi-e)}{\omega_1}\frac{\partial\omega_1}{\partial e}\right) &= n_1^2\,\delta\omega_1,\\ \mathfrak{Q}'\left(-\cos(\psi+r)(n_2^2-1)-\frac{\sin(\psi+r)}{\omega_2}\frac{\partial\omega_2}{\partial r}\right) &= n_2^2\,\delta\omega_2. \end{aligned} \tag{90}$$

Nun ist nach der Figur

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}_{\varrho_1} &= \mathfrak{Q}'\cos(\psi-e), & -\mathfrak{Q}_{\varrho_2} &= \mathfrak{Q}'\cos(\psi+r),\\ -\mathfrak{Q}_{\tau_1} &= \mathfrak{Q}'\sin(\psi-e), & -\mathfrak{Q}_{\tau_2} &= \mathfrak{Q}'\sin(\psi+r), \end{aligned}$$

wenn die auf ρ_1 und ρ_2 normalen Richtungen τ_1 und τ_2 respective nach derselben Seite hin wie ν_1 und ν_2 positiv gerechnet werden; also kann man (90) schreiben:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}_{\varrho_1}(n_1^2-1)+\frac{\mathfrak{Q}_{\tau_1}}{2\omega_1^2}\cdot\frac{\partial\omega_1^2}{\partial e} &= n_1^2\,\delta\omega_1\\ \mathfrak{Q}_{\varrho_2}(n_2^2-1)+\frac{\mathfrak{Q}_{\tau_2}}{2\omega_2^2}\cdot\frac{\partial\omega_2^2}{\partial r} &= n_2^2\,\delta\omega_2. \end{aligned} \tag{90'}$$

Dies sind genau dieselben Bedingungen, wie diejenige (75), welche erfüllt sein muß, damit die prismatische Ablenkung von der Translation unabhängig ist. Es sind also die dort gezogenen Folgerungen auf unsern Fall einfach zu übertragen.

Die Ablenkung durch innere Reflexion erleidet danach keine Aenderung durch die Bewegung,

1) stets, wenn die Richtung der Translation $\mathfrak{Q}$ in die Einfallsebene fällt;

2) gleichviel, wie $\mathfrak{Q}$ liegt, falls die Einfallsebene eine krystallographische Hauptebene ist,

3) in einaxigen Krystallen für die ordinäre Welle.

Die Beobachtungen Herrn Kettelers[1]) beziehen sich auf die Ablenkung durch innere Reflexion an Kalkspathprismen; die Einfallsebene war der Hauptschnitt. Nach dem eben Entwickelten wird das von ihm gefundene negative Resultat durch die Theorie gefordert.

Der Einfluß der Bewegung auf die Ablenkung Δe_2, der in andern als den Fällen 1)—3) eintritt ist nach (89) in jedem Falle leicht zu bestimmen, wenn man den früher gefundenen Werth (82) benutzt. Die Discussion der bezüglichen Resultate mag aber hier unterbleiben.

1) Ketteler, l. c. p. 158.

VI. Eine zweite Reihe von Beobachtungen an bewegten Medien bezieht sich auf die Verzögerung, welche eine Welle beim Durchgang durch eine planparallele bewegte Platte eines beliebigen Mediums erfährt. Diese Verzögerung wollen wir jetzt bestimmen.

Ist wiederum die Grenze der XY-Ebene parallel und fällt die Einfallsebene in die XZ-Ebene, so haben wir die Phase der drei Wellen, welche vor, in und hinter der Platte im gleichen Sinne fortschreiten, in der Form zu schreiben:

$$\frac{1}{T}\left(t-\frac{x\sin e+z\cos e}{v}\right),\quad \frac{1}{T_1}\left(t-\frac{x\sin r+z\cos r}{\omega}\right),$$
$$T\left(t-\frac{x\sin e+z\cos e}{v}\right)-\Theta.$$

Hierin ist T die Schwingungsdauer im ersten und dritten Medium, das wir als Luft oder freien Aether denken, aber nicht nothwendig diejenige der Lichtquelle. Ist letztere eine Wellenebene, die sich mit der Normalcomponente der Geschwindigkeit Ω' verschiebt und ist ihre Schwingungsdauer T, so gilt vielmehr noch:

$$\frac{1}{T}\left(1-\frac{\Omega'}{v}\right)=\frac{1}{T'} \tag{91}$$

An der ersten Grenze, $z=\Omega_z t$, muß die erste und zweite Phase, an der zweiten, $z=l+\Omega_z t$, die zweite und dritte Phase gleich werden. Dies giebt außer den frühern Brechungsgesetzen:

$$\frac{1}{T}\left(1-\frac{\Omega_z\cos e}{v}\right)=\frac{1}{T_1}\left(1-\frac{\Omega_z\cos r}{\omega}\right);\quad \frac{\sin e}{Tv}=\frac{\sin r}{T_1\omega} \tag{92}$$

noch die Phasendifferenz an den beiden Enden derselben Normalen zur bewegten Platte[1]):

$$\Theta=l\left(\frac{\cos r}{T_1\omega}-\frac{\cos e}{Tv}\right)\text{ oder }=\frac{l}{Tv}\left(\frac{Tv\cos r}{T_1\omega}-\frac{T\cos e}{T}\right). \tag{93}$$

Die Translation übt ihre Wirkung auf e, r, T, T_1, ω; bezeichnet man wieder die Werthe dieser Größen für den Zustand der Ruhe der Platte mit dem Index $^\circ$ und die Zuwachse durch δ, nur bei ω mit Δ, um daran zu erinnern, daß $\Delta\omega$ aus den beiden Theilen $\delta\omega+\frac{\partial\omega}{\partial r}\delta r$ besteht, so erhält man bei Beschränkung auf die erste Ordnung:

1) In dieser Formel ist die Einwirkung der nach mehrfacher innerer Reflexion durch die Platte fortschreitenden Wellen außer Acht gelassen.

$$\Theta = \frac{l}{Tv}\Big[(n\cos r^{\circ} - \cos e^{\circ})\Big(1 + \frac{\mathfrak{Q}'}{v}\Big)$$
$$+ \frac{\mathfrak{Q}_{,} n \cos r^{\circ} \sin(e^{\circ} - r^{\circ})}{v \sin r^{\circ}} - \frac{n^2 \cos r^{\circ} \Delta\omega}{v} + \sin e^{\circ}(\delta e - \delta r)\Big). \tag{94}$$

Aus den Brechungsgesetzen in der Form (70) folgt aber:

$$\delta r = \frac{\cos e^{\circ}}{n \cos r^{\circ}}\delta e + \frac{n\,\Delta\omega \sin r^{\circ}}{v \cos r^{\circ}} - \frac{\mathfrak{Q}_{,} \sin(e^{\circ} - r^{\circ})}{v \cos r^{\circ}}$$

und ferner ist nach dem Früheren:

$$\delta e = \frac{\mathfrak{Q}_{\nu}}{v},$$

wenn $\mathfrak{Q}_{\nu}$ die Componente der Translationsgeschwindigkeit nach einer zur einfallenden Wellennormale senkrecht in das erste Medium liegenden Richtung bezeichnet.

Setzt man dies ein, so folgt schließlich bei Weglassung der Indices $^{\circ}$:

$$\Theta = \frac{l}{Tv}\Big[(n\cos r - \cos e)\Big(1 + \frac{\mathfrak{Q}'}{v}\Big)$$
$$+ \frac{\sin(e - r)}{v \cos r \sin r}(\mathfrak{Q}_{,} n + \mathfrak{Q}_{\nu} \sin r) - \frac{n^2 \Delta\omega}{v \cos r}\Big]. \tag{95}$$

Für normalen Einfall findet sich einfacher:

$$\Theta = \frac{l}{Tv}\Big[(n-1)\Big(1 + \frac{\mathfrak{Q}' + \mathfrak{Q}_{,} n}{v}\Big) - \frac{n^2 \Delta\omega}{v}\Big]. \tag{95'}$$

Object der Beobachtung ist die Verzögerungsdifferenz zwischen zwei mit verschiedenen Geschwindigkeiten ω_1, ω_2 durch die Platte hindurchgehenden Wellen, nämlich:

$$\Theta_1 - \Theta_2 = \frac{l}{Tv}\Big[(n_1 - n_2)\Big(1 + \frac{\mathfrak{Q}'}{v}\Big)$$
$$+ [n_1(n_1 - 1) - n_2(n_2 - 1)]\frac{\mathfrak{Q}_{\varrho}}{v} - \frac{n_1^2 \Delta\omega_1 - n_2^2 \Delta\omega_2}{v}\Big]. \tag{96}$$

Ist die Normalgeschwindigkeit der Lichtquelle und der Platte gleich, so wird noch einfacher:

$$\Theta_1 - \Theta_2 = \frac{l}{Tv}\Big[(n_1 - n_2) + (n_1^2 - n_2^2)\frac{\mathfrak{Q}_{\varrho}}{v} - \frac{n_1^2 \Delta\omega_1 - n_2^2 \Delta\omega_2}{v}\Big]. \tag{96'}$$

Nach dieser Formel sind die Versuche von Herrn Mascart[1]) zu berechnen, welche constatirt haben, daß die gegenseitige Ver-

1) Mascart, Ann. de l'École Norm. Ser. II, Tom. I, p. 191, 1872 s. auch Ketteler, l. c. p. 184.

zögerung zweier normal zur optischen Axe durch dicke Kalkspathplatten gehenden Wellen merklich ungeändert bleibt, wenn man ihre Fortflanzungsrichtung einmal im gleichen einmal im entgegengesetzten Sinne in die Richtung der Bewegung der Erde um die Sonne bringt. Bei diesen Versuchen ist, da die Wellennormale senkrecht gegen die optische Axe liegt, $\frac{\partial \omega}{\partial r} = 0$, also $\Delta\omega = \delta\omega$; letzteres bestimmt sich nach Formel (45') für die ordinäre Welle gleich $\mathfrak{Q}_\varrho k_n$, für die extraordinäre, da $\mathfrak{Q}_r = 0$, $x = 1$, $\pi = 0$ ist, gleich $\mathfrak{Q}_\varrho k_s$; ferner ist $n_1 = n_n$, $n_2 = n_s$. Das Einsetzen in (96') ergiebt:

$$\Theta_1 - \Theta_2 = \frac{l}{Tv}\left[(n_n - n_s) + \frac{\mathfrak{Q}_\varrho}{v}\left[n_n^2(1-k_n) - n_s^2(1-k_s)\right]\right];$$

der frühere Werth

$$k_n = \frac{n_n^2 - 1}{n_n^2}, \quad k_s = \frac{n_s^2 - 1}{n_s^2}$$

läßt also das in $\mathfrak{Q}_\varrho$ multiplicirte Glied und damit den Einfluß der Translation auf die Verzögerung vollständig verschwinden: die Beobachtung bestätigt unsere Theorie.

Nicht so einfach für die Vergleichung mit der Formel (96') liegen die Verhältnisse bei den Beobachtungen Mascart's über den Einfluß der Translation auf die Drehung der Polarisationsebene im Quarz[1]).

Zunächst kann man über die Deutung der directen Beobachtungsresultate Zweifel hegen. Mascart ist zwar der Ansicht, keinen merklichen Einfluß der Translation erhalten zu haben, aber er läßt bei den verschiedenen Beobachtungsreihen die Möglichkeit einer Aenderung der Drehung um 1/10000—1/20000 des ganzen Werthes offen, denn die Beobachtungen sind viel schwieriger als die oben erwähnten am Kalkspath.

Was sodann die Anwendung der Theorie anbetrifft, so wirkt, abgesehen von der Complication des Apparates, welcher durch die vielfachen Brechungen des beobachteten Lichtstrahles in den verschiedenen Theilen Gelegenheit zu anderweitigen, schwer der Rechnung zu unterwerfenden, Einwirkungen der Translation auf die Beobachtung Gelegenheit giebt, besonders der Umstand ungünstig, daß es bei der Drehung der Polarisationsebene nöthig ist, deren Dispersion in Betracht zu ziehen, die ja von einer ganz andern Größenordnung ist, als die gewöhnliche Dispersion in krystallini-

1) Mascart, Ann. de l'École Norm. Ser. II T. 1. p. 209. 1872.

schen oder isotropen Körpern. Es ist also nöthig, die Aenderung von ω, die wir mit $\delta\omega$ bezeichnet haben, zu zerlegen in zwei Theile, von denen der eine die directe Wirkung der Translation enthält, wie dieselbe im ersten Abschnitt auseinandergesetzt ist, der zweite die Wirkung der durch die Translation im Quarz geänderten Schwingungsdauer. Das Glied mit $\frac{\partial\omega}{\partial r}$ verschwindet, wenn das Licht, wie angenommen, parallel der optischen Axe durch den Krystall geht. Wir setzen demgemäß in Formel (96'):

$$\Delta\omega_1 = \delta\omega_1 + \frac{\partial\omega_1^0}{\partial T}\partial T, \quad \Delta\omega_2 = \delta\omega_2 + \frac{\partial\omega_2^0}{\partial T}\partial T,$$

worin sich $\delta T = -\frac{T\Omega_\varrho}{\omega}$ findet.

Beide Theile von $\Delta\omega$ bestimmen sich nach dem früher für circularpolarisirende Medien abgeleiteten Gesetz (32);

$$\omega = \sqrt{\frac{A \pm \frac{Q}{\tau}}{M \pm P\tau}} + \frac{D\Omega_\varrho}{2(M \pm P\tau)}.$$

Diese allgemeine Formel ist aber für die Anwendung sehr unübersichtlich, zumal

$$P = p - \frac{p'}{\tau^2}, \quad Q = q - \frac{q'}{\tau^2}$$

auch von $T = 2\pi\tau$ abhängen.

Wir wollen zunächst berücksichtigen, daß P und Q gegen A und M sehr kleine Größen sind, also die Gleichung schreiben:

$$\omega = \sqrt{\frac{A}{M}}\left(1 \pm \frac{Q}{2A\tau} \mp \frac{P\tau}{2M}\right) + \frac{D\Omega_\varrho}{2M}$$

oder kürzer

$$= \sqrt{\frac{A}{M}} \pm \frac{Q'}{2T} \mp \frac{P'T}{2} + \Omega_\varrho k.$$

Dann ist

$$\delta\omega_1 = \delta\omega_2 = k\,\Omega_\varrho$$

und

$$\omega_1^0 = \sqrt{\frac{A}{M}} + \frac{Q'}{2T} - \frac{P'T}{2}$$

$$\omega_2^0 = \sqrt{\frac{A}{M}} - \frac{Q'}{2T} + \frac{P'T}{2}.$$

Also lautet (96'):

$$\theta_1 - \theta_2 = \frac{l}{Tv}\left[(n_1 - n_2) + \frac{\Omega_\varrho}{v}\left((n_1^2 - n_2^2)(1-k) + \frac{n_1^2 T}{\omega_1}\frac{\partial\omega_1}{\partial T} - \frac{n_2^2 T}{\omega_2}\frac{\partial\omega_2}{\partial T}\right)\right]. \quad (97)$$

Bei der Differentiation nach T kann das erste Glied ignorirt werden, da sein immerhin kleiner Differentialquotient (97) mit dem Factor $(n_1^2 - n_2^2)$ multiplicirt eingeht und demgemäß nur geringen Einfluß ausübt. Das zweite und dritte Glied erhält in (97) den Factor $(n_1^2 + n_2^2)$, wirkt also bedeutender ein. Seine Größenordnung zu beurtheilen nehmen wir nur zwei extreme Fälle vor, indem wir zuerst $P' = 0$ und Q' von T unabhängig setzen, sodann $Q' = 0$ und P' von T unabhängig.

Ersteres ergiebt:

$$\frac{\partial \omega_1^0}{\partial T} = -\frac{Q'}{2T^2}, \quad \frac{\partial \omega_2^0}{\partial T} = +\frac{Q'}{2T^2}$$
$$= -\frac{\omega_1^0 - \omega_2^0}{2T}, \quad = +\frac{\omega_1^0 - \omega_2^0}{2T},$$

und daraus folgt bei Beschränkung auf die erste Potenz von $(n_1 - n_2)$ nach einigen Reductionen:

$$\theta_1 - \theta_2 = \frac{l}{Tv}(n_1 - n_2)\left(1 + \frac{\Omega_\varrho}{v} n(3 - 2k)\right).$$

Letzteres giebt:

$$\frac{\partial \omega_1^0}{\partial T} = -\frac{P'}{2}, \quad \frac{\partial \omega_2^0}{\partial T} = +\frac{P'}{2}$$
$$= +\frac{\omega_1^0 - \omega_2^0}{2T}, \quad = -\frac{\omega_1^0 - \omega_2^0}{2T},$$

und hieraus folgt ebenso:

$$\theta_1 - \theta_2 = \frac{l}{Tv}(n_1 - n_2)\left(1 + \frac{\Omega_\varrho}{v} n(1 - 2k)\right).$$

Nimmt man für k den anderweit wahrscheinlich gemachten Werth $\frac{n^2 - 1}{n^2}$, worin n einen mittleren Werth des Brechungsverhältnisses bedeutet, so ist im ersten Ausdruck der Factor von Ω_ϱ positiv, im zweiten negativ; es bietet sich also die Möglichkeit auch einen sehr kleinen Einfluß der Translation durch Werthe der Constanten, welche zwischen den eingeführten extremen liegen, zu erklären. In eine genauere Discussion der Mascart'schen Versuche will ich nicht eintreten; eine wirkliche Berechnung wird schon durch den Umstand unmöglich, daß sie nicht gestatten, die unbekannte Geschwindigkeit des Sonnensystems gegen den Aether zu eliminiren, da die Beobachtungen nicht zu zwei Zeitpunkten, in welchen sich die Erde an zwei diametral gegenüberliegenden Punkten ihrer Bahn um die Sonne befand, wiederholt

worden sind, sondern sich nur über drei Monate erstrecken. Ich betrachte die Angelegenheit als noch nicht befriedigend erledigt, um so mehr, als nach meiner Ansicht auch die Frage der natürlichen circularpolarisirenden ruhenden Medien noch der vollständigen Aufklärung bedarf.

Eine besondere Schwierigkeit liegt für die genauere theoretische Verfolgung des obigen Problems darin, daß nach unserer Vorstellung die Erscheinungen der Dispersion zum Theil durch intramoleculare Vorgänge bedingt sind, die sich der Behandlung mit unsern theoretischen Hülfsmitteln entziehen. Ob wir gleich nämlich aus den benutzten Grundsätzen heraus für jede Gattung der Erscheinungen eine Abhängigkeit von der Farbe erhalten haben, so dürfen wir diese Gesetze doch nur als Grenzwerthe, etwa für besonders einfache molekulare Constitution der ponderabeln Substanz ansehen, die vielleicht in Wirklichkeit niemals vollkommen erreicht ist. Demzufolge müssen wir annehmen, daß in allen andern Fällen die Parameter unserer Differentialgleichungen in allgemein nicht bestimmbarer Weise von der Schwingungsdauer abhängen. Wie dies für ruhende Medien eine Verzichtleistung auf eine erschöpfende Theorie der Dispersion einschließt, so naturgemäß auch bei bewegten Medien diejenige auf eine vollständige Erklärung der Erscheinungen, bei welchen die Dispersion wesentlich in Betracht kömmt.

Außer dem eben besprochenen Problem der Drehung der Polarisationsebene im Quarz gehört hierher naturgemäß die Aenderung der Dispersion und Absorption in Folge der Translation.

Zu der erstern Frage sei daran erinnert, daß die im V. Abschnitt durchgeführte Berechnung des Einflusses der Translation auf die prismatische Ablenkung zu der Formel führte:

$$\Delta e_2 = \frac{n^2 \sin\alpha \left(\Omega_\varrho \dfrac{n^2-1}{n^2} - \delta\omega\right)}{v \cos e_2 \cos r_1}.$$

Wird dabei die Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Schwingungsdauer T berücksichtigt, so folgt nach dem zu Formel (70') Gesagten:

$$\Delta e_2 = \frac{n \sin\alpha \left(\Omega_\varrho \dfrac{n^2-1}{n^2} - \delta\omega - \dfrac{\partial\omega}{\partial T}\,\delta T\right)}{v \cos e_2 \cos r_1}. \tag{98}$$

Hierin ist wieder die in Folge der gemeinsamen Translation von Lichtquelle und Prisma eintretende Aenderung der Schwingungsdauer im Prisma:

$$\delta T = -\frac{T\Omega_\varrho}{\omega}.$$

Damit also die Ablenkung für alle Farben gleichmäßig streng von der Translation unberührt bliebe, wäre nöthig, daß die directe Einwirkung derselben auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, die durch unsere Theorie nur in der Form $\delta\omega = \Omega_\varrho k$ gegeben ist, sich genauer bestimmte:

$$\delta\omega = \Omega_\varrho\left(\frac{n^2-1}{n^2} + \frac{T}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial T}\right), \tag{98'}$$

also im Allgemeinen mit der Farbe wechselte. Soviel ich weiß, liegen noch keine ausführlichen Beobachtungen vor, die eine solche Folgerung nöthig machen. Beiläufig sei bemerkt, daß man aus der Formel (98') dasjenige Gesetz für ω erschließen kann, welches den Factor k von Ω_ϱ zu einer Constanten macht. Denn setzt man die Klammern unabhängig von T, so giebt dies eine Differentialgleichung für ω, welche führt auf:

$$\omega^2 = \frac{v^2 a^2}{1 - \frac{a^2}{b} T^{2b}}.$$

Der Werth der Klammer (d. h. k selbst) ist dann gleich $1-a^2$, worin a den Sinn des reciproken Brechungscoefficienten für unendlich kleine Schwingungsdauer besitzt.

Hinsichtlich der zweiten Frage, der Aenderung der Absorption in Folge der Bewegung, ist nur auf das p. 16 Ausgeführte hinzuweisen, wonach unsere Theorie es wahrscheinlich erscheinen läßt, daß ein bewegtes Medium mit auswählender Absorption die Maxima der Absorption unverändert bei denselben Schwingungsdauern behält, wenn auch der entgegengesetzte Fall nicht ausgeschlossen ist.

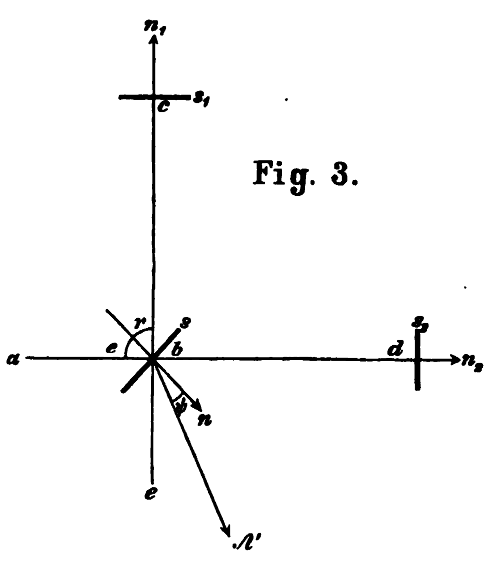
Damit stimmt überein die Beobachtung von Klinkerfueß [1]), daß innerhalb eines Spectrums die Absorptionsstreifen sich ein wenig verschieben, wenn die Richtung des Lichtstrahles im Bromdampf einmal parallel, einmal entgegengesetzt der Richtung der Erdbewegung gebracht wird. Eine Berechnung derartiger Beobachtungen ist indessen nur möglich, wenn sie an zwei um 6 Monate von einander entfernten Terminen wiederholt worden sind, um die unbekannte Bewegung des Sonnensystems im Aether zu eliminiren.

---

1) Klinkerfueß, Gött. Nachr. 1870, p. 226.

Schließlich ist noch eine einzelne Beobachtung zu besprechen, die nicht unter die im Vorstehenden erörterten fällt, insofern sie sich auf Größen bezieht, die bisher als zweiter Ordnung vernachlässigt sind.

Herr Michelson [1]) hat versucht, die fundamentale Frage, ob der Lichtäther an der Bewegung der Erde Theil nimmt oder nicht, durch den Versuch zu entscheiden. (Fig. 3).



Eine Lichtquelle a ist mit einem System von Planspiegeln s, s_1, s_2 so verbunden, daß eine von ihr nach b gelangende Welle in zwei Theile getheilt wird, welche nach c und d fortschreiten, dort in sich reflectirt werden, nach b zurückkehren und auf dieselbe Richtung zurückgeführt, schließlich nach e gelangen, um dort auf ihren Gangunterschied untersucht zu werden.

Wir wollen diesen in e stattfindenden Gangunterschied berechnen.

$\mathfrak{Q}'$, die Richtung der Projection der Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{Q}$ auf die Einfallsebene, mache mit der Normale n auf dem ersten Spiegel s den Winkel ψ, es ist dann

$$\mathfrak{Q}_n = \mathfrak{Q}' \cos\psi, \tag{99}$$

analog für die Normalen n_1 und n_2 auf den Spiegeln s_1 und s_2, welche gegen n um resp. 45° und 135° geneigt sind:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Q}_{n_1} &= -\frac{\mathfrak{Q}'(\cos\psi + \sin\psi)}{\sqrt{2}}, \\ \mathfrak{Q}_{n_2} &= +\frac{\mathfrak{Q}'(\cos\psi - \sin\psi)}{\sqrt{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{99'}$$

Ferner gilt bei der ersten Reflexion in der frühern Bezeichnung:

$$\delta r = \delta e + \frac{\mathfrak{Q}_n}{v}\sqrt{2};$$

1) A. Michelson, Americ. Journ. of Science Ser. 3, T. 21, p. 120. 1881.

bei der zweiten, da der Einfall dort unter dem Winkel $e_1 = \delta r$ geschieht:

$$\delta e_1 = \delta r_1 = \delta r;$$

bei der dritten Reflexion, wo der Einfall unter dem Winkel $e_2 = \delta e$ geschieht:

$$\delta e_2 = \delta r_2 = \delta e.$$

Um diese Winkel weichen die Richtungen der Wege, welche die Wellen bei Bewegung des Apparates zurücklegen, ab von den in der Ruhe geltenden [1]).

Außerdem ändert sich ihre Länge. Setzt man $\overline{bc} = L_1$, $\overline{bd} = L_2$, so werden beim Hingang die Wellen, um die Spiegel s_1 und s_2 zu erreichen, parallel $\overline{bc}$ und $\overline{bd}$ die Wege

$$L_1\left(1+\frac{\Omega_{n_1}}{v}\right) \quad \text{und} \quad L_2\left(1+\frac{\Omega_{n_2}}{v}\right)$$

zurücklegen müssen, beim Rückgang, um den Spiegel s wieder zu treffen, die Wege

$$L_1\left(1-\frac{\Omega_{n_1}}{v}\right) \quad \text{und} \quad L_2\left(1-\frac{\Omega_{n_2}}{v}\right).$$

Sie treffen dabei bis auf Glieder dritter Ordnung dieselbe Stelle des Spiegels wieder mit demselben Theile der Welle. Durch diese doppelte Wirkung der Translation werden also bis auf zweite Ordnung inclusive genau die vier in Rechnung zu ziehenden Wege resp. gleich:

$$L_1\left(1+\frac{\delta r_2}{2}\right)\left(1\pm\frac{\Omega_{n_1}}{v}\right) \quad \text{und} \quad L_2\left(1+\frac{\delta e_2}{2}\right)\left(1\pm\frac{\Omega_{n_2}}{v}\right).$$

Die Verzögerung wird erhalten, wenn man diese Wege durch die Wellenlängen dividirt, die auf ihnen liegen. Gilt $\lambda_0 = Tv$ für die einfallende Wellenlänge $\overline{ab}$, so für die nach c fortschreitende:

$$\lambda_1 = \frac{Tv\left(v+\frac{\Omega_n}{\sqrt{2}}\right)}{\left(v-\frac{\Omega_n}{\sqrt{2}}\right)},$$

für die nach b zurückkehrende:

1) Die Anwendung erfordert von diesen Größen eine Genauigkeit nur bis auf erste Ordnung.

$$\lambda_1' = \frac{Tv\left(v + \frac{\Omega_n}{\sqrt{2}}\right)(v + \Omega_{n_1})}{\left(v - \frac{\Omega_n}{\sqrt{2}}\right)(v - \Omega_{n_1})}.$$

Ferner gilt für die von b nach d fortschreitende Welle:

$$\lambda_2 = Tv,$$

für die zurückkehrende:

$$\lambda_2' = \frac{Tv(v + \Omega_{n_2})}{(v - \Omega_{n_2})}.$$

Berücksichtigt man dies Alles und nimmt $L_1 = L_2$, so ergiebt sich die gegenseitige Verzögerung beider Wellen in e:

$$\Theta = \frac{L}{v^2 T}\left[\frac{\left(1 + \frac{\delta r^2}{2}\right)\left(v - \frac{\Omega_n}{\sqrt{2}}\right)}{\left(v + \Omega_{n_1}\right)\left(v + \frac{\Omega_n}{\sqrt{2}}\right)}[(v + \Omega_{n_1})^2 + (v - \Omega_{n_1})^2] \right. \tag{100}$$

$$\left. - \frac{\left(1 + \frac{\delta e^2}{2}\right)}{(v + \Omega_{n_2})}[(v + \Omega_{n_2})^2 + (v - \Omega_{n_2})]\right].$$

Hierin ist nun zu setzen:

$$\delta e = \frac{\Omega_{n_1}}{v}, \qquad \delta r = \frac{\Omega_{n_1} + \Omega_n \sqrt{2}}{v},$$

dann erhält man bei Beschränkung auf zweite Ordnung:

$$\Theta = \frac{2L}{\lambda}\left[\frac{\Omega_{n_2} - \Omega_{n_1} - \Omega_n \sqrt{2}}{v} + 2\frac{(\Omega_{n_1}^2 + \Omega_n^2 - \Omega_{n_2}^2 + \Omega_n \Omega_{n_1} \sqrt{2})}{v^2}\right]. \tag{100'}$$

Die Einführung der Werthe von Ω_n, Ω_{n_1}, Ω_{n_2} nach (99) zeigt aber, daß dies ergiebt:

$$\Theta = 0.$$

Hieraus folgt, daß die Beobachtungsresultate bei der Anordnung des Experimentes, wie sie Herr Michelson gewählt hat, von der Translation völlig unabhängig sind, daß also Herr Michelson die negativen Resultate, die er factisch erhalten hat, erhalten mußte, gleichviel, ob sich der Aether mit der Erde bewegt oder nicht.

Resultate.

1. Die Fresnel'sche Hypothese der Mitführung des Aethers durch die bewegten ponderabeln Körper mit dem $(n^2-1)/n^2$ten Theil ihrer Geschwindigkeit ist an sich durch die Widersprüche mit den Folgerungen der Elasticitätstheorie im hohen Grade schwierig und führt bei Krystallen auf Resultate, welche durch die Beobachtung nicht bestätigt werden.

2. Auch die Annahme, daß die bewegte Erde eine ganze Aetherathmosphäre mit sich führe, bietet ähnliche theoretische Schwierigkeiten und wird bisher durch keine Beobachtung nöthig gemacht. Speciell das von Herrn Michelson angestellte und in diesem Sinne gedeutete Experiment, zeigt sich bei richtiger Berechnung von der relativen Bewegung zwischen dem Aether und dem Beobachtungsapparat völlig unabhängig.

3. Eine vollständige Unabhängigkeit der fortschreitenden Bewegung des Aethers von derjenigen der Erde und der auf derselben befindlichen Körper ist mit der Elasticitätstheorie am besten zu vereinigen und bietet sich bei Zugrundelegung der Neumann'schen Ansicht von der überall constanten Dichte des Aethers ganz von selbst. Dabei ist aber eine absolute Ruhe des Aethers ohne Willkür nicht anzunehmen, es ist vielmehr eine (in Fixsternweiten selbst wechselnde) Bewegung desselben zuzulassen.

4. Ist die fortschreitende Bewegung des Aethers auch von der Bewegung der ponderabeln Körper, innerhalb deren er sich befindet, unabhängig, so können seine Vibrationen doch durch letztere beeinflußt werden, wenn die Wechselwirkungen zwischen Aether und Materie sich durch die relative Geschwindigkeit ändern.

5. Nimmt man an, daß diese Kräfte die Durchsichtigkeit der bewegten Medien nicht modificiren, also dem Gesetz der Energie folgen, und dabei die Eigenschaft besitzen, entgegengesetzten Richtungen verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeiten entsprechen zu lassen, so bestimmt sich dadurch eine einzige mathematische Form für sie, welche erste Differentialquotienten nach der Zeit und den Coordinaten und im allgemeinsten Falle 18 Constanten enthält.

6. Diese Kräfte ergeben, gemäß den Symmetrieverhältnissen eines isotropen, in einer Richtung geradlinig fortbewegten Mediums specialisirt, für solche als Wellennormalenfläche eine excentrische Kugel und erklären die bei isotropen bewegten Medien

beobachteten Erscheinungen, z. B. die Unabhängigkeit der Aberration von dem eingeschalteten Medium, die Unabhängigkeit der Reflexion und prismatischen Ablenkung von der Bewegung.

7. Auf circularpolarisirende Medien angewandt liefern sie, je nach der Verfügung über die Constanten, Werthe für die beobachtbare Drehung der Polarisationsebene, welche die wirklich gemessenen umschließen, aber vorläufig noch keine fertige Theorie der Erscheinung. Hinsichtlich der Modification der Dispersion und der auswählenden Absorption ergeben sie gemäß unserer Anschauung, daß jene Vorgänge sich hauptsächlich innerhalb der Moleküle vollziehen und demnach der Elasticitätstheorie nicht direct zugänglich sind, keine abgeschlossenen entscheidenden Resultate.

8. Dagegen giebt die Anwendung der allgemeinsten Gesetze auf einaxige Krystalle die vollständige Erklärung der Beobachtungen Herrn Kettelers über die Unabhängigkeit der Ablenkung der Wellennormalen in Krystallen durch Brechung und innere Reflexion von der Translation und zwar so weit, daß die von Herrn Ketteler aus seinen Beobachtungen geschlossene Formel für die Geschwindigkeit der extraordinären Welle in einaxigen Krystallen identisch durch die Theorie gegeben wird.

9. Ebenso erklären sie die Beobachtungen Herrn Mascarts über die Unabhängigkeit der gegenseitigen Verzögerung der beiden Wellen, welche sich senkrecht zur Axe in einem Kalkspath fortpflanzen, von der gemeinsamen Translation der Lichtquelle und des Krystalles.

10. Ueber diese Beobachtungen hinaus giebt die Theorie die allgemeinen Gesetze für die Aenderungen der Geschwindigkeit, für die Verschiebungen der optischen Axen, für die Drehungen der Polarisations-Ebenen, welche in optisch zweiaxigen Krystallen in Folge der Translation auftreten, und bestimmt die Richtung und Geschwindigkeit des jeder Wellenebene entsprechenden Strahles.

Die Anwendung der in der vorstehenden Abhandlung aufgestellten Grundsätze auf das Problem der Reflexion und Brechung bleibt einer zweiten Mittheilung vorbehalten.

Inhalt.

Bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

März und April 1887.

Meteorologische Zeitschrift Jahrg. 4. Heft 3. März. Heft 4. April.
Vierteljahrschrift der Astronomischen Gesellschaft. Jahrg. 22. Heft I.
Jahrbuch des Kön. sächs. meteorologischen Institutes 1885. Jahrg. 3.
Resultate der meteorologischen Beobachtungen angestellt auf der Sternwarte Leipzig. 1884. 1885.
Sitzungsberichte der K. Pr. Akademie der Wissensch. zu Berlin. XL—LIII. 28. Okt. — 16. Dez. 1886.
Zum Jahrg. 1886 Erster Halbb. Jan. — Mai (Verzeichniß).
Ueber den Placentarkreislauf des Menschen v. Waldeyer (aus den Sitzungsberichten der K. P. A. d. W. zu Berlin.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Band XVI. Jahrg. 1884. Heft 2.
Leopoldina. Heft XXIII. N. 3. 4. 5—6. März 1887.
Berichte über die Verhandlungen d. K. S. Ges. d. W. zu Leipzig. Mathematisch-physische Classe. 1886. Supplement.
Acta Mathematica 9, 3. 9, 4,
Gylden: Untersuchungen über die Convergenz der Reihen, welche zur Darstellung der Coordinaten der Planeten angewendet werden. Aus den Acta mathem. 9, 3.

Abhandlungen aus dem Gebiete der Naturwissenschaften herausg. v. Naturw. Verein in Hamburg. Band IX. Heft 1 u. 2.
Das Wetter. Jahrg. 4. Heft 3.
Zeitschrift für Naturwissenschaften. LIX. Band. 4te Folge. Band 5. Heft 5.
Die Portland-Bildungen der Umgegend von Hannover v. C. Sruckmann.
Index Generalis in Monumentorum Boieorum Volumina I—XXVII. Pars altera.
Ueber künstliche Silberkrystalle von G. vom Rath.
Fr. Pfaff v. G. vom Rath.
Einige geologische Wahrnehmungen in Mexiko v. G. vom Rath.
Sitzungsberichte der mathem.-physikalischen Classe d. K. B. Akademie d. W. zu München. 1886. Heft III.
Germanisches Museum.
a. Anzeiger. Band 1. Heft 3. Seite 231—296.
b. Mittheilungen. Band 1. Heft 3. Jahrg. 1886.
c. Katalog d. in G. M. befindlichen Kartenspiele und Spielkarten.
Bericht über das XII. Vereinsjahr erst. vom Verein der Geographen in Wien.
Jahrbuch der K. K. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1886. Bd. XXXVI. Heft 4.
Verhandlungen der K. K. geolog. Reichsanstalt. 1886. No. 13—18. 1887. No. 1.
Ueber die Liasischen Cephalopoden des Hierlatz bei Hallstadt. Von G. Geyer. (Abh. d. K. K. Geol. Anstalt). Band XII. No. 4.
Ungarische Revue 1887. Jahrg. 7. Heft III. IV. V.
6. 7. 8. 9 u. 10. Verwaltungsbericht d. Univ. Czernowitz. 1882—86.
Lotos Neue Folge VII. Band. d. g. R. 35ster Band.
a. Das Archiv der Stadt Hermannstadt u. der sächs. Nation von Franz Zimmermann.
b. Historischer Festzug z. Feier der Einwanderung der Sachsen nach Siebenbürgen. 24. Aug. 1884.
c. Archiv des Vereins für siebenbürgische Landeskunde. Neue Folge. Band 21. Heft 1.
d. Verzeichniß der Kronstädter Zunfturkunden.
e. Jahresbericht des Vereins für siebenbürgische Landeskunde für das Vereinsjahr 1885/6.
f. Die Grabdenksteine in der Westhalle d. evang. Stadtpfarrkirche in Kronstadt.
g. Sammlung gemeinnütziger Vorträge (vom deutschen Verein in Prag) No. 114. Die Siebenbürger in Sachsen.
h. Kronstädter Drucke 1535—1886. Herausg. v. Jul. Groß.
Nature. Vol. 35. No. 905—913.
Transactions of the Cambridge philosophical society. Vol. XIV. Part. II.
Proceedings of the Cambridge philos. society. Vol. VI. 1. Part. 1887.
Proceedings of the Royal society. No. 251. 252. Vol. XLII.
Monthly notices of the R. astronomical society. Vol.XLVII. Nr. 4. 5. 1887.
Proceedings of the London mathematical society. No. 275—279. 280—282.
a. Journal of the R. microscopical society. Ser. II. Vol. VI. Part. 6a. December 1886. (containing Index).
b. April 1887. Part. II.
a. Records of the geological survey of India. Vol. XX. 1887.
b. Memoirs of the geological survey of India. Ser. X. Vol. IV. Part. I. Supplement I. Ser. X. Vol. IV. Part. II.
c. Mem. — — Ser. XIV. Vol. I. 3. fasc. VI.
Société géologique de Belgique. Procès-verbal de l'assemblée général de 21. Nov. 1886.
Bulletin de l'Académie Royale des sciences des lettres et des beaux arts de Belgique. Année 56. 3. serie tom. 13. No. 2. 3.
Institut de France, notice sur L.-R. Tulasne par M. Ed. Bornet.
Bulletin de la société mathematique de France. Tome XV. No. 1. 2.
a. Handelingen en Mededeelingen van de Maatschappy der Nederlandsche letterkunde te Leiden. Jaar 1886.
b. Levensberichten der afgestorvene Medeleden . . .Bijlage tot de Handelingen van 1886.
a. Verhandelingen der koninklijke Akademie van Wetenschappen. 25. Deel.

b. Verslagen en Mededeelingen d. K. A. v. W. Afdeeling Natürkunde. 3 Reeks. 2de Deel.
c. Afdeeling Letterkunde. 3 Reeks. 3de Deel.
Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles. Tome XXI. Livr. 2. 3. 4.
Critica Arabica v. Dr. Carlo Graf von Landberg. No. 1.
Indas Machabaeus Nupta ad amicam.
Jaarboek van de K. Akademie v. W. gevestigd te Amsterdam voor 1885.
Bijdragen tot de Taal- Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië. 5. Volgreeks. 2. Deel. 2. Aflev.
Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania. Aar 1886.
Handel und Schifffahrt auf dem rothen Meerc in alten Zeiten, v. J. Lieblein.
Eine Augustin fälschlich beigelegte Homilia de sacrilegis, v. Dr. C. P. Caspari, Prof. der Theol. in Christiania.
Observations publiées par l'Institut méteorologique central de la société des sciences de Finlande. Vol. 1. 2. Premieres livraisons. 1882. 1883.
Meteorologische Beobachtungen angestellt im Tifliser Observatorium. 1885.
Mémoires de l'Académie Imp. des sciences de St. Petersbourg. Serie VII. Tome XXXIII No. 7. 8 et dernier. Tome XXXIV. No. 1. 2. 3.
Plan de l'exposition scientifique et industrielle de la Sibérie et de l'Oural 1887 a Ekathérinebourg. Russie.
Bulletin de la société Imp. des Naturalistes de Moscou. Année 1886. No. 4. Année 1887. No. 1.
Meteorologische Beobachtungen ausgef. v. meteorol. Observ. d. landwirthschaftl. Akademie bei Moskau. 1886, zweite Hälfte.
Dorpater meteorolog. Beobachtungen. Sept. Okt. Nov. Dez. 1886. Jan. 1887.
Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. XXII. 1886—87. Disp. 4—9.
Atti della Società Toscana di scienze Naturali. Pisa.
a. Memorie. Vol. VIII. fasc. 1.
b. Processi verbali Vol. 5. Adunanza del di 14 nov. 1886, Ad. del di 9. genn. 1887.
Atti della Reale Accademia dei Lincei 1887. Rendiconti Serie quarta. Vol. 3. fasc. 3. 4. 5. 6.
a. Le Eruzioni polverose e filamentose dei vulcani di Arcangelo Scacchi.
b. Sopra un frammento di antica roccia vulcanica.
c. I composti fluorici dei Vulcani del Lazio.
a. Bulletino delle Publicazioni italiane. Biblioteka Nasionale centrale di Firenze 1887. No. 29. 32.
b. Indici del Bollettino delle publicazioni italiane 1886. 1. A — Rossini.
Bollettino delle opere moderne straniere. Bibliotheca naz. centr. Vittorio Emanuele di Roma. No. 6. 1886.
Antiquissimi libri Indiciales Terrae cracoviensis. Pars II ab an. 1394—1400.
Monumenta medii aevi historica, res gestas Poloniae illustrantia. Tomus IX. cont. codicis diplomatici Poloniae minoris partem secundam 1153—1333.
Scriptores rerum polonicarum Tom. IX. cont. Collectanea ex archivo collegii hist. crac. Tom. X. historici diarii domus professae S. J. ad S. Barbaram Crac. annosnovem 1600—1608.
Zbior Wiadomosci do Antropologie Krajowéj tom. X.
a. Rozprawy sprawozdania z posiedzen wydzialu filologicznego. Tomo XI.
b. R. sp. z. pos. w. matemátyczno-przyrodniczego. Tom. XIII. XIV.
Rocznik zarzadu akademii umiejetnosci w. Krakowie Rok 1885.
Sprawozdanie komisyj fizyjograficzny 1885. Tom. 20.
Archiwum do dziejow literaturyi oswiaty w. Polsce. Tom. IV. V.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

15. Juni. № 9. 1887.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 7. Mai 1887.

1. Meyer: a) Medicinisch-chemische Notizen. — b) R. Demuth und V. Meyer, Ueber die Sulfurane. — c) J. Mensching und V. Meyer, Ueber das Verhalten des Phosphors, Arsens und Antimons bei Weissglühhitze.
2. Schwarz: a) Herr F. Mertens in Graz, Corresp., über die Convergenz einer aus Primzahlpotenzen gebildeten unendlichen Reihe; b) Derselbe, Ueber ein dreifaches Integral, welches das Potential eines homogenen Ellipsoids als speciellen Fall enthält; c) Herr Prof. Jul. Weingarten in Berlin (Corresp.), Ueber die durch eine Gleichung von der Form $\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}+\mathfrak{Z} = 0$ darstellbaren Minimalflächen; d) Herr Jul. Petersen, Prof. in Kopenhagen, Ueber n-dimensionale complexe Zahlen.
3. Voigt: Henning, Ueber Metallreflexion.
4. Wieseler, Zweiter Nachtrag zu der Abh. über die Einlegung und Verzierung von Werken aus Bronze mit Silber und anderen Materialen in der gr. und röm. Kunst.
5. de Lagarde kündigt eine Abhandlung an: Purim. Ein Beitrag zur Geschichte der Religion.

Zum Schluss führt Schwarz an Apparaten der Kgl. Sammlung mathematischer Instrumente und Modelle, die kürzlich aus Paris bezogen worden sind, einige Experimente aus, betreffend die Bewegung eines festen Körpers um einen festen Punkt, vorausgesetzt, daß zwei Hauptträgheitsmomente dieses Körpers gleich groß sind.

Medicinisch-chemische Notizen.

Von

Victor Meyer.

I. Versuche über die Haltbarkeit von Sublimatlösungen.

Vor einiger Zeit theilte mir mein hochverehrter College, Herr Professor König, eine Notiz von Professor O. Angerer in München mit, zugleich mit dem Hinweise, daß der Inhalt derselben,

wenn er sich in vollem Umfange bestätige, von einer außergewöhnlichen Tragweite für die Kriegschirurgie sei. In der Abhandlung wird der Nachweis geführt, daß Lösungen von Sublimat in gewöhnlichem, nicht destillirtem Wasser für antiseptische Zwecke dauernd haltbar gemacht werden können, wenn dem Wasser ein dem Sublimat gleiches Gewicht an Kochsalz zugefügt wird. (Bekanntlich zersetzen sich Lösungen von Sublimat in gewöhnlichem Brunnenwasser nach einiger Zeit unter Abscheidung unlöslöslicher Oxychloride.) Um das sehr beschwerliche Mitführen großer Flüssigkeitsmengen im Kriege zu vermeiden, könnte man sich hiernach darauf beschränken, festes Sublimat mitzunehmen und dasselbe an Ort und Stelle, nebst der nöthigen Menge Kochsalz, in Brunnenwasser aufzulösen. Zu diesem Zwecke hat Professor Angerer Pastillen aus bestimmten Theilen Sublimat und Kochsalz bereiten lassen, welche die Herstellung einer haltbaren antiseptisch wirkenden Flüssigkeit überall, wo sich Brunnenwasser findet, auf die bequemste Weise zu ermöglichen bestimmt sind.

Bei der hervorragenden Wichtigkeit der Sache schlug mir Herr Prof. König vor, über die gemachten Angaben einige Versuche anzustellen, welche ich, in Gemeinschaft mit meinem Assistenten Dr. E. Schleicher, ausgeführt habe und im Folgenden kurz mittheile.

Ich operirte mit Lösungen, welche, gemäss der Angaben von Angerer, auf 1000 Theile Flüssigkeit 1 Theil Sublimat enthielten. Solche Lösungen wurden theils mit destillirtem, theils mit Leitungswasser hergestellt, und sowohl mit — wie ohne Kochsalzzusatz offen, bedeckt oder gut verschlossen, längere Zeit aufbewahrt.

A. Versuche mit Wasser aus der Göttinger städtischen Wasserleitung.

Die Lösungen wurden 38 Tage lang in Glaskolben stehen gelassen: In sämmtlichen Gefässen fand sich alsdann ein weisser, theilweise amorpher, theilweise mikrokrystallinischer Niederschlag. Die Lösungen wurden filtrirt und in je 200 cc das Quecksilber als Hg S bestimmt

a. Versuche ohne Kochsalzzusatz:

Je 0,5 gr. Sublimat waren in 500 cc Leitungswasser gelöst.

1) Gefäß offen: Ausser dem weißen — ein reichlicher schwarzbrauner krystallinischer Niederschlag.

200 cc Lösung, welche anfangs 0,2 gr. $HgCl_2$ enthielten,

gaben 0,0664 gr. Hg S
entspr. 0,0776 gr. $HgCl_2$.

Von 0,2 gr $HgCl_2$ waren also 0,0776 gr in Lösung verblieben, und die ursprünglich 0,1 procentige Lösung enthielt jetzt noch 0,0388 pCt $HgCl_2$.

2) Gefäss mit Filtrierpapier verbunden: Ausser dem weissen ein reichlicher, schwarzbrauner Niederschlag.
200 cc. gaben 0,0694 gr. Hg S
entspr. 0,0811 gr. } $HgCl_2$.
0,0405 % }

3) Gefäss gut verkorkt: weisser aber kein brauner Niederschlag.
200 cc gaben 0,1638 gr. Hg S
entspr. 0,1913 gr. } $HgCl_2$.
0,0957 % }

b. Versuche mit Kochsalzzusatz:
Je 0,5 gr. Sublimat und 0,5 gr. Kochsalz gelöst in 500 cc Leitungswasser.

1) Gefäss offen: Brauner Niederschlag, neben dem weissen, mässig.
200 cc gaben 0,1384 gr Hg S
entspr. 0,1617 gr } $HgCl_2$.
0,0808 % }

2) Gefäss mit Filtrirpapier verbunden: Brauner Niederschlag, neben dem weissen, gering.
200 cc gaben 0,1644 gr Hg S
entspr. 0,1920 gr } $HgCl_2$.
0,0960 % }

3) Gefäss gut verkorkt: Kein brauner Niederschlag.
200 cc gaben 0,1642 gr Hg S
entspr. 0,1918 gr } $HgCl_2$.
0,0959 % }

In diesen beiden letzten Versuchen war also von 0,2 gr Sublimat 0,192 gr in Lösung verblieben, oder 0,008 gr ausgefallen, während ohne Kochsalzzusatz im günstigsten Falle — bei gut verkorktem Gefäss — 0,0087 gr, also nur wenig mehr, ausfiel. Viel größer ist der Unterschied bei offenem oder mit Filtrirpapier verbundenem Gefäß, wo ein conservirender Einfluß des Kochsalzzusatzes sich unverkennbar zeigt.

B. Versuche mit destillirtem Wasser.

0,5 gr Sublimat in 500 cc dest. Wasser.

Befund nach 36tägigem Stehen der Lösungen:

In allen Gefässen theils ein ganz geringer weisser Niederschlag, theils ein zartes Häutchen auf der Oberfläche der Flüssigkeit.

1) Gefäss offen:

200 cc der filtrirten Lösung gaben 0,1798 gr Hg S
entspr. 0,2100 gr } Hg Cl_2.
0,1050 % }

(Das gefundene Plus an Sublimat erklärt sich durch Verdunstung von Wasser in dem offenen Gefäß.)

2) Gefäss mit Filtrirpapier locker verbunden.

200 cc gaben 0,1780 gr Hg S
entspr. 0,2079 gr } Hg Cl_2.
0,1039 % }

3) Gefäss gut verkorkt:

200 cc gaben 0,1718 gr Hg S
entspr. 0,2007 gr } Hg Cl_2.
0,1003 % }

Aus diesen Versuchen ergiebt sich:

1) bei Anwendung von destillirtem Wasser wird, gleichviel ob die Lösungen in offenen, bedeckten oder gut verschlossenen Gefäßen aufbewahrt werden, nach 36 tägigem Stehen sehr annähernd die angewandte Sublimatmenge in der Lösung vorgefunden, obgleich die Lösungen einen minimalen weißen Niederschlag abgesondert haben, welcher vor der Bestimmung des Quecksilbers durch Filtration entfernt wurde. Das Gewicht dieses Niederschlags ist aber verschwindend und liegt innerhalb der Fehlergrenzen der analytischen Bestimmung; dies beweist Versuch 3 bei welchem Wasserverdunstung durch Verkorkung thunlichst vermieden war, und statt 0,2000 gr angewandten Hg Cl_2 0,2007 gr gefunden wurden.

2) bei Anwendung von Göttinger Leitungswasser findet eine merkliche Ausscheidung von Quecksilber statt, welche bei verkorktem Gefäß mit oder ohne Kochsalzzusatz ziemlich gleich groß ausfällt, durch Zusatz der angegebenen Kochsalzmenge aber in sehr beträchtlichem Masse verringert wird, wenn die Lösungen offen oder lose bedeckt sind. In keinem Falle aber wurde eine solche durch den Kochsalzzusatz ganz verhindert.

Das Göttinger Leitungswasser ist durch einen sehr hohen Härtegrad ausgezeichnet. Nach dem mitgetheilten Befunde erschien

es daher nothwendig, Versuche mit noch grösseren Kochsalzzusätzen auszuführen.

Je 0,5 gr Sublimat wurden in je 500 cc Göttinger Leitungswasser aufgelößt und 6 so bereitete Lösungen (Nr. 1—6) mit folgenden Kochsalzzusätzen versehen:

No.		
1.	Kochsalzmenge	0
2.	„	0,5 gr
3.	„	0,75 „
4.	„	1,0 „
5.	„	1,5 „
6.	„	2,0 „

Die Lösungen blieben sodann 47 Tage in einem nach Norden gelegenen Zimmer in Kolben, deren Hälse mit Fließpapier fest — mittelst Drahtligaturen — verschlossen waren, stehen. In sämmtlichen Lösungen waren Niederschläge entstanden, und zwar: in 1 und 2 reichliche, theils dunkel-schwarzbraune Fällungen; in 3, 4 und 5 rein weisse, ziemlich beträchtliche Niederschläge, deren Menge dem Anscheine nach in der angeführten Reihenfolge abnahm; in 6 ebenfalls noch ein beträchtlicher weißer Niederschlag. Die Bestimmung des in Lösung verbliebenen Sublimats wurde nur in No. 6 — bei welcher der Kochsalzzusatz der größte und die Ausscheidung demgemäß am geringsten war — vorgenommen. Dieselbe ergab: 200 cc des filtrirten Wassers lieferten 0,1206 gr HgS entsprechend 0,1409 gr HCl_2. Im ganzen waren daher von den 0,2 gr Sublimat nur 0,1409 gr. in Lösung geblieben. Sonach fällt bei Anwendung von Göttinger Wasser in mit Filtrirpapier verbundenen Gefäßen aus $^1/_{10}$ procentiger Sublimatlösung, selbst bei einem Kochsalzzusatze, der 2 u. 3mal so groß ist als von Angerer empfohlen, noch unlösliches Quecksilbersalz in erheblicher Menge aus. Selbst bei der 4 fachen Kochsalzmenge findet Ausscheidung noch in recht merklichem Maasse statt.

Ganz analoge Versuche stellte ich mit einem notorisch schlechten Brunnenwasser und mit filtrirtem Teichwasser an. Der Erfolg war, wie vorauszusehen, ein bei weitem ungünstigerer, indem, selbst bei Anwendung der 4fachen Kochsalzmenge, in beiden Fällen sehr reichliche Ausscheidung von Niederschlägen stattfand.

Demnach ist es mir nicht gelungen, durch Zusatz von Kochsalzmengen, selbst wenn dieselben 4mal so groß gewählt wurden als Angerer vorschreibt, die Ausscheidung von Quecksilber aus Lösungen von Sublimat in Göttinger Leitungswasser bei gut verbundenen Gefässen zu verhindern. Bei verkorktem Gefäße wirkte die von Angerer empfohlene Kochsalzmenge auf Lösungen in

Göttinger Wasser nur wenig conservirend. Versuche in verkorktem Gefäß mit Göttinger Wasser und größerem Kochsalzzusatz werde ich noch anstellen.

Daß das Kochsalz eine sehr bedeutende conservirende Wirkung auf die Lösungen in offenen oder lose verschlossenen Gefäßen ausübt, ist durch diese Versuche zweifellos bestätigt.

II. Physiologische Wirkung der gechlorten Schwefeläthyle.

Vor einiger Zeit habe ich das symmetrische Zweifach-Chlor-Schwefeläthyl (Thiodiglycolchlorid)

$$S<\begin{matrix}CH_2-CH_2Cl\\CH_2-CH_2Cl\end{matrix}$$

beschrieben und mitgetheilt, daß dasselbe äußerst giftige Wirkungen besitzt. Die Versuche sind seither noch erweitert worden und es hat sich bei Anlaß derselben u. a. herausgestellt, daß die geringsten Spuren dieses ganz indifferent erscheinenden Oels — das mit Wasser nicht mischbar ist und einen nicht starken, süßlichen Geruch besitzt — auch auf der menschlichen Haut sehr bedeutende und langwierige Entzündungen hervorbringen.

Es war damals mitgetheilt, daß Kaninchen nach kurzem Einathmen der Dämpfe des Chlorids regelmäßig an Pneumonie zu Grunde gehen, und weiter, daß bei Aufpinselung einer Spur des Oels auf das Ohr heftige Entzündung der Ohren und Augen und enormes Aufschwellen der Ohren eintrat. Ich habe dem noch hinzuzufügen, daß die Versuchsthiere diesen Eingriff zunächst überstanden, daß aber unter fortwährender profuser Eiterung nach einigen Wochen die Ohren derselben nekrotisch vollständig abfielen.

Nachdem somit das Dichlorschwefeläthyl als ein heftig wirkendes Gift erkannt war, schien es mir von großem Interesse, zu versuchen, wie sich das um ein Chloratom ärmere Chlorid:

$$S<\begin{matrix}CH_2-CH_2Cl\\CH_2-CH_3\end{matrix},$$

das einfach gechlorte Schwefeläthyl, verhalten werde. Diesen Körper, welchen ich vor Kurzen dargestellt habe, hat Herr Dr. Bitter, Assistent am hygienischen Institute des Herrn Professor Flügge, auf meine Veranlassung einer Prüfung unterworfen. Der Körper bildet ein mit Wasser nicht mischbares, nicht unangenehm süßlich riechendes Oel vom Siedepunkte 157°. Herr Dr. Bitter hatte die Güte, mir über die Wirkungsweise des Oels folgende Mittheilungen zu machen:

„Eine kleine Quantität, mit dem Glasstabe auf Kaninchenohren aufgestrichen, macht nach 24 Stunden Entzündung, jedoch nicht so intensiv wie bei Anwendung des Bichlorids. Nach 48 Stunden ist die Entzündung größtentheils zurückgegangen. Abstoßung der Epidermis mit nachfolgender tiefgreifender Entzündung fand nicht statt.

Zwei mittelgrosse Kaninchen wurden in einem größeren, ziemlich dicht schließenden Kasten so befestigt, daß sich ungefähr 3 cm unterhalb der Schnauze ein mit 2 Tropfen des Monochlorids getränktes Stück Fließpapier befand. Mit der Einathmungsluft traten also zugleich die giftigen Dämpfe in die Luftwege ein. Während des Versuches war an den Thieren besonderes nicht zu bemerken. Am Tage nach dem Versuch wurden die Conjunctiven gerötet und leicht entzündet gefunden. Am 2. Tage war die Verklebung der Augenlider vollkommen und bestand starke Eitersecretion von den Conjunctivis. Auch wurde an der Nase geringe Röthung und etwas Ausfluß bemerkt. Am Ende des 4. Tages gingen beide Kaninchen zu Grunde. Die Section ergab starke Lungenentzündung, Rötung und Schwellung der Tracheal- und Bronchialschleimhaut. Die Ohrlöffel waren nicht geschwollen auch sonst war an der Haut der Thiere nichts Abnormes zu bemerken. Es scheint aus diesen Versuchen hervorzugehen, daß der Körper SC_4H_9Cl ähnliche, aber schwächere giftige Wirkungen auf die Versuchsthiere ausübt, als das Bichlorid".

Um nun die Reihe zu vervollständigen, war es wünschenswerth auch die Wirkung der chlorfreien Muttersubstanz dieser Körper, nämlich des Schwefeläthyls selbst, kennen lernen.

Herr Professor Marmé, welcher die Freundlichkeit hatte, hierüber einige Versuche vorzunehmen, macht mir die folgenden Mittheilungen:

„Einem Kaninchen werden auf die Innenseite der äußeren Ohren einige Tropfen Schwefeläthyl gebracht. Es zeigt sich an den Applicationsstellen nur eine ganz oberflächliche, unbedeutende Einwirkung. Ein anderes Thier, dem etwa 5 ccm derselben Flüssigkeit subcutan injicirt werden, schreit während der Injection heftig, beruhigt sich aber bald wieder und zeigt weiterhin keine Vergiftungssymptome".

Sonach ist festgestellt, daß bei den 3 analogen Substanzen:

$S<^{C_2H_5}_{C_2H_5}$	$S<^{C_2H_5}_{C_2H_4Cl}$	$S<^{C_2H_4Cl}_{C_2H_4Cl}$
Schwefeläthyl.	einfach gechlortes Schwefeläthyl.	zweifach gechlortes Schwefeläthyl

die physiologische Wirkung direct und allein von dem Chlorgehalt abhängig ist: Während die chlorfreie Substanz ganz indifferent ist, besitzt die Bichlorverbindung die Eigenschaften eines sehr heftig wirkenden Giftes. Die Monochlorverbindung steht in physiologischer Hinsicht dem Bichloride nahe, aber ihre Wirkungen sind bedeutend weniger intensiv als bei diesem.

Göttingen, Universitätslaboratorium.

Ueber die Sulfurane.

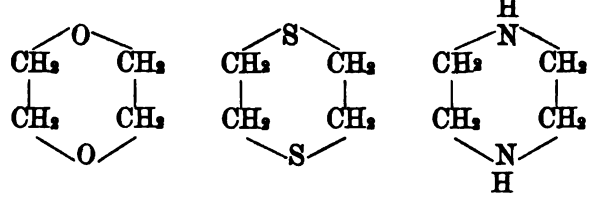
Von

Robert Demuth und **Victor Meyer.**

Das in der letzten Zeit im hiesigen Laboratorium vielfach untersuchte Diäthylendisulfid bildet ein Analogon des Diäthylendiamins und Diäthylenoxyds. Wie die analogen Verbindungen

C_4H_4O	C_4H_4S	$C_4H_4(NH)$
Furfuran	Thiophen	Pyrrol

verdienen auch die drei zuvor genannten Verbindungen, miteinander in Parallele gebracht zu werden, denn ihre Formeln stehen zu einander in ganz der gleichen einfachen Beziehung:



Während die Sauerstoffverbindung von diesem Gesichtspunkte aus einer experimentellen Bearbeitung noch nicht unterworfen worden, hat V. Merz kürzlich die Untersuchung des Diäthylendiamins in dem gleichen Gedanken aufgenommen und für dasselbe, in Rücksicht auf seine Analogie mit dem Piperidin, den Namen Piperazin vorgeschlagen. Die Schwefelverbindung andrerseits ist im hiesigen Laboratorium schon seit mehreren Semestern in der angedeuteten Richtung untersucht worden, und die beiden Abhandlungen von Mansfeld[1]) sowie diejenige des einen von uns[2]) geben Rechenschaft von den erhaltenen Resultaten.

---

1) Berichte der D. Ch. Ges. XIX, 696 und 2658.

2) ibid. XIX, 3259.

Als eines der merkwürdigsten unter diesen erscheint die Bildung eines äußerst beständigen, vollkommen unzersetzt flüchtigen Oeles, welches gebildet wird, wenn man das Jodmethyl-Additionsproduct des Diäthylendisulfids mit verdünnter wäßriger Natronlauge destillirt. Die überraschende Thatsache, daß ein Körper aus der Classe der Sulfinjodüre, welche doch sonst nur durch Silberoxyd, nicht aber durch Alkalien zersetzt werden, in so leichter Weise durch wäßriges Alkali gespalten wird, findet in der folgenden Gleichung Ausdruck:

$$S{<}^{C_2H_4}_{C_2H_4}{>}S{<}^{J}_{CH_3} = HJ + C_5H_{10}S_2.$$

Die Reaction ist eine allgemeine, welche in den homologen Reihen mit derselben Leichtigkeit, wie in der Methylreihe vor sich geht. Aus dem Jodäthyl-Additionsproduct wurde so ein flüchtiges Oel von der Formel $C_6H_{12}S_2$ erhalten, und es bietet sich also eine Serie von homologen Substanzen, die durch die allgemeine Formel

$$C_nH_{2n}S_2$$

ausgedrückt werden. Da diese Körper bezüglich ihrer Constitution zunächst vorläufig noch den verschiedensten Mutmaßungen Raum gaben, sind eingehendere Untersuchungen über dieselben im hiesigen Laboratorium begonnen, und es scheint in Rücksicht auf die Beständigkeit, welche die Verbindungen besitzen, auf die Gleichförmigkeit ihrer Eigenschaften und endlich auf die Notwendigkeit, dieselben in späteren Publicationen kurz bezeichnen zu können, angezeigt, für dieselben einen besonderen Namen einzuführen. Wir schlagen vor, die Verbindungen der Reihe $C_nH_{2n}S_2$ von nun an Sulfurane zu nennen, so zwar, daß die erste, die Verbindung $C_5H_{10}S_2$, als Methylsulfuran, die höheren Homologen als Aethyl-, Propyl- u. s. w. Sulfuran bezeichnet werden. Einer eingehenden Untersuchung haben wir zunächst das

Aethylsulfuran, $C_6H_{12}S_2$

unterzogen, welche bezweckte die Constitution desselben zu ermitteln.

Schon in den ersten Publikationen [1]) ist darauf hingewiesen worden, daß für diesen Körper nach seiner Entstehung a priori zwei Formeln am nächsten liegen, nämlich:

$$S{<}^{\overset{C_2H_5}{|}}_{\ }{}^{C_2H_3}_{C_2H_4}{>}S \quad \text{und} \quad C_2H_4{<}^{S-C_2H_5}_{S-C_2H_3}$$

1) l. c.

während noch einige andere Möglichkeiten discutirt, aber bei der experimentellen Prüfung als wenig wahrscheinlich oder ganz unhaltbar erkannt wurden.

In unserer letzten Publikation theilten wir vergebliche Versuche, die erste dieser beiden Formeln zu prüfen, mit, und wir stellten daher Versuche in Aussicht die zweite Formel auf synthetischem Wege zu verificiren. Ist diese Formel die richtige — man bemerkt, daß sie völlig derjenigen Auffassung entspricht welche Ladenburg über die Constitution des in einer analogen Reaction gebildeten s. g. Dimethylpiperidins vertritt, — so sind die Sulfurane die gemischten Alkylvinyläther des Thioglykols und es wäre:

$$\text{Methylsulfuran} = \begin{array}{l} CH_2-S-CH_3 \\ | \\ CH_2-S-CH=CH_2 \end{array}$$

$$\text{Aethylsulfuran} = \begin{array}{l} CH_2-S-C_2H_5 \\ | \\ CH_2-S-CH=CH_2. \end{array}$$

Um die Richtigkeit dieser Annahme zu controliren, haben wir uns die Aufgabe gestellt, den gemischten Aethylvinyläther des Thioglykols herzustellen und denselben mit dem Aethylsulfuran zu vergleichen. Daß diese Aufgabe eine mühevolle und zeitraubende sein werde, darüber haben wir uns von vorn herein keiner Täuschung hingegeben; trotzdem gelang glücklicherweise ihre Lösung in entscheidender Weise: eine zwar umständliche, aber glatt verlaufende Synthese des vom Aethylenmerkaptan derivirenden Aethylvinyläthers hat dessen völlige Identität mit dem Aethylsulfuran bewiesen.

Der für die Ausführung der Synthese am nächsten liegende Gedanke war der, das Aethylenmerkaptan als Ausgangspunkt zu wählen und successive in dasselbe eine Aethyl- und eine Vinylgruppe einzuführen. Allein dieser Weg erwies sich als unausführbar. Die Einführung nur einer Aethylgruppe in das Merkaptan gelang uns nicht. Als wir, um die folgende Reaction durchzuführen:

$$C_2H_4 < \begin{array}{l} S-Na \\ S-H \end{array} + JC_2H_5 = NaJ + C_2H_4 \begin{array}{l} -S-C_2H_5 \\ -S-H \end{array}$$

Aethylenmerkaptan mit einem Molekül Natriumäthylat und Jodäthyl behandelten, erhielten wir nur — und zwar in unzureichender Menge und Reinheit — den neutralen Aethyläther:

$$C_2H_4 \begin{array}{l} -S-C_2H_5 \\ -S-C_2H_5 \end{array}$$

während ein Theil des Aethylenmerkaptans unangegriffen bleibt. Dieser Umstand zwang uns, zu dem folgenden Wege unsre Zuflucht zu nehmen, welcher allerdings ein so langer ist — er setzt sich aus nicht weniger als 6 auf einander folgenden Reaktionen zusammen —, daß wir wol kaum zum Ziele gelangt wären, wenn nicht glücklicherweise die meisten der benutzten Reacktionen einen äußerst glatten Verlauf nähmen. Nur eine der Umsetzungen — die Chlorirung mittelst Phosphortrichlorid — liefert, ohne Zweifel infolge gleichzeitig gebildeter Phosphor- resp. Phosphorigsäureester, — nur etwa die Hälfte der berechneten Menge des erwarteten Chlorids, aber trotzdem konnte unter Anwedung mäßiger Quantitäten Ausgangsmaterials die Reihe der Reaktionen mit aller Bequemlichkeit zu Ende gebracht, und schließlich die Identificirung des Endproductes mit dem Aethylsulfuran in eingehender Weise durchgeführt werden. Der eingeschlagene Weg ist folgender:

Aethylmerkaptan wird durch Behandlung mit Kali und Glykolchlorhydrin in die Verbindung $C_2H_4\genfrac{}{}{0pt}{}{-S-C_2H_5}{-OH}$ übergeführt, welche dann mit Chlorphosphor den Körper $C_2H_4\genfrac{}{}{0pt}{}{-S-C_2H_5}{-Cl}$ liefert. Dieser wird durch Kaliumsufhydrat in die Verbindung $C_2H_4\genfrac{}{}{0pt}{}{-S-C_2H_5}{-S-H}$ (den Monäthyläther des Aethylenmerkaptans) verwandelt und letzterer durch abermalige Behandlung mit Glykolchlorhydrin in die Verbindung $C_2H_4\genfrac{}{}{0pt}{}{S-C_2H_5}{CH_2-CH_2OH}$ übergeführt. Wird diese letztere mit Chlorphosphor behandelt, so entsteht das Chlorid $C_2H_4\genfrac{}{}{0pt}{}{-S-C_2H_5}{-S-CH_2-CH_2Cl}$, welchem durch alkoholisches Kali ein Molekül Salzsäure entzogen wird, und so endlich resultirt der gesuchte Aethylvinyläther $C_2H_4\genfrac{}{}{0pt}{}{-S-C_2H_5}{-S-CH=CH_2}$. Diese Umsetzungen finden in folgenden Gleichungen ihren Ausdruck:

1) $$C_2H_5SK + C_2H_4\genfrac{}{}{0pt}{}{Cl}{OH} = C_2H_4\genfrac{}{}{0pt}{}{SC_2H_5}{OH} + KCl.$$

2) $$3C_2H_4\genfrac{}{}{0pt}{}{SC_2H_5}{OH} + PCl_3 = 3C_2H_4\genfrac{}{}{0pt}{}{SC_2H_5}{Cl} + H_3PO_3.$$

3) $$C_2H_4\genfrac{}{}{0pt}{}{SC_2H_5}{Cl} + KSH = C_2H_4\genfrac{}{}{0pt}{}{SC_2H_5}{SH} + KCl.$$

4) $$C_2H_4\genfrac{}{}{0pt}{}{SC_2H_5}{SK} + C_2H_4\genfrac{}{}{0pt}{}{Cl}{OH} = C_2H_4\genfrac{}{}{0pt}{}{SC_2H_5}{SC_2H_4OH} + KCl.$$

$$5)\quad 3C_2H_4\begin{matrix}\diagup SC_2H_5\\ \diagdown SC_2H_4OH\end{matrix} + PCl_3 = 3C_2H_4\begin{matrix}\diagup SC_2H_5\\ \diagdown SC_2H_4Cl\end{matrix} + H_3PO_3.$$

$$6)\quad C_2H_4\begin{matrix}\diagup SC_2H_5\\ \diagdown SC_2H_4Cl\end{matrix} + KOH = C_2H_4\begin{matrix}\diagup SC_2H_5\\ \diagdown SC_2H_3\end{matrix} + KCl + H_2O.$$

Die den obigen sechs Gleichungen entsprechenden Operationen, sowie die dabei neu erhaltenen Verbindungen, seien im Folgenden kurz beschrieben.

1) Glykolchlorhydrin und Kaliummerkaptid.

Zu einem Gemische von 40 g. Aethylmerkaptan und einer conc. wässrigen Kalilösung, dargestellt aus 36 g. festem Aetzkali, wurden unter guter Kühlung 52 g. Aethylenchlorhydrin tropfenweise fließen gelassen. Die Umsetzung ist trotz sorgfältiger Kühlung eine stürmische und erfordert zu ihrer Beendigung kein weiteres Erhitzen. Nach dem Erkalten wurde das Reactionsgemisch mit Wässer verdünnt und mit Aether ausgeschüttelt. Die getrocknete aetherische Lösung hinterließ nach dem Eindampfen ein bei 184° (corr.) siedendes farbloses Oel, welches die erwartete Zusammensetzung besaß.
0.1441 g. Oel lieferten nach Carius 0.3170 g. Baryumsulfat = 0.0435 g. = 30.20 pCt. Schwefel.

Gefunden:	Berechnet für $C_2H_4\begin{matrix}\diagup SC_2H_5\\ \diagdown OH\end{matrix}$:
S 30.20 pCt.	30.19 pCt.

2) $C_2H_4\begin{matrix}\diagup SC_2H_5\\ \diagdown OH\end{matrix}$ und Dreifachchlorphosphor.

Die eben beschriebene Hydroxylverbindung (50 g.) wurde unter guter Kühlung allmählig zu 40 g. Phosphortrichlorid hinzugesetzt. Auch diese Reaction ist eine äußerst heftige; reichliche Mengen von phosphoriger Säure scheiden sich aus. Das Reactionsgemisch wurde in Eiswasser gegossen, das als schweres farbloses Oel sich abscheidende Chlorid in ätherischer Lösung mit Soda gewaschen, getrocknet und destillirt.

Es siedet bei 157° (corr.), riecht nicht unangenehm, dem Thiodiglykolchlorid ähnlich, und ergab bei der Analyse:
0.1944 g. lieferten 0.2223 g. Chlorsilber = 0.0550 g. = 28.29% Chlor und 0.3714 g. Baryumsulfat = 0.0510 g. = 26.23% Schwefel.

Gefunden:		Berechnet für $C_2H_4\begin{cases}SC_2H_5\\Cl\end{cases}$:
% Cl:	28.29	28.51
% S :	26.23	25.70.

3) $C_2H_4\begin{cases}SC_2H_5\\Cl\end{cases}$ und alkoh. Kaliumsulfhydrat.

Eine alkoholische Kalilösung (erhalten durch Auflösen von 30 g. Kali in 120 g. Alkohol und Sättigen mit Schwefelwasserstoffgas) wurde mit 30 g. des eben beschriebenen Chlorids, das im gleichen Volumen Alkohol gelöst war, versetzt, und das Gemisch auf dem Wasserbade so lange erhitzt, bis eine abfiltrirte Probe auch bei längerem Erhitzen kein Chlorkalium mehr ausschied. Der Alkohol wurde hierauf abdestillirt und der Rückstand mit Wasser versetzt, die wässrige Lösung mit verdünnter Schwefelsäure schwach angesäuert (weil in Folge des angewandten Ueberschusses an Kaliumsulfhydrat nicht unbeträchtliche Mengen der Kaliumverbindung des Mercaptans entstehen) und nun mit Aether extrahirt. Nach dem Abdestilliren des Aethers hinterblieb ein in Wasser unlösliches Oel von intensivem Mercaptangeruche, welches bei 188° (corr.) siedet und die Zusammensetzung

$$C_2H_4\begin{cases}SC_2H_5\\SH\end{cases}$$ besitzt.

0.1860 g. gaben nach Carius 0.7164 g. Baryumsulfat = 0.0983 g. = 52.85 % Schwefel.

Gefunden:		Berechnet für $C_2H_4\begin{cases}SC_2H_5\\SH\end{cases}$:
% S:	52.85	52.46.

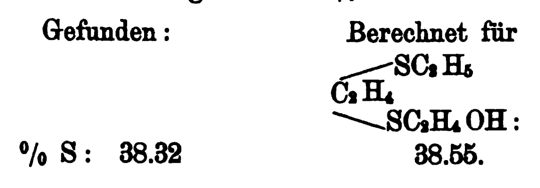
4) $C_2H_4\begin{cases}SC_2H_5\\SK\end{cases}$ und Glykolchlorhydrin.

18 g. des Mercaptans wurden mit einer conc. wässrigen Kalilösung (enthaltend 9 g. Kali) versetzt und zu dem Gemische 12 g. Aethylenchlorhydrin fließen gelassen. Die Reaction beginnt bereits in der Kälte und wurde durch Erwärmen auf dem Wasserbade zu Ende geführt. In reichlicher Menge schied sich hierbei ein Oel aus, welches mittelst Aethers dem Reactionsgemische ent-

zogen und in der aetherischen Lösung über Pottasche getrocknet wurde. Das nach dem Abdestilliren des Aethers zurückbleibende schwere farblose Oel siedet unter geringer Zersetzung bei 278° (uncorr.) und erwies sich als chlorfrei. Die folgende Analyse bestätigt die Zusammensetzung:

$$C_2H_4\begin{matrix}\diagup SC_2H_5 \\ \diagdown SC_2H_4OH.\end{matrix}$$

0.2046 g. des destillirten Oels gaben nach Carius 0.5078 g. Baryumsulfat = 0.0784 g. = 38.32% Schwefel.



Gefunden:	Berechnet für $C_2H_4\begin{matrix}\diagup SC_2H_5 \\ \diagdown SC_2H_4OH\end{matrix}$:
% S: 38.32	38.55.

---

5) $C_2H_4\begin{matrix}\diagup SC_2H_5 \\ \diagdown SC_2H_4OH\end{matrix}$ und Phosphortrichlorid.

Unter guter Kühlung wurden 20 g. der eben beschriebenen Hydroxylverbindung tropfenweise zu 10 g. Phosphortrichlorid hinzugesetzt. Die Umsetzung ist sehr lebhaft; das Reactionsgemisch wurde einige Zeit verkorkt stehen gelassen und von Zeit zu Zeit gut geschüttelt. Hierauf wurde es in Eiswasser gegossen, das als farbloses Oel ausfallende Chlorid in Aether gelöst und mittelst verdünnter Sodalösung gewaschen. Nach dem Abdestilliren des Aethers hinterblieb ein schweres, süßlich riechendes Oel, welches bei der qualitativen Prüfung reichlichen Chlorgehalt ergab und in Eiswasser zu großen spießigen Krystallen erstarrte.

Eine Probe desselben, die durch Fractioniren analysenrein gemacht werden sollte, verwandelte sich bei der Destillation glatt in Diäthylendisulfid (S. P. 205°, F. P. 110°). Das Chlorid zerfällt also in der Hitze, genau der Gleichung:

$$C_2H_4\begin{matrix}\diagup SC_2H_5 \\ \diagdown SC_2H_4Cl\end{matrix} = C_2H_4\begin{matrix}\diagup S \diagdown \\ \diagdown S \diagup\end{matrix}C_2H_4 + C_2H_5Cl.$$

Eine Reinigung des Chlorides durch Destillation war daher unmöglich, und wir begnügten uns, das Rohproduct zu analysiren:

0.2314 g. des rohen nicht destillirten Oels lieferten nach Carius 0.1541 g. Chlorsilber und 0.5558 g. Baryumsulfat.

Gefunden:		Berechnet für $C_2H_4\begin{matrix}\diagup SC_2H_5\\ \diagdown SC_2H_4Cl\end{matrix}$:
% Cl	16.47	19.24
% S	32.97	34.69.

Die Uebereinstimmung ist eine mangelnde, indessen bei der ungenügenden Reinigung war kaum mehr zu erwarten. Da die Reindarstellung des Körpers große Verluste mit sich gebracht hätte, für uns aber kein erhebliches Interesse bot, so begnügten wir uns, das Rohproduct weiter zu verarbeiten.

---

6) $C_2H_4\begin{matrix}\diagup SC_2H_5\\ \diagdown SC_2H_4Cl\end{matrix}$ und alkoholisches Kali.

Um dem Chlorid Salzsäure zu entziehen, wurden gemäß der Gleichung:

$$C_2H_4\begin{matrix}\diagup S-C_2H_5\\ \diagdown S-C_2H_4Cl\end{matrix} + KOH = C_2H_4\begin{matrix}\diagup SC_2H_5\\ \diagdown SC_2H_3\end{matrix} + KCl + H_2O$$

6 g. des Chlorides mit einer conc. Lösung von alkoh. Kali (enthaltend 3.6 g. Kalihydrat) so lange auf dem Wasserbade erhitzt, bis eine abfiltrirte Probe beim Erhitzen kein Chlorkalium mehr ausschied. Hierauf wurde der Alkohol verdampft, der Rückstand mit Wasser verdünnt und nun mit Aether extrahirt. Nachdem das aus der aetherischen Lösung gewonnene Oel mit Wasserdämpfen destillirt worden, ging es beim Fractioniren zwischen 210° und 215° über und glich im Geruche und allen Eigenschaften durchaus dem Aethylsulfuran, mit dem es sich denn auch völlig identisch erwies.

Die Schwefelbestimmung ergab:

0.1120 g. gaben 0.3490 g. Baryumsulfat = 0.479 g. = 42.77% Schwefel.

Gefunden:	Berechnet für $C_2H_4\begin{matrix}\diagup SC_2H_5\\ \diagdown SC_2H_3\end{matrix}$:
% S: 42.77	43.24.

Das Product war also nicht absolut rein, zeigt aber doch sehr annähernd den berechneten Schwefelgehalt.

Der Nachweis der Identität des Aethylsulfurans mit dem Aethylvinylaether wurde geliefert:

1) durch eine vergleichende Siedepunktsbestimmung beider Oele, indem die letzteren unmittelbar nacheinander aus demselben Fractionirkölbchen unter den nämlichen Bedingungen destillirt wurden.

Beide gingen hierbei zum überwiegenden Theile bei 215° (corr.) über;

2) durch die Bestimmung der spec. Gewichte bei 15° bezogen auf Wasser von derselben Temperatur. Dabei ergaben sich folgende Werthe:

Pyknometer leer	= 1.0628 g.,
„ + Wasser	= 1.9898 g.,
„ + Vinylaethylaether	= 2.0030 g.,
„ + Aethylsulfuran	= 2.0084 g.

Die betr. spec. Gewichte berechnen sich demnach zu

1.0142 bezw. 1.0197.

Eine zweite bei 7½° vorgenommene Bestimmung der spec. Gewichte ergab dieselben relativen Werthe

1.0196 bezw. 1.0254.

Das spec. Gew. für das Aethylsulfuran weicht demnach um ein geringes von dem für den Aethylvinylaether bestimmten ab. Da der Aethylvinylaether, wie eben gezeigt, nicht absolut rein war, ist dies nicht überraschend. Die Identität beider Körper mußte also deswegen durch Darstellung und Vergleichung krystallisirter Derivate derselben constatirt werden;

3) durch Vergleichen der Quecksilberchloriddoppelverbindungen.

Letztere wurden für beide Oele in gleicher Weise dargestellt, indem das im gleichen Volumen absoluten Alkohols gelöste Oel mit einer alkoholischen kalt gesättigten Sublimatlösung (1 Mol. Oel : 1 Mol. Quecksilberchlorid) vermischt wurde. Die Doppelverbindungen schieden sich als weiße Niederschläge aus.

Sie erwiesen sich als identisch. Am selben Thermometer gleichzeitig erhitzt, erweichen beide bei 60° und sind bei 70° zu einer farblosen Flüssigkeit geschmolzen. Dies Verhalten ist sehr charakteristisch und verläuft bei beiden Salzen in genau derselben Weise.

Die Analyse zeigte ferner einen gleichen Quecksilber- und Chlorgehalt für beide:

1) 0.1214 g. der Aethylsulfurandoppelverbindung gaben 0.0862 g. Quecksilbersulfid = 0.0749 g. = 61.68% Quecksilber und 0.0770 g. Chlorsilber = 0.0190 g = 15.65% Chlor.

2) 0.0954 g. der Aethylvinylaetherdoppelverbindung gaben 0.0682 g. Quecksilbersulfid = 0.0588 g. = 61.63% Quecksilber und 0.0588 g. Chlorsilber = 0.0149 g. = 15.62% Chlor.

Gefunden:

	beim Aethylsulfuran	beim Aethylvinyläther:
Hg:	61.68	61.63
Cl:	15.65	15.62

Aus diesen Zahlen berechnet sich die Formel der Doppelverbindungen zu

$$2C_2H_4\begin{cases}SC_2H_5\\ SC_2H_3\end{cases} + 2HgCl_2 + Hq_2Cl_2,$$

welche 61.12 pCt. Hg und 16.26 pCt. Cl verlangt.

Diese abnorme Zusammensetzung, die aber bei beiden die gleiche ist, zeigt in besonders deutlicher Weise die Identität. Daß wirklich Quecksilberchlorid und — Chlorür nebeneinander in den Doppelverbindungen vorhanden ist, wurde durch Verreiben derselben mit Kali nachgewiesen; zunächst trat Abscheidung von gelbem Q u e c k s i l b e r o x y d und erst einige Secunden später reichliche Fällung des schwarzen Oxyduls ein.

Characteristischer noch als die eben geschilderten Quecksilberdoppelsalze sind die folgenden: Läßt man, nachdem die beschriebenen Salze abfiltrirt worden sind, die Mutterlauge einige Wochen in verschlossenen Gefäßen stehen, so krystallisiren aus derselben feine glänzende Nadeln, welche bei beiden Präparaten völlig identisches Aussehen besitzen, und, am selben Thermometer gleichzeitig erhitzt, genau bei 138° C. schmelzen. Da diese Salze, im Gegensatz zu den vorher beschriebenen, einen völlig scharfen Schmelzpunkt besitzen, so sind sie zum Identitätsnachweise ganz besonders geeignet. Die Analyse der vereinigten Salze ergab: 0.0924 g. lieferten 0.0646 g. Quecksilbersulfid = 0.0557 g. = 60.28% Quecksilber und 0.0382 g. Chlorsilber = 0.0095 g. = 10.28% Chlor.

Eine einfache Zusammensetzung besitzen dieselben demnach nicht, sie enthalten aber das Quecksilber in Gestalt von HgCl, denn das Atomverhältniß von Hg : Cl ist nach der obigen Analyse = 1 : 0,961.

4) D u r c h V e r g l e i c h e n d e r p i k r i n s a u r e n S a l z e.

Vermischt man die alkoholische Lösung der beiden Sulfide mit kalt gesättigter alkoholischer Pikrinsäurelösung, so krystallisiren feine gelbe Nadeln von durchaus identischem Aussehen. Da dieselben nicht schmelzbar sind, sondern bei hoher Temperatur hef-

tig explodiren, so wurde, um sie zu identificiren, anstatt des Schmelzpunktes für beide die Explosionstemperatur bestimmt und scharf übereinstimmend gefunden. Der Versuch wurde in folgender Weise ausgeführt: Kleine, annähernd gleiche Proben der beiden Substanzen wurden in capillaren Schmelzpunktsröhrchen neben einander in einem Bade aus Wood'schem Metall bei eingesenktem Thermometer langsam erhitzt. Als die Temperatur gegen 340° gestiegen war, erfolgten unmittelbar hintereinander zwei scharfe Detonationen, welche die beiden Röhrchen zertrümmerten. Trotz der geringen Menge der angewandten Substanz war die Explosion so stark, daß das Metall des Bades weit umher geschleudert wurde. Die beiden Pikrate erwiesen sich in allen Eigenschaften durchaus identisch.

Das Aethylsulfuran ist durch diese Untersuchung sicher als Aethylvinyläther des Aethylenmerkaptans characterisirt. Diese Thatsache ist nicht allein für die Beurtheilung der Constitution der Sulfurane, sondern zumal auch für diejenige des Dimethylpiperidins von Interesse; sie ist ein schwerwiegendes Argument zu Gunsten der von Ladenburg aufgestellten Structurformel dieser Base. Hier, wie bei der analogen Schwefelverbindung, findet Oeffnung der geschlossenen Atomkette statt.

Die Untersuchung über die Sulfurane wird weiter fortgeführt.

Göttingen, Universitätslaboratorium.

Ueber das Verhalten des Antimon's, Phosphor's und Arsen's bei Weißglühhitze.

Von

Justus Mensching und **Victor Meyer.**

I. Antimon.

Die Verflüchtigung des Antimon's bei Weißglühhitze geht so schwierig vor sich, daß Versuche, die Dampfdichte dieses Elementes zu bestimmen, wohl noch kaum unternommen worden sind. Kürzlich hat nun der Eine von uns Versuche über die Verflüchtigung des Antimon's bei 1300° C angestellt[1]), welche zu der Hoffnung berechtigten, daß sie bei noch höher gesteigerter Tempera-

1) V. Meyer, Nachrichten 1887. p. 117.

tur zu der Ermittlung des Molekulargewichts führen würden. Wir haben die Untersuchung in dieser Richtung fortgesetzt, und auch auf Phosphor und Arsenik ausgedehnt. Im folgenden ist über unsere Beobachtungen berichtet.

Die Gefäße, mit welchen wir die Versuche ausgeführt haben, sind ähnlich den früher von V. und C. Meyer beschriebenen Porzellanbirnen, unterscheiden sich aber von diesen in zwei Punkten: zunächst sind sie innen und außen glasirt, während die meisten der früher benutzten nur eine Glasur an der Außenseite besaßen; ferner sind sie von doppelt so großem Inhalt und mit bedeutend längerem Stiele versehen. Dieselben bestehen aus einem Cylinder von 200 ccm. Inhalt (früher 100 ccm.) und 150 mm. Höhe, der in einen Stiel von 500 mm. Länge (früher 200 mm.) ausläuft. Die Wandstärke des unteren erweiterten Theils beträgt 2 mm., die lichte Weite des Stiels 6 mm. Die Anwendung längerer Stiele war durch die bedeutende Tiefe des jetzt von uns benutzten Kohlenofens geboten.

Um die in diesen Gefäßen herrschende Temperatur auf luftthermometrischen Wege bestimmen zu können, dienen Compensatorrohre deren Gestalt und Inhalt denen der Stiele des Hauptapparates genau gleich ist, die aber unten geschlossen sind. Die Verbindung mit dem aus Glas gefertigten Gasentbindungsrohr nebst Fallvorrichtung wird mittelst Kautschuckschlauch und Kupferdrahtligaturen hergestellt.

Die Porzellanapparate sind von der Königl. Porzellan-Manufactur in Berlin nach unsern Zeichnungen in ausgezeichneter Qualität hergestellt, und es gereicht uns zum besonderen Vergnügen, dem Direktor der Fabrik, Herrn Dr. Heinecke unsern aufrichtigen Dank für sein freundliches Entgegenkommen auszusprechen.

Die Erhitzung der Gefäße geschieht in dem in diesem Jahrgange der Nachrichten S. 9, näher beschriebenen Schmelzofen des hiesigen chemischen Laboratoriums, welcher mit einer Mischung von Holzkohlen und Coke geheizt wurde. Wie früher mitgetheilt, gab derselbe eine Temperatur von 1325° C. Um dieselbe zu steigern, haben wir den Ofen mit einem kräftig wirkenden Windflügelgebläse in Verbindung gebracht. Dieses Gebläse, aus der Fabrik von C. Schiele in Frankfurt a. M. bezogen, ist mit Schwungrad und Riemen versehen, ruht auf schmiedeeisernem Gestell und ist für Handbetrieb eingerichtet. Es wurde von zwei abwechselnd arbeitenden Männern, nachdem der Ofen einige Zeit geheizt und völlig

mit dem Heizmaterial angefüllt war, ununterbrochen in Thätigkeit gehalten. Der Ventilator besteht aus vier an einer Achse befestigten Flügeln, die von einem Blechgehäuse umgeben sind, welches seinerseits in ein Rohr von 35 mm. lichter Weite ausläuft; dieses ist derartig gebogen, daß die Düse, von unten blasend, dicht unter dem Rost des Ofens mündet. Es liefert, nach den Angaben der Firma, in der Stunde ca. 800 Kubikmeter Luft. Mit dieser Vorrichtung erreichten wir im Innern der Gefäße eine Temperatur von 1437° C. wie die folgende Messung beweist, die mit unserem Pyrometer (Nachrichten 1887, p. 128) ausgeführt ist. Den Hals des Pyrometers haben wir, da er für das Arbeiten in den sehr tiefen Schmelzofen nicht lang genug war, durch die Fabrik von Johnson, Matthey & Co. in London auf die Länge von 550 mm. vergrößern lassen. Das Pyrometer befand sich, wie stets, im Inneren einer daselbst placirten Berliner Porzellanröhre.

A. Stickstoffinhalt des Apparates bei Zimmertemperatur

Zimmertemperatur	14,3° C.
Korrigiertes Stickstoffvolumen feucht gemessen	211,17 ccm.
Temperatur des feucht gemessenen Stickstoffs	15,5° C.
Barometerstand	755 mm.
Stickstoff im Compensator	10,8 ccm.

B. Stickstoffinhalt des Apparates bei der Versuchstemperatur

1. Versuch	a) Korrigiertes Stickstoffvolumen feucht gemessen	40,4 ccm.
	b) Barometerstand	750 mm.
	c) Temperatur des feucht gemessenen Stickstoffs	14,5° C.
	d) Stickstoff im Compensator	5,4 ccm.
2. Versuch	a) :	40,4 ccm.
	b) :	750 mm.
	c) :	14,5° C.
	d) :	5,4 ccm.

Hiernach berechnet sich die Temperatur in Versuch I. und II. zu 1437° C.

Zum Schutze für die Porzellanbirnen wurde durch eine ringförmige Oeffnung des Rostes ein Rohr von 55 mm. lichter Weite aus feuerfestem Thon gestellt, welches von dem Boden des Aschenraumes bis unter den oberen Deckel des Ofens reicht. In dieses Rohr wurde das Dampfdichtebestimmungsgefäß, nachdem die Birne desselben mit einem Platinblech umhüllt war, um ein Anschmelzen an die Thonröhre zu verhindern, gehängt, und zwar so, daß der Boden der Birne sich in der Höhe der heißesten Zone im Ofen, wenige Centimeter über dem Roste befand. Durch diese Vorrichtung wird sowohl eine Verletzung des glühenden Apparates

durch das Nachschütten des Kohlengemisches, als auch eine Schlackenbildung an der Birne vermieden.

Im Uebrigen war die Anordnung des Apparates ganz die frühere, und das Füllen desselben in der Kälte mit reinstem Stickstoff, sowie die Ausführung der Dampfdichtebestimmung selbst geschah genau in der beschriebenen Weise (Nachrichten 1887 S. 7). Nachdem die höchste Temperatur des Ofens erreicht und constant geworden war, ließen wir das ohne Eimerchen abgewogene compacte Stückchen Antimon durch Drehung des Hahns der Fallvorrichtung auf den Boden der Birne gelangen; es erfolgte dann ein langsames aber regelmäßiges Austreten von Gasblasen, welches ca. vier Minuten andauerte. Dieses langsame Verdampfen, sowie die später vorgenommene Untersuchung des Inhalts der Birne, zeigten in unzweideutiger Weise, daß wir noch erheblich unter dem eigentlichen Siedepunkte des Antimons arbeiteten, und daß nur eine reichliche Verdampfung, keineswegs aber eine normale Vergasung des Elementes stattfand.

Die Bestimmungen gaben folgende Werthe.

I. Substanz 0,1454 gr. Volumen 9,7 ccm. Barometer 748 mm. Temperatur 9° C.

II. Substanz 0,0718 gr. Volumen 4,7 ccm. Barometer 752 mm Temperatur 8,5° C.

Gefundene Dichte	I.	II.
	12,31	12,48.

Dagegen berechnet sich für:

Sb_4	Sb_3	Sb_2	Sb_1
16,50	12,37	8,25	4,12.

Aus diesen Ergebnissen geht unzweifelhaft hervor, daß das Molekül des Antimons nicht, wie beim Phosphor und Arsen, aus vier Atomen besteht, da schon bei langsamer und unvollständiger Vergasung die erhaltene Dichte geringer ist, als der Formel Sb_4 entspricht. Daß die von uns gefundene Zahl ziemlich genau dem Werthe Sb_3 entspricht, ist natürlich ein Zufall, denn da die Vergasung eine unvollständige war, so wäre bei weiter gesteigerter Hitze ein kleinerer Werth gefunden worden, und es folgt, daß das Antimon-Molekül eine Formel hat, welche sicher kleiner ist als Sb_3. Ob dieselbe aber Sb_2 oder Sb_1 beträgt, ist eine Frage, über welche kaum eine Vermuthung geäußert werden kann, und welche erst zu entscheiden wäre, wenn es gelänge, das Antimon bei noch höher liegenden Temperaturen in ein normales Gas zu verwandeln. —

Um nach Beendigung des Versuches die Birne vom Antimon zu befreien, wurde sie mit schwefelhaltigem Schwefelantimon ausgespühlt — in dem sich das Metall leicht löste — dann mit Wasser, Alkohol und Aether nachgewaschen und endlich im trocknen Luftstrome gut ausgeglüht.

II. Phosphor und Arsen.

Die Dampfdichtebestimmung des Phosphors wurde im Jahre 1832 von Dumas bei Temperaturen bis zu 500° C. ausgeführt, und zwei Jahre später von E. Mitscherlich bei Rothglühhitze wiederholt. Beide Forscher erhielten für das spec. Gew. des Phosphordampfes Werthe, welche zu der Molekularformel P_4 führen, und ebenso fand Mitscherlich die Dampfdichte des Arsens entsprechend der Formel As_4.

Später haben V. und C. Meyer einige gelegentliche Beobachtungen über die Dichte des Phosphors und Arsens bei hoher Temperatur gemacht, welche zeigten, daß bei starker Glühhitze beide Körper eine geringere Dichte besitzen als den vieratomigen Molekülen entspricht. (Ber. d. d. chem. Ges. XIII, 1116 Anmk. und XIV, 1455). Diese Versuche, welche in keiner Weise zum Abschluß gelangt waren, haben wir wieder aufgenommen und bis zur Weißglühhitze verfolgt, bei welcher die Dissociation eine sehr bedeutende ist.

a) Phosphor.

Für die Versuche mit Phosphor wurde, um das Element bequem abwägen zu können, die rothe Modification gewählt, welche bekanntlich beim Verdampfen in die gewöhnliche übergeht.

Nachdem der Phosphor mittelst Wasser, Alkohol, Schwefelkohlenstoff und Aether gereinigt und im Vacuum über Schwefelsäure getrocknet war, wurde er im Porzellaneimerchen abgewogen. Die Versuche wurden in reinstem Stickgase ausgeführt.

Dichte des Phosphors bei mäßiger Rothglühhitze
(im Perrot'schen Gasofen.)

Substanz 0,0778 g. Volumen 15,2 CC. Barometer 758 mm.
Temperatur 10° C.
Gefundene Dichte 4,16 Berechnet für P_4 4,29.

Dichte des Phosphors bei beginnender Gelbgluth
(im Perrot'schen Gasofen.)

Substanz 0,0634 g. Volumen 13,5 CC. Barometer 765 mm.
Temperatur 14° C.
Gefundene Dichte 3,85.

Dichte des Phosphors bei heller Gelbgluth
(im Perrot'schen Gasofen.)

I. Substanz 0,0696 g. Volumen 15,4 CC. Barometer 765 mm.
Temperatur 15° C.
Gefunden 3,72.

II. Substanz 0,0640 g. Volumen 14,4 CC. Barometer 759 mm.
Temperatur 16° C.
Gefunden 3,71.

Bei den zwei letzten Versuchen betrug die Temperatur ca. 1225° C., über die Messung derselben vergleiche man Nachrichten, Jahrgang 1887, S. 139.

Dichte des Phosphors bei Weißglühhitze (1437° C.)
im Kohlenschmelzofen mit Gebläse.

Substanz 0,0424 g. Volumen 11,6 CC. Barometer 739 mm.
Temperatur 9° C.
Gefundene Dichte 3,03.

b) Arsen.

Das metallische Arsen erhielten wir in glänzenden, compacten Stücken aus dem hiesigen mineralogischen Institut durch die Güte des Herrn Professor Dr. C. Klein; wir mußten es aber vor dem Gebrauche noch einer Reinigung unterwerfen, da wir in demselben 2,6 pCt. Asche fanden. Zur Reinigung haben wir es in einer horizontalen Verbrennungsröhre im Kohlensäurestrome sublimirt. Das Arsen setzte sich dann in derben krystallinischen Krusten an den kälteren Theilen des Rohrs an, welche sich leicht durch Absprengen des Glases herausnehmen ließen. Die so erhaltenen absolut reinen Krystalle wurden im Porzellaneimerchen abgewogen und letzteres mit einem Asbestpropfen lose verschlossen; eine Maßregel, welche sich hier unumgänglich nothwendig erwies. Auch die Versuche mit Arsen wurden in reinstem Stickstoff, mit welchem die Porzellanbirnen in der Kälte gefüllt wurden, ausgeführt.

Dichte des Arsens bei Rothglühhitze
(im Perrot'schen Gasofen bei kleiner Flamme).

I. Substanz 0,1330 g. Volumen 10,7 CC. Barometer 752 mm.
Temperatur 16° C.

II. Substanz 0,102 g. Volumen 8,2 CC. Barometer 752 mm.
Temperatur 14° C.

III. Substanz 0,1102 g. Volumen 9,2 CC. Barometer 749 mm.
Temperatur 20° C.

Gefundene Dichte: 10,47, 10,38, 10,33 — Berechnet für As_4 10,36.

Dichte des Arsens bei beginnender Gelbgluth
(im Perrot'schen Ofen).

Substanz 0,0842 g. Volumen 7,4 CC. Barometer 752 mm.
Temperatur 18° C.

Gefundene Dichte 9,67.

Dichte des Arsens bei heller Gelbgluth
(im Perrot'schen Ofen).

I. Substanz 0,1136 g. Volumen 10 CC. Barometer 759 mm.
Temperatur 12° C.

Gefunden 9,31.

II. Substanz 0,0790 g. Volumen 7,3 CC. Barometer 751 mm.
Temperatur 19° C.

Gefunden 9,27.

Dichte des Arsens bei ca. 1325° C.
(Schmelzofen ohne Gebläse, Temperaturbestimmung s. Nachrichten 1887. S. 139).

Substanz 0,0786 g. Volumen 8,4 CC. Barometer 755 mm.
Temperatur 9° C.

Gefunden 7,61.

Dichte des Arsens bei Weißgluth (1437° C.)
(im Schmelzofen mit Gebläse).

Substanz 0,0792 g. Volumen 9,9 CC. Barometer 752 mm.
Temperatur 9° C.

Gefundene Dichte 6,53.

Demnach erleiden die Moleküle des Phosphors und Arsens bei Weißglühhitze eine sehr beträchtliche Dissociation. Die Dichte des Phosphors sinkt von 4,29 auf 3,03, die des Arsens von 10,36 auf 6,53, ohne daß eine Constanz bis jetzt erreicht wurde. Muthmaßlich würden die Dichten bei noch höher gesteigerter Temperatur die Werthe P_2 und As_2 erreichen, doch war es uns leider zur Zeit noch nicht möglich, die Versuche bei noch höherer Temperatur auszuführen. Die Porzellangefäße erleiden übrigens bei der höchsten Temperatur, die wir anwandten, noch keine Veränderung, und ihre Beschaffenheit wird eine weitere Steigerung der Temperatur nicht ausschließen.

Noch sei erwähnt, daß Wismuth bei der Temperatur unseres Ofens sehr merklich verdampft, jedoch bedeutend langsamer als das Antimon. Versuche seine Dampfdichte zu bestimmen, wurden daher nicht unternommen.

Mit Auripigment und Rhealgar haben wir, wie schon früher der Eine von uns, eine große Anzahl Dampfdichtebestimmungen versucht. Dieselben ergaben aber niemals übereinstimmende Resultate und bei relativ kleiner Veränderung der Temperatur änderten sich die Dichten in beträchtlichem Maße. Ohne Zweifel erleiden diese Sulfide beim Verdampfen Dissociation unter Bildung sowohl der freien Elemente wie wechselnder Mengen verschiedener Schwefelarsenverbindungen. Da aber sowohl diese, wie auch der in Dissociation begriffene Arsendampf, ihre Zusammensetzung mit der Temperatur ändern, so ist es begreiflich, daß einfache und übereinstimmende Resultate mit den Arsensulfiden nicht erhalten werden können.

Göttingen, Universitätslaboratorium.

Ueber die Convergenz einer aus Primzahlpotenzen gebildeten unendlichen Reihe.

Von

F. Mertens, Corresp.

Bezeichnet a eine reelle Zahl, so ist die Reihe

$$1+\frac{1}{2^{1+ia}}+\frac{1}{3^{1+ia}}+\frac{1}{4^{1+ia}}+\dots+\frac{1}{n^{1+ia}}+\dots,$$

deren einzelne Glieder den ganzen Zahlen entsprechen, für keinen Werth von a, die Reihe

$$\frac{1}{2^{1+ia}}+\frac{1}{3^{1+ia}}+\frac{1}{5^{1+ia}}+\dots+\frac{1}{p^{1+ia}}+\dots \tag{1}$$

hingegen, deren einzelne Glieder den Primzahlen entsprechen, für unendlich viele Werthe von a convergent.

Zum Beweise dieses Satzes mache ich von folgenden Bezeichnungen Gebrauch

$$1+\frac{1}{2^{1+ia}}+\frac{1}{3^{1+ia}}+\dots+\frac{1}{n^{1+ia}}=S(n),$$

$$\frac{l2}{2^{1+ia}}+\frac{l3}{3^{1+ia}}+\dots+\frac{ln}{n^{1+ia}}=T(n),$$

$$\sum_p^n\frac{lp}{p^{1+ia}}=\varphi(n),\quad \sum_p^n\frac{1}{p^{1+ia}}=\psi(n),$$

beide Summationen beziehen sich hierbei auf alle, die Zahl n nicht übersteigenden Primzahlen p,

$$1+\frac{1}{ia}-\frac{1+ia}{1\,.\,2}\sum_2^\infty{}_k\frac{1}{k^{2+ia}}-\frac{(1+ia)\,(2+ia)}{1\,.\,2\,.\,3}\sum_2^\infty{}_k\frac{1}{k^{3+ia}}-\ldots=\omega(a).$$

Nach dem binomischen Satze ist für $k>1$

$$\frac{1}{(k-1)^{ia}}-\frac{1}{k^{ia}}=\frac{ia}{k^{1+ia}}+\frac{ia\,(1+ia)}{1\,.\,2}\,\frac{1}{k^{2+ia}}+\ldots$$

Setzt man hierin $k=2,3,\ldots n$ und addirt, so ergiebt sich

$$1-\frac{1}{n^{ia}}=ia\,(S(n)-1)+\frac{ia\,(1+ia)}{1\,.\,2}\sum_2^n{}_k\frac{1}{k^{2+ia}}+\ldots$$

und demzufolge

$$(2)\quad S(n)+\frac{1}{ian^{ia}}=\omega(a)+\frac{1+ia}{1\,.\,2}\sum_{n+1}^\infty{}_k\frac{1}{k^{2+ia}}+\frac{(1+ia)(2+ia)}{1\,.\,2\,.\,3}\sum_{n+1}^\infty{}_k\frac{1}{k^{3+ia}}+\ldots$$

Hieraus folgt

$$\left|S(n)+\frac{1}{ian^{ia}}-\omega(a)\right|<\frac{\sqrt{1+a^2}}{1\,.\,2}\sum_{n+1}^\infty{}_k\frac{1}{k^2}+\frac{\sqrt{1+a^2}\sqrt{4+a^2}}{1\,.\,2\,.\,3}\sum_{n+1}^\infty{}_k\frac{1}{k^3}+\ldots,$$

$$<\tfrac{1}{2}A\left[\sum_{n+1}^\infty{}_k\frac{1}{k^2}+\sum_{n+1}^\infty{}_k\frac{1}{k^3}+\ldots\right],$$

$$<\tfrac{1}{2}A\left[\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots\right],$$

$$<\frac{A}{2n},$$

wo

$$A=\sqrt{\left(1+\frac{a^2}{1^2}\right)\left(1+\frac{a^2}{2^2}\right)\left(1+\frac{a^2}{3^2}\right)\ldots}$$

Es strebt daher nicht $S(n)$, sondern $S(n)+\frac{1}{ian^{ia}}$ mit wachsendem n einer bestimmten Grenze zu.

Differentiirt man auf beiden Seiten der Gleichung (2) in Bezug auf a, so läßt sich auf dieselbe Weise schließen, daß der Ausdruck

$$T(n)-\frac{1}{a^2n^{ia}}+\frac{ln}{ian^{ia}}$$

einer bestimmten Grenze zustrebt, wenn n unendlich groß wird, und daß daher eine Größe B angegeben werden kann, welche den Werth des Ausdruckes

$$\left| T(n) + \frac{ln}{ian^{ia}} \right|$$

für alle Werthe von n übersteigt.

Nach der Herleitung dieser Hülfssätze gehe ich zu dem Beweise des ausgesprochenen Satzes über.

Die Größe $T(n)$ läßt sich identisch in die Form

$$T(n) = \sum_p^n \frac{lp}{p^{1+ia}} \cdot S(n_p)$$

setzen, wobei die Summation sich auf alle die Zahl n nicht übersteigenden Primzahlen p erstreckt und n_p die größte in $\frac{n}{p}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet. Es besteht daher die Gleichung

$$\begin{aligned}\omega(a)\,\varphi(n) = T(n) + \frac{ln}{ian^{ia}} + \frac{1}{ian^{ia}}\left(\sum_p^n \frac{lp}{p} - ln\right) - \\ - \sum_p^n \frac{lp}{p^{1+ia}}\left(S(n_p) + \frac{1}{ian_p^{ia}} - \omega(a)\right) + \\ + \sum_p^n \frac{lp}{p^{1+ia}} \cdot \frac{1}{ia}\left(\frac{1}{n_p^{ia}} - \frac{p^{ia}}{n^{ia}}\right).\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich

$$\begin{aligned}\left|\omega(a)\,\varphi(n)\right| \gtreqless \left| T(n) + \frac{ln}{ian^{ia}} \right| + \left| \frac{1}{ia}\left(\sum_p^n \frac{lp}{p} - ln\right) \right| + \\ + \sum_p^n \frac{lp}{p}\left| S(n_p) + \frac{1}{ian_p^{ia}} - \omega(a) \right| + \sum_p^n \frac{lp}{p}\left| \frac{1}{ia}\left(\frac{1}{n_p^{ia}} - \frac{p^{ia}}{n^{ia}}\right)\right|.\end{aligned}$$

Es ist aber, wenn $n = pn_p + q$ gesetzt wird, den beiden Hülfssätzen zufolge

$$\left| T(n) + \frac{ln}{ian^{ia}} \right| < B, \quad \left| S(n_p) + \frac{1}{ian^{ia}} - \omega(a) \right| < \frac{A}{2n_p} < \frac{Ap}{n}$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{ia}\left(\frac{1}{n_p^{ia}} - \frac{p^{ia}}{n^{ia}}\right)\right| = \left|\frac{1}{ia}\left(\frac{1}{(n-q)^{ia}} - \frac{1}{n^{ia}}\right)\right| = \left|\frac{q}{n^{1+ia}} + \frac{(1+ia)}{1\,.\,2}\,\frac{q^2}{n^{2+ia}} + \dots\right| \\ < A\left(\frac{q}{n} + \frac{q^2}{n^2} + \frac{q^3}{n^3} + \dots\right) < \frac{Aq}{n-q} < \frac{2Ap}{n}.\end{aligned}$$

Man hat demnach

$$\left| \omega(a)\,\varphi(n) \right| < B + \left| \frac{1}{a}\left(\sum_p^n \frac{lp}{p} - ln\right) \right| + \frac{3A}{n} \sum_p^n lp,$$

und da (vergl. Crelle-Borchardt'sches Journal Bd. 78, Seite 48, 49)

$$\sum_p^n lp < 2n, \qquad \sum_p^n \frac{lp}{p} - ln < 2,$$

so wird, a positiv angenommen,

$$\left| \omega(a)\,\varphi(n) \right| < B + 6A + \frac{2}{a}.$$

Wenn daher $\omega(a)$ nicht gleich 0 ist, so kann man auch für $|\varphi(n)|$ eine Grenze G angeben, welche dieser Ausdruck für keinen Werth von n übersteigen kann.

Hieraus folgt die Convergenz der Reihe (1).

Denn, setzt man die Reihe, deren Summe $\psi(n)$ ist, beliebig weit über ihr letztes Glied fort, etwa bis zu der letzten Primzahl, welche unter der angenommenen Grenze m liegt, so ändert sich $\psi(n)$ um

$$\frac{\varphi(n+1)-\varphi(n)}{l(n+1)} + \frac{\varphi(n+2)-\varphi(n+1)}{l(n+2)} + \dots + \frac{\varphi(m)-\varphi(m-1)}{lm}$$

$$= -\frac{\varphi(n)}{l(n+1)} + \varphi(n+1)\left(\frac{1}{l(n+1)} - \frac{1}{l(n+2)}\right) +$$

$$+ \varphi(n+2)\left(\frac{1}{l(n+2)} - \frac{1}{l(n+3)}\right) + \dots + \frac{\varphi(m)}{lm}$$

und der absolute Betrag dieser Aenderung ist kleiner als

$$\frac{G}{l(n+1)} + G\left(\frac{1}{l(n+1)} - \frac{1}{l(n+2)}\right) + G\left(\frac{1}{l(n+2)} - \frac{1}{l(n+3)}\right) + \dots +$$

$$+ \frac{G}{lm} < \frac{2G}{l(n+1)}.$$

Es ist daher stets möglich, die ganze Zahl n so groß zu wählen, daß der absolute Betrag der Aenderung, welche $\psi(n)$ durch fernere Vergrößerung der Zahl n erfährt, eine Größe von vorgeschriebener Kleinheit nicht mehr überschreitet.

Die Reihe (1) convergirt somit für alle von Null verschiedenen Werthe von a, für welche $\omega(a)$ nicht gleich Null ist.

Die Function $\omega(a)$ ist die nach Riemann (Gesammelte Werke, Seite 136) mit $\zeta(1+ia)$ zu bezeichnende Function, wenn $\zeta(s)$ die für alle Werthe von s, deren reeller Theil größer als 1 ist, mit der Reihe

$$1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots$$

zusammenfallende Function bezeichnet.

Ueber ein dreifaches Integral, welches das Potential eines homogenen Ellipsoids als speciellen Fall enthält.

Von

F. Mertens, Corresp.

Es seien μ, ν positive Zahlen,

$$\psi = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy$$

eine beständig positive quadratische Form und

$$\varphi = b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + 2b_{23}yz + 2b_{31}zx + 2b_{12}xy$$
$$+ 2b_{14}x + 2b_{24}y + 2b_{34}z + b_{44}$$

eine quaternäre quadratische Form (die vierte Veränderliche ist $= 1$ gesetzt worden), welche bei reellen Werthen der Veränderlichen keine negativen Werthe annehmen kann und deren x, y, z im zweiten Grade und homogen enthaltender Bestandtheil

$$\chi = b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + 2b_{23}yz + 2b_{31}zx + 2b_{12}xy$$

eine beständig positive ternäre quadratische Form bildet. Geht man von dem über alle positiven Werthe von t und alle möglichen Werthe von x, y, z, welche der Bedingung

$$\psi + t\varphi \leqq 1 \tag{1}$$

genügen, zu erstreckenden vierfachen Integrale

$$J = \int (1-\psi-t\varphi)^{\mu-1}\, t^{\nu-1}\, dt\, dx\, dy\, dz$$

aus, so ergiebt sich, indem man die Integration nach t voran nimmt und behufs Ausführung derselben

$$t = \frac{1-\psi}{\varphi} \cdot s$$

setzt,

$$(2) \qquad J = \iiint \frac{(1-\phi)^{\mu+\nu-1}}{\varphi^{\nu}} dx\, dy\, dz \cdot \int_0^1 (1-s)^{\mu-1} s^{\nu-1} ds$$

$$= \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)} \iiint \frac{(1-\psi)^{\mu+\nu-1}}{\varphi^{\nu}} dx\, dy\, dz$$

mit der Grenzbedingung

$$\psi \leqq 1$$

für x, y, z.

Man kann aber auch zuerst nach x, y, z integriren. Zu diesem Ende bestimme man — was immer möglich ist — α, β, γ so, daß identisch

$$1-\phi-t\varphi = L-\phi\,(x-\alpha,\, y-\beta,\, z-\gamma) - t\chi\,(x-\alpha,\, y-\beta,\, z-\gamma)$$

wird, wo L von x, y, z unabhängig sein soll. Man hat dann, wenn Δ, F die Discriminante und adjungirte Form der quadratischen Form $\phi + t\chi$ bezeichnen,

$$L = 1 + t^2 \frac{F(b_{14}, b_{24}, b_{34})}{\Delta} - b_{44}\, t.$$

Führt man durch die Formeln

$$x = \alpha + \sqrt{L} \cdot X$$
$$y = \beta + \sqrt{L} \cdot Y$$
$$z = \gamma + \sqrt{L} \cdot Z$$

statt x, y, z neue Veränderliche X, Y, Z ein, so wird

$$(3) \quad J = \int t^{\nu-1} L^{\mu+\frac{1}{2}} dt \iiint (1-\psi\,(X, Y, Z) - t\chi\,(X, Y, Z))^{\mu-1} dX\, dY\, dZ$$

und die Grenzbedingung (1) zerfällt in

$$L \geqq 0$$

$$\psi\,(X, Y, Z) + t\chi\,(X, Y, Z) \leqq 1.$$

Die Bestimmung des Integrals

$$Q = \iiint (1-\phi(X, Y, Z) - t\chi\,(X, Y, Z))^{\mu-1} dX\, dY\, dZ$$

gelingt mit Hülfe von Polarcoordinaten. Es sei

$$X = r\sin\vartheta\cos\psi \quad Y = r\sin\vartheta\sin\psi \quad Z = r\cos\vartheta$$

$$\phi\,(\sin\vartheta\cos\psi,\ \sin\vartheta\sin\psi,\ \cos\vartheta) = \phi_0$$

$$\chi\,(\sin\vartheta\cos\psi,\ \sin\vartheta\sin\psi,\ \cos\vartheta) = \chi_0;$$

es wird dann

$$Q = \iiint (1-r^2\,\psi_0 - r_2^2 t\chi_0)^{\mu-1}\, r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\psi$$

mit der Grenzbedingung

$$r^2 \leqq \frac{1}{\phi_0 + t\chi_0}.$$

Setzt man noch

$$r = \sqrt{\frac{u}{\psi_0 + t\chi_0}},$$

so wird

$$Q = \tfrac{1}{2}\int\int \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\phi}{(\phi_0 + t\chi_0)^{\frac{3}{2}}} \int_0^1 (1-u)^{\mu-1} u^{\frac{3}{2}-1}\, du$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\,\Gamma(\mu)}{2\Gamma(\frac{3}{2}+\mu)} \int\int \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\phi}{(\phi_0 + t\chi_0)^{\frac{3}{2}}}$$

und da das von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \pi$ und von $\phi = 0$ bis $\psi = 2\pi$ zu erstreckende Integral

$$\int\int \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\phi}{(\psi_0 + t\chi_0)^{\frac{3}{2}}}$$

leicht $= \dfrac{4\pi}{\sqrt{\Delta}}$ gefunden wird, so hat man

$$Q = \frac{\pi\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu)}{\Gamma(\frac{3}{2}+\mu)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\Delta}}.$$

Wird dieser Werth von Q in (3) eingesetzt, so ergiebt sich

$$J = \frac{\pi\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu)}{\Gamma(\frac{3}{2}+\mu)} \int \frac{t^{\nu-1} L^{\mu+\frac{1}{2}}\, dt}{\sqrt{\Delta}}$$

und man schließt aus (2)

$$\int\int\int \frac{(1-\phi)^{\mu+\nu-1}}{\varphi^{\nu}}\, dx\, dy\, dz = \frac{\pi\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu+\nu)}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\frac{3}{2}+\mu)} \int \frac{t^{\nu-1} L^{\mu+\frac{1}{2}}\, dt}{\sqrt{\Delta}},$$

wo der Spielraum für die Integrationen beziehungsweise durch die Bedingungen

$$\phi \leqq 1 \qquad L \geqq 0 \qquad t \geqq 0$$

gegeben wird.

Nimmt man

$$\mu = 1-\nu$$
$$\varphi = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$

an, so ergiebt sich der bekannte Ausdruck für das Potential eines homogenen Ellipsoids.

Ueber die durch eine Gleichung von der Form $\mathfrak{X} + \mathfrak{Y} + \mathfrak{Z} = 0$ darstellbaren Minimalflächen.

Von

J. Weingarten, Corresp.

In den „Fortgesetzten Untersuchungen über specielle Minimalflächen“ (Monatsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1872, S. 3—27) ist Herr H. A. Schwarz auf eine Familie von Minimalflächen geführt worden, deren einzelne Individuen durch eine Gleichung von der Form

$$\mathfrak{X} + \mathfrak{Y} + \mathfrak{Z} = 0 \tag{1}$$

bestimmt werden können. Hierbei bezeichnen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ drei Functionen der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z eines Punktes der betrachteten Fläche, von denen die erste nur von der Variablen x, die zweite nur von y, die dritte nur von z abhängt. Diesen Untersuchungen kann die Bemerkung hinzugefügt werden, daß die von Herrn Schwarz aufgefundene Flächenfamilie zugleich die allgemeinste Familie von Minimalflächen darstellt, deren Gleichung im angegebenen Sinne auf die Form (1) gebracht werden kann, eine Bemerkung welche einer im Gespräch von Herrn Schwarz mir gegebenen Anregung ihre Entstehung verdankt.

Damit eine durch die Gleichung (1) bestimmte Fläche eine Minimalfläche sei, ist erforderlich, daß die Gleichung

$$\left[\left(\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)^2\right]\frac{d^2\mathfrak{X}}{dx^2} + \left[\left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)^2 + \left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}\right)^2\right]\frac{d^2\mathfrak{Y}}{dy^2} + \left[\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}\right)^2\right]\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dz^2} = 0 \tag{2}$$

mit der Gleichung (1) zugleich bestehe.

Durch Einführung der Bezeichnungen

$$\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}\right)^2 = \xi, \quad \left(\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}\right)^2 = \eta, \quad \left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)^2 = \zeta,$$

denen zufolge

$$\frac{d^2\mathfrak{X}}{dx^2} = \tfrac{1}{2}\frac{d\xi}{d\mathfrak{X}}, \quad \frac{d^2\mathfrak{Y}}{dy^2} = \tfrac{1}{2}\frac{d\eta}{d\mathfrak{Y}}, \quad \frac{d^2\mathfrak{Z}}{dz^2} = \tfrac{1}{2}\frac{d\zeta}{d\mathfrak{Z}}$$

ist, geht die Gleichung (2) in die folgende über:

$$S = (\eta+\zeta)\frac{d\xi}{d\mathfrak{X}} + (\zeta+\xi)\frac{d\eta}{d\mathfrak{Y}} + (\xi+\eta)\frac{d\zeta}{d\mathfrak{Z}} = 0. \tag{3}$$

Die Größen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ sollen nunmehr als die unabhängigen Variablen betrachtet und die in Bezug auf dieselben genommenen Ableitungen der Größen ξ, η, ζ in üblicher Weise durch angefügte Accente bezeichnet werden.

Wenn eine Function T der Größen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ für alle Werthe dieser Größen, welche der Bedingung $\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}+\mathfrak{Z} = 0$ genügen, den Werth Null annehmen soll, so erfordern die unter diesen Umständen für alle in Betracht kommenden Werthe von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $d\mathfrak{X}$, $d\mathfrak{Y}$, $d\mathfrak{Z}$ bestehenden Gleichungen

$$\begin{aligned} T_1\, d\mathfrak{X} + T_2\, d\mathfrak{Y} + T_3\, d\mathfrak{Z} &= 0, \\ d\mathfrak{X} + \quad d\mathfrak{Y} + \quad d\mathfrak{Z} &= 0, \end{aligned}$$

in denen T_1, T_2, T_3 die drei partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{X}}, \quad \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{Y}}, \quad \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{Z}}$$

der Function T bezeichnen, das Bestehen der Gleichungen

$$T_1 = T_2 = T_3.$$

Durch Anwendung dieser Bemerkung auf die Function

$$S = (\eta+\zeta)\xi' + (\zeta+\xi)\eta' + (\xi+\eta)\zeta'$$

gelangt man zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} U &= S_2 - S_3 = \eta''(\zeta+\xi) - \zeta''(\xi+\eta) + \xi'(\eta'-\zeta') = 0, \\ V &= S_3 - S_1 = \zeta''(\xi+\eta) - \xi''(\eta+\zeta) + \eta'(\zeta'-\xi') = 0, \\ W &= S_1 - S_2 = \xi''(\eta+\zeta) - \eta''(\zeta+\xi) + \zeta'(\xi'-\eta') = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

von denen jede eine Folge der beiden anderen ist.

Durch Auflösung in Bezug auf die Größen $\eta+\zeta$, $\zeta+\xi$, $\xi+\eta$ ergeben sich aus diesen Gleichungen und der Gleichung (3) drei Gleichungen von der Form

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
\lambda(\eta+\zeta)\xi' &= \eta''(\zeta'-\xi')-\zeta''(\xi'-\eta'),\\
\lambda(\zeta+\xi)\eta' &= \zeta''(\xi'-\eta')-\xi''(\eta'-\zeta'),\\
\lambda(\xi+\eta)\zeta' &= \xi''(\eta'-\zeta')-\eta''(\zeta'-\xi'),
\end{aligned}
$$

und zwar bezeichnet hierbei, mit Ausnahme des Falles, in welchem die drei auf den rechten Seiten dieser Gleichungen stehenden Ausdrücke identisch gleich Null sind, die Größe λ eine von Null verschiedene Größe.

Das Bestehen der Gleichungen (4) und der Gleichung (1) erfordert in Folge der vorhin angewendeten Schlußweise das Bestehen der Bedingungen

$$V_2-V_1=W_1-W_3=0,\quad W_3-W_2=U_2-U_1=0,\quad U_1-U_3=V_3-V_2=0,$$

d. h. der Gleichungen

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
\xi'''(\eta+\zeta)+\eta''(\zeta'-\xi')-\zeta''(\xi'-\eta') &= 0,\\
\eta'''(\zeta+\xi)+\zeta''(\xi'-\eta')-\xi''(\eta'-\zeta') &= 0,\\
\zeta'''(\xi+\eta)+\xi''(\eta'-\zeta')-\eta''(\zeta'-\xi') &= 0,
\end{aligned}
$$

aus welchen sich im Hinblick auf die Gleichungen (5), auch für den hervorgehobenen besonderen Fall, die Gleichheit der Verhältnisse

$$\frac{\xi'''}{\xi'}=\frac{\eta'''}{\eta'}=\frac{\zeta'''}{\zeta'}$$

und damit die Constanz jedes derselben ergiebt. Bezeichnet daher α^2 eine reelle Constante, so bestehen für die drei Functionen ξ, η, ζ die Differentialgleichungen

$$(7)\qquad \xi'''=\alpha^2\xi',\quad \eta'''=\alpha^2\eta',\quad \zeta'''=\alpha^2\zeta',$$

aus deren Integration die Gleichungen

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
x &= \int\frac{d\mathfrak{x}}{\sqrt{a_1+b_1e^{\alpha\mathfrak{x}}+c_1e^{-\alpha\mathfrak{x}}}},\\
y &= \int\frac{d\mathfrak{y}}{\sqrt{a_2+b_2e^{\alpha\mathfrak{y}}+c_2e^{-\alpha\mathfrak{y}}}},\\
z &= \int\frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{a_3+b_3e^{\alpha\mathfrak{z}}+c_3e^{-\alpha\mathfrak{z}}}}
\end{aligned}
$$

hervorgehen.

Diese Gleichungen drücken, wenn die neun Constanten

$$a_i,\ b_i,\ c_i\ (i=1,2,3)$$

noch den vier Beziehungen

$$(9) \quad \begin{cases} c_1(a_2+a_3) = 2b_2b_3, \quad c_2(a_3+a_1) = 2b_3b_1, \quad c_3(a_1+a_2) = 2b_1b_2, \\ b_1b_2b_3 = c_1c_2c_3 \end{cases}$$

unterworfen werden, nothwendige und auch hinreichende Bedingungen dafür aus, daß die Gleichung (1) eine Minimalfläche darstelle.

Durch eine einfache Transformation können die Gleichungen (8) in die von Herrn Schwarz am angeführten Orte mitgetheilten Gleichungen übergeführt werden. Der besondere Fall, in welchem die Constante α den Werth Null annimmt, läßt sich entweder durch einen besonderen Grenzübergang als Grenzfall des allgemeinen Falles, oder, was etwas einfacher ist, direkt erledigen.

Zweiter Nachtrag zu der Abhandlung über die Einlegung und Verzierung von Werken aus Bronze mit Silber und anderen Materialen in der Griechischen und Römischen Kunst.

(s. Nachrichten 1886, Nr. 1, S. 29 fg.).

Von **Friedrich Wieseler.**

Dem Nachtrag zu der oben erwähnten Abhandlung, welcher in den Nachrichten 1886, Nr. 15, S. 481 fg. veröffentlicht ist, will ich nicht verfehlen einen zweiten anzureihen, da seitdem noch einige einschlägige Beispiele zuerst oder schon berührte genauer zu meiner Kunde gekommen sind.

Zu Nachr. 1886, S. 30, Anm. g. E.

In dem für die vente Charvet, Paris 1883, verfaßten Catalog wird p. 170, n. 1828 un magnifique plateau en bronze argenté gefunden in Trinquetaille (Arles) als Werk von Griechischer Arbeit aufgeführt; in L. Müller's Descript. des antiq. du Mus.-Thorvaldsen, Sect. I et II, p. 183, n. 334 unter den Bronzevasen eine prochoë entièrement couverte d'ornements gravés, et argentée. Der behufs der Versteigerung der Collection Milani zu Frankfurt am Main 1883 verfaßte Catalog führt S. 118 fg., n. 402 und 403 einen Napf und einen Teller von Bronze auf mit der Angabe, daß von jenem die innere und äußere Fläche, von diesem die Innenfläche mit Silber plattirt sei.

Zu S. 32 fg.

Spuren der Versilberung sichtbar an dem „engherabfallenden

fein drapirten" Gewande der Bronzestatuette einer stehenden Minerva nach dem Catalog Milani S. 132, n. 459, der auch eine Abbildung bringt.

Zu S. 34 fg. Anm.

Eins der interessantesten Beispiele mit Silber incrustirter oder eingelegter Bronzearbeit, in welcher menschlich gebildete Figuren, Thiere, allerhand Geräthe, Bäume und einige andere Pflanzen sowie der Erd- oder Felsboden vorkommen, bietet das im J. 1872 bei dem alten Amiternum gefundene und 1873 in das Capitolinische Museum zu Rom gekommene „bisellium", welches A. Castellani in dem Bullettino della commissione archeol. municipale, ann. II, Roma 1874, p. 22 fg. ausführlich besprochen und tav. II—IV abbildlich mitgetheilt hat. Die Vorderansicht des ganzen Sessels ist nach Castellani wiederholt bei Blümner „das Kunstgewerbe im Alterthum", 1885, S. 203, Fig. 127 (wo irrig angegeben wird, daß das Werk aus Pompeji stamme), ein Theil des Schmuckes der linken Armlehne in desselben Gelehrten Technologie und Terminologie der Gewerbe und Künste IV, 1, 1886, S. 226, Fig. 31. Von den wichtigsten Darstellungen auf t. III. und IV findet man kleinere nicht auf die bei Castellani zurückgehende Abbildungen auch bei Jules Martha Manuel d'archéol. Étrusq. et Rom. Fig. 135, z. p. 296. Diese weicht aber von jener gewiß genaueren in manchen Einzelheiten wesentlich ab [1]).

Die Verfertigung dieses Werkes setzt Castellani in die Zeit zwischen den Bürgerkriegen unter Sulla und Marius und den Flaviern, indem er in ihm eine Verschmelzung der altitalischen Kunst mit der großgriechischen wahrnimmt. Ohne Zweifel stand der Künstler namentlich unter dem Einflusse dieser. Das zeigt sich selbst in Betreff des Dargestellten. Besonders interessant ist es, daß die Scene des einen Satyr züchtigenden Silen fast durchaus sich wiederholt an dem unteren Theile des Henkels eines Bronzegefäßes im Mus. naz. zu Neapel, welcher aus Mus. Borbon. Vol. IX, t. 56 in meinen Denkm. d. a. Kunst II, 42, 416 (417) wiederholt ist, nur daß Silen eine Kappe auf dem Kopfe hat und sich statt der Ruthe eines kurzen Pedums bedient. Es hat die größte Wahrscheinlichkeit, daß der Sessel für einen Bacchischen oder Priapischen Priester bestimmt war. Darauf führt der bildliche Schmuck, welcher bei Castellani t. II und danach bei Blümner Kunstgew. a. a. O. in seiner Gesammtheit gegeben ist, nicht weni-

1) Ueber ähnliche bisellia spricht Fr. Lenormant zu der Collection Auguste Dutuit, Paris 1879, p. 17 fg.

ger die Eselsköpfe und die Bacchischen Amoren und die Schwäne oder Gänse, ja selbst die Sphinxe, als die figurenreichen Darstellungen auf Castellani's t. III. IV (dessen Abbildungen wir für die folgenden Angaben zu Grunde legen werden) und bei Martha a. a. O.

Hier sieht man zwei Gärten mit Bäumen und Stauden oder zwei verschiedene Abtheilungen desselben Gartens, deren jede etwa in der Mitte das bärtige Hermenbild des Priapus zeigt. Der unterste Theil des Hermenschaftes kommt beide Male nicht zum Vorschein, da er durch ein rundliches Gefäß dem Auge des Beschauers entzogen wird, welches vermuthlich als mit Most gefüllt und dem Gotte dargebracht zu denken ist[1]). Priapus ist beide Male nur mit einem ärmellosen Chiton bekleidet, so zwar, daß das lange Glied nicht bedeckt wird. Das Haar ist beide Male mit einer Tänie umgeben, auf t. III scheint es zudem mit einem besonderen Bande in einen Büschel zusammengebunden zu sein. Der Priap auf t. IV hält außerdem in der linken Hand einen Zweig, wie es scheint von dem Oelbaum[2]). An den vor ihm stehenden Altar ist eine brennende Fackel gelehnt. Eine brennende Fackel steht auch hinter dem Priap auf t. III.

Die anderen in menschlicher Bildung dargestellten Figuren sind Wesen des Bacchischen Kreises: der Silen, sieben Satyrn, unter ihnen, wie es scheint, eine Satyra, und zwei vollständig be-

---

1) Anders Castellani a. a. O.: un simulacro di Priapo in forma di Erma, il cui fusto, rappresentante le due gambe unite, non ben si scorge se sia piantato sopra una base rotonda, ovvero se esca dalla bocca di un dolio, donde spunta ancora una pianta di papavero. Das Letzte ist unglaublich. Dagegen steht die Annahme eines dolium gegenüber einer runden Basis sicher; das Postament der Hermen hat man sich als hinter dem Gefäße stehend zu denken.

2) Die Darstellungsweise des Priapus ist sehr beachtenswerth. Sie ist verschieden, so daß man für einen Augenblick an zwei verschiedene Priapen denken könnte, da man im Alterthum ja auch Priapen in der Mehrzahl annahm (Mosch. Id. III, 27), was inzwischen gewiß nicht das Richtige treffen würde. Höchst eigenthümlich ist die Bildung der Geschlechtstheile. An dem Priapus auf t. IV gewahrt man unterhalb des schräg gesenkten Phallus einen Gegenstand, den man für eine Hode halten könnte, wenn nicht der Umstand, daß in der Mitte desselben ein dicker schwarzer Strich zu sehen ist, Bedenken erregte. Dieser giebt dem Gegenstande eher das Aussehen einer Vulva. Achtet man darauf, daß dieser Priap nicht wie der auf t. III das Gewand mit der Linken hält, um den Phallus sichtbar zu machen, daß dieses sich aber ganz so ausnimmt, als würde es durch einen von ihm verdeckten Gegenstand gehoben, so kann man auf den Gedanken verfallen, daß dieser ein zweiter schräg sich erhebender Phallus sein solle, wenn es sich nachweisen läßt, daß Priapus auch sonst mit zwei Phallen versehen erscheint Dafür kenne ich aber kein anderes bildliches Beispiel als

kleidete Weiber. Ueber den Silen, welcher die Stelle eines Aufsehers zu vertreten scheint, ist schon oben die Rede gewesen. Die Satyrn beschäftigen sich entweder mit der Weinlese, oder haben sich mit derselben beschäftigt, oder sie treten die Trauben

---

ein Pompejanisches Wandgemälde nach Helbig's »Wandgem. der vom Vesuv verschütt. Städte Campaniens« S. 116, n. 508 Beschreibung des Bildes eines langhaarigen bärtigen Priapus: »unter seinem Chiton, welcher aufgehoben ist, ragt ein doppelter Ithyphallos hervor. Mit jeder Hand faßt der Gott eine Hode desselben«. Daß das leider nirgends abgebildete Wandgemälde in Betreff der Geschlechtstheile nicht genau übereinstimmt, kann nicht viel verschlagen, wenn in Betreff seiner der doppelte Phallus feststeht. Der von Friederichs Berlins ant. Bildw. II, n. 1351 unter den obscönen Amuleten erwähnte Doppelphallus darf nur nebenbei zur Vergleichung gezogen werden. Aus dem Kreise der Schriftwerke können dagegen verglichen werden die Bezeichnungen des Priapus als Trepallus, Tripallus, Trifallus (s. die Stellen bei O. Jahn in den Jahrb. des Vereins für Alterthumsfreunde im Rheinlande. H. XXVII, S. 53. Anm. 20). Unter den auf uns gekommenen Bildwerken befindet sich eins, an welchem drei Phallen zum Vorschein kommen. Es handelt sich um eine Bronzefigur, die als Amulet gedient hat. Sie stellt ein laufendes menschlich gebildetes Wesen dar, welches mit zwei Phallen versehen ist, deren einer die gewöhnliche Stelle einnimmt, während der andere auf der Rückseite unterhalb des Afters erscheint, und deren Obertheil in einem geflügelten Phallus besteht, der in den Kopf ausläuft (Abbildung in Beger's Thes. Brandenburg. III, p. 427). Die Figur ist wesentlich dieselbe wie die auf dem bekannten Relief von Aquileja (Denkm. d. a. Kunst II, 73, 936), die allgemein auf den Tychon bezogen wird, nur daß an dieser nur ein männlicher Geschlechtstheil zu sehen ist. Eine der auf dem Relief wesentlich entsprechende Figur aus Bronze verzeichnet Friederichs a. a. O. n. 1382 unter den obscönen Amuleten mit den Worten: »Phallus, gleichsam personificirt, indem man ihm Beine angefügt hat und zur Bezeichnung seiner Begier Flügel«. Es handelt sich aber wiederum um einen Tychon. Ob man dergleichen Figuren auch als Priapus bezeichnen darf, steht sehr dahin, trotz der Glosse: Trepallus, *Πρίαπος*, und der Angabe bei Strabo IX, p. 382. Jedenfalls aber spricht die Bronze bei Beger dafür, daß eine Mehrzahl von Phallen bei einem nahe verwandten Wesen vorkam. Auch Bildwerke wie die von Friederichs a. a. O. n. 1352 – 1354 erwähnten (»ein mittlerer Phallus von je einem ithyphallischen an den Seiten umgeben«) können höchstens nebenbei für einen Priapus mit drei Phallen in Anschlag gebracht werden. — Wir bemerken hienach, daß man den Gedanken an einen zweiten nicht sichtbaren Phallus des Priapus bei Castellani t. IV aufgeben kann, wenn man es für wahrscheinlich hält, daß der ausführende Künstler, ein Copist, das Original nicht genau wiedergab, indem er die linke Hand, welche den Zweig hält, nicht zugleich auch an das Gewand legte, um das Lüpfen desselben anzudeuten. Nimmt man dieses an, so bleibt an der in Rede stehenden Priapsherme nur noch der unterhalb des oberen Theiles des Phallus zum Vorschein kommende Gegenstand als etwas Eigenthümliches übrig. An der Priapsherme auf tav. III erscheinen an derselben Stelle zwei kleinere aber deutlich dargestellte Gegenstände mit einem Strichelchen in der Mitte, die ein jeder gewiß für Hoden halten wird. Daß der Künstler auf t. IV nur eine Hode habe angeben wollen, indem er voraussetzte, daß der Beschauer die andere sich an der

aus. Von den bekleideten Weibern hebt das eine die Arme, um den Korb, in welchen ein Satyr Trauben pflückt, entgegen zu nehmen; das andere beschäftigt sich mit dem Fuße eines in schmerzhafter Haltung dasitzenden Satyrs [1]).

nicht sichtbaren Seite des Phallus befindlich denken solle, ist kaum glaublich. Daß Priapus androgyn gedacht und gebildet wurde, ist bekannt (Schol. Lucian. dial. deor. 23, Jup. trag. 6, E. Braun in Gerhard's Arch. Nachlaß aus Rom S. 41, O. Jahn in d. Bericht. d. K. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch., 1855, S. 235 fg. und in den Jahrb. des Ver. von Alterthumsfr. a. a. O. S. 45 fg.). Wie an einer unbärtigen hermaphroditischen Herme Denkm. d. a. Kunst II, 56, 710 (wo zum Text noch hinzuzufügen Ch. Lenormant, Nouv. gal. myth. p. 43, Anm. 18 und Reifferscheid Ann. d. Inst. arch. 1867, p. 361) die Mannweiblichkeit durch eine Hode am Schafte mit dem weiblichen Geschlechtszeichen darunter bezeichnet ist, so kann auf der in Rede stehenden eingelegten Platte dasselbe wohl auch durch den Phallus mit dem weiblichen Geschlechtszeichen darunter geschehen sein. Die Verschiedenheit hinsichtlich der Geschlechtstheile bei dem Priapus auf t. III und dem auf t. IV verschlägt an und für sich nichts. Ob der Umstand, daß der auf t. IV weibliches Haar hat (wie es sich öfter findet, z. B. auch auf dem Relief bei Hübner »Die ant. Bildw. in Madrid« n. 289, S. 145 fg.), besonders in Betracht kommen kann, ist mehr als fraglich. Vollständig entscheidend kann es nur sein, wenn eine erneuerte Untersuchung des Originals zu Rom es sicher stellt, daß die durch Castellani veranlaßte Abbildung ganz genau ist und sich nicht die Spur einer zweiten Hode zeigt. — Was die Haartracht an der Herme auf t. III betrifft, so ist dieselbe bei einem Priapus meines Wissens noch nicht nachgewiesen. Sie erinnert besonders an die des Artemiskopfes in den Denkm. d. a. Kst. II, 16, 156 b, minder auch an die des Sohns des Lykurg ebenda II, 37, 440, und an die der »Pankratiasten nach Griechischer Sitte«, über welche ich in Fleckeisen's Jahrb. f. Phil. u. Päd. Bd. LXXI, S. 365 fg. gesprochen habe, Haartrachten, die jedenfalls verschiedene Beziehungen haben, von denen keine für Priapus besonders paßt, da es keineswegs sicher steht, daß eine von ihnen auf Thrakischen oder Asiatischen Brauch zurückgeht, was jedoch nicht durchaus unmöglich ist, vgl. z. B. die Haartracht des Sardus pater (Gerhard, Ges. Abhandl. Taf. XLIII, n. 7). Bei Priapsbildern in Gärten schreckt nach Horat. Sat. I, 8, 6 importunas volucres in vertice arundo fixa. Daran ist doch wohl hier schwerlich zu denken? — Ein Zweig in der Hand, wie ihn die Herme auf t. IV mit der Linken hält, findet sich bei Priap unseres Wissens nur noch einmal, nämlich auf dem Lampenrelief in Bartoli's Lucern. vet. sepulcral. II, 26, wo der Gott in eigenthümlicher Tracht, mit Chlamys und Anaxyriden angethan, dargestellt ist und in der Linken die auch sonst mehrfach erwähnte und in Bildwerken vorkommende Sichel, in der Rechten aber einen Zweig hält, den der Verfasser des Textes als ramum Pini betrachtet, während die Art des Baumes nach der Abbildung nicht mit Sicherheit zu ermitteln ist.

1) Castellani unterscheidet zwischen Fauni ed altri rustici cultori di Bacco. Allein es handelt sich bei den betreffenden Figuren nur um Satyrn. Da von den beiden an dem Baum auf t. IV erscheinenden mit einem Schurz bekleideten Figuren die untere heraufkletternde deutlich einen Schwanz hat, so ist ohne Zweifel an einen Satyr zu denken. Schon deshalb wird man die obere wesentlich gleiche auch für einen solchen halten wollen, wenn auch der Schwanz fehlt.

Die Thiere anlangend, so ist auf t. III ein Ziegenbock dargestellt im Begriff in eine aus Flechtwerk hergestellte Laube hineinzugehen; auf t. IV ein Vogel, der sich einem Weinstocke zuwendet und in der Luft zu schweben scheint, obgleich die Flügel an dem Körper anliegen, sodaß er doch wohl als auf einem nicht angegebenen Gegenstande sitzend zu denken ist. Da es sich bei dem Bocke ohne Zweifel um ein Bacchisches und Priapisches Thier handelt, wird dasselbe zunächst auch von dem Vogel anzunehmen sein. Der sichtbare Flügel ist von schwarzer Farbe (bei Martha erscheint nur der untere Rand des Flügels schwarz). Man denkt wohl zunächst an einen Häher oder eine Taube, welche letztere sowohl bei Bacchus als auch bei Priapus vorkommt[1]).

Unter den Gegenständen aus dem Pflanzenreiche nimmt der Wein den ersten Platz ein. Die Weinstöcke winden sich meist an starken Stämmen empor, welche nach Castellani den Früchten nach als Pinien zu betrachten sein sollen. Inzwischen handelt es sich, wie man bei genauerer Betrachtung einsehen wird, nicht um Pinienkonen, sondern um Trauben der Reben in Knospen und Blüthen. Auf t. III am Ende rechts vom Beschauer sieht man bei einem größeren mit Trauben behangenen Weinstock einen solchen Stamm nicht. Er war im Originale gewiß vorhanden, konnte aber nicht auf dem dem Kopisten gestatteten Raume mit ange-

---

Er ist weggelassen, weil an der Stelle, die er einnehmen müßte, eine jener konosförmigen Trauben dargestellt ist, oder als durch diese verdeckt zu denken. Bei dem mit einem Schurz bekleideten traubenaustretenden Satyr auf t. III sieht man den Schwanz nicht, weil von jener Figur der Rücken nicht dargestellt ist. Als Satyra glaube ich die ganz nackte Figur fassen zu müssen, welche nebst dem ebenerwähnten beschurzten Satyr Trauben austritt, da dieselbe deutlich weibliche Brüste und weibliches Haar hat, wenn ich mich auch keiner in jenem Geschäft begriffenen Satyra erinnere.

1) Auch von dieser Gruppe ist mir keine Wiederholung bekannt, während der Umstand, daß ein anderer Satyr oder ein Pan sich mit dem Ausziehen eines Dorns aus dem Fuße eines Satyrs beschäftigt, häufig vorkommt. Eine Dornauszieherin wird als in Umgebung einer Viehheerde ärztliche Hülfe leistend erwähnt im Bull. d. inst. arch. 1843, Sitzung vom 12. Mai. Vgl. auch Zielinski im Rhein. Mus. f. Philol. 39, 1884, S. 102, zu Taf. II, n. 2, der S. 105 die in Rede stehende Darstellung vergleicht.

2) Eine Taube, über deren Vorkommen bei Bacchus und Priapus wir nächstens anderswo handeln werden, ist gewiß wahrscheinlicher als ein Häher, von welchem als einem Attribute jener Gottheiten nichts bekannt ist. Da er den Trauben nachstellt, kann er eher als ein beiden verhaßtes Thier betrachtet werden. Allerdings galt Priapus, der hortorum deus et tutela (Ovid. Fast. I, 415) als furum aviumque maxima formido (Horat. Sat. I, 8, 3 fg.); aber daß in dem vorliegenden Falle der Vogel auf diese Weise zu fassen sei, hat durchaus keine Wahrscheinlichkeit.

bracht werden. Auf t. IV zumeist nach links erblickt der Beschauer einen Weinbaum mit starkem Stamm, aus welchem die Zweige mit Trauben daran hervorgehen. Er ist von den Baumstämmen, um welche sich die Weinstöcke emporwinden, auch durch die Farbe geschieden. Dem mit Züchtigung bedrohten Satyr sprießt ein junger Weinschößling scheinbar unmittelbar aus dem Erdboden. Zwischen dem verwundeten Satyr und dem ihn pflegenden Weibe wird ein Baum mit starkem Stamm sichtbar, welchen Castellani als Lorbeer bezeichnet, während er uns den Blättern und Früchten nach entschieden vom Oelbaum zu sein scheint. Daß auch dieser einer Gartengottheit geweiht sein konnte, liegt auf der Hand [1]). Außerdem findet man aus dem Pflanzenreich mehrere Mohnstengel [2]) dargestellt, zwei um die Priapshermen auf t. III und einen vor der auf t. IV, außerdem noch zwei an verschiedenen Stellen auf t. III in der Abtheilung links vom Beschauer. Daß der Mohn dem Priapus eignete, darf mit Sicherheit angenommen werden [3]).

1) In der Anthol. Pal. VI, 102 bringt ein Gärtner dem Priapus unter anderen Früchten auch Oliven als Opfer dar.

2) Mohnstengel (für welche auch die weiße Farbe passen würde, wenn der Künstler durch diese vollreifen Mohn andeuten wollte) nimmt auch Castellani an. Dabei darf aber nicht verschwiegen werden, daß weder die Blätter noch die Frucht, der Kopf, für Mohn vollkommen passen, sondern eher zu der Granate (die aber aus anderen Gründen nicht angenommen werden kann). Der Kopf ist stets elliptisch, nicht rund, gebildet, während der Mohnkopf sowohl in der Wirklichkeit als auch auf den alten Bildwerken, so viel ich mich erinnere, stets rund erscheint. Handelt es sich nun auf dem in Rede stehenden Bildwerke nur um eine Ungenauigkeit des Künstlers oder kommt wirklich in Italien eine Mohnart vor, welche seiner Darstellungsweise entspricht?

3) Der Mohn wird bekanntlich zunächst auf Demeter zurückgeführt und gilt hauptsächlich als ihr Attribut. Wir finden ihn auch bei dem Idol der Kora von Sardes auf der Münze in den Denkm. d. a. Kunst II, 9, 101 b. Auf dem Pariser Glascameo in den Denkm. d. a. Kuust II, 10, 116 ist er nebst Aehren der mit Dionysos verbundenen Demetertochter Kora gegeben. Außerdem kommt er bei der Kybele vor (Winckelmann's Werke II, S. 511). Ferner auch bei der Aphrodite des Kanachos (Pausan. II, 10, 4) und der bei Maffei Gemm. ant. P. III, t. 3, ohne Zweifel als Symbol der Fruchtbarkeit. Als *πολυγονίας σύμβολον* wird er ausdrücklich bezeichnet von Eusebius Praep. evang. III, 11. Als solches und als Gartengewächs paßt er ganz besonders auch zu Priapus, wie auch die eine der Chariten in ihrer Beziehung auf die Frucht des Bodens mit Mohnköpfen erscheint auf dem Petersburger geschnittenen Steine in den Denkm. d. a. Kst. II, 57, 724. Sind wirklich auf dem von Heydemann im Bull. d. inst. arch. 1869, p. 59, n. 36 besprochenen geschnittenen Steine falce e teste di papavero dargestellt, wie in dem Repertorio universale Roma 1875, p. 49 angegeben wird, so wäre gewiß zunächst der Mohn auf Priapus zu beziehen. Aber bei Heydemann ist vielmehr eine face erwähnt.

Von den Weinstöcken hängen musikalische Instrumente des Bacchischen Dienstes herab, Syringen der späteren Form, Tympanen, Cymbeln. Auf der rechten Abtheilung von t. IV erblickt man nichts von den Zweigen des Weinstocks, von denen man sich die Instrumente herabhängend zu denken hat. Sie konnten wegen der Form, die hier der Platte zu geben war, nicht mit dargestellt werden. Aber die beiden Instrumente konnte und wollte der Künstler nicht entbehren. Er brauchte sie theils wegen des Parallelismus zu t. III (der übrigens ein freier ist), theils und hauptsächlich zur Ausfüllung des Raumes, auf welche er auch sonst besonders bedacht gewesen ist. Damit hängt auch wohl der Umstand zusammen, daß er auf t. IV nur eine Cymbel dargestellt hat, diese aber in besonderer Größe, sodaß sie sich fast wie eine Glocke ausnimmt; die andere, welche nur durch das zu ihr gehörende Bändchen angedeutet ist, hat man sich als durch das Tympanum rechts verdeckt zu denken. Die musikalischen Instrumente sind wohl nicht als Weihegaben für die Gottheit, sondern als Besitz der Thiasoten des Bacchus zu betrachten, welche jene während ihrer Beschäftigung aufgehängt haben, um sie nach Beendigung dieser wieder zu sich zu nehmen und zu gebrauchen.

Die Farben, welche sich an den dargestellten Wesen und Gegenständen befinden, sind, nach den Abbildungen zu urtheilen, wesentlich nur zwei, die hellweisse und die schwarze. Nur ausnahmsweise kommen mattweisse und grauliche Stellen vor. Von den menschlich gebildeten Figuren ist das Nackte durchaus weiß (selbst die Hermenschäfte des Priapus, welche man sich wie die menschlichen Theile des Körpers wohl als aus weißem Marmor bestehend denken soll, mit Ausnahme einiger verticalen schwärzlichen Striche). Dasselbe gilt von den Schwänzen der Satyrn und von dem Ziegenbocke, welchen man sich immerhin als ganz von weißer Farbe denken kann. Dagegen hat der oben erwähnte Vogel nur zum größten Theile helle weiße Farbe. In derselben erscheinen auch die Weinstöcke und Weinblätter, mit Ausnahme der Blattnerven, selbst die reifen Trauben und Beeren, sowie die Mohnstengel auf beiden Tafeln, die Fackel, die Amphora (mit Ausnahme herablaufender Striche zur Andeutung der Riefelung) [1]), und das Dolium, die Rohrlaube und das Gerüst zum Austreten der Trauben auf t. III, der Stamm des Weinbaums zumeist nach links vom Beschauer, das Pedum des Silen, die Zweige, Früchte und Blätter des Oelbaums (mit Streifen von mattem Weiß im In-

1) Castellani spricht von un' anfora col corpo ed il collo distinto di baccelli, wovon aber auf der Abbildung nichts zu sehen ist.

nern), der Zweig in der Linken des Priapus, die Fackel an dem Altare vor ihm, deren Flamme aber mit Ausnahme des Randes schwärzlich ist, die Bänder, vermittelst deren die Cymbel und das Tympanum auf t. IV aufgehängt sind. Dagegen haben alle konenförmigen Ansätze der Weinstöcke nur schwärzliche Farbe. Ebenso die Kappe des Silen auf t. IV, die Tänien an den Köpfen der Priapshermen und des alten Weibes, der Zwischenraum zwischen dem obersten Boden des Gerüstes zum Traubenaustreten und dem in der Mitte dieses stehenden Dolium [1]). Alle übrigen Gegenstände haben schwarze und weiße Farbe, wobei die schwarze in der Regel überwiegend ist. An den Syringen sind die Querstäbe schwarz, aber von weißen Linien umgeben, ebenso die Zwischenräume zwischen den einzelnen weißen Röhren, die Syrinx auf t. IV zeigt außerdem einige weiße Stellen inmitten der oberen schwarzen Partie. An den Cymbeln erscheint das Becken schwarz, die Handhabe und der untere Rand weiß; bei der größeren auf t. IV findet sich auch in der Mitte des glockenförmigen Beckens ein weißer bandartiger Streifen. Der untere in Wirklichkeit aus Leder, für welches man auch dunkele Befärbung voraussetzen kann, bestehende Theil der Tympana ist schwarz und mit weißen sternartigen Verzierungen versehen; er ist mit einem weißen Rande eingefaßt, schwarze Farbe findet sich auch an der einen sichtbaren Seite des Tympanum auf t. IV, auch hier erscheint dieselbe von einem weißen Rande eingefaßt; endlich haben die Klapperbleche, welche an den Tympana hängen, weißliche Farbe. Die zum Einsammeln der Trauben dienenden Körbe, welche deutlich aus Flechtwerk bestehen, sind schwarz und haben oben in der Mitte, einmal auch unten weiße bandartig umlaufende Ränder oder Streifen, einmal, auf t. IV, erscheint auch ein Henkel von weißer Farbe. Der Altar ist oben weiß mit einigen schwärzlichen umlaufenden Strichen und mit schwärzlicher Farbe umgebenen kleinen Runden, zur Andeutung der architektonischen Gliederung des Capitells, der rundliche cippusartige Theil darunter ist schwarz, aber mit weißen Binden umgeben, der Fuß des Altars zeigt zunächst schwärzliche umlaufende Striche, dann eine breitere umlaufende schwarze getüpfelte Partie, darauf eine schmälere weiße mit umlaufenden schwärzlichen Strichen, zuletzt unten eine breitere schwarze. Die Stämme der

1) Castellani denkt, wenn ich ihn recht verstehe, daran, daß durch die schwarze Farbe il liquore espresso dai grappoli angedeutet werde. Dabei wäre es auffallend, daß den ausgetretenen Trauben und Beeren weiße Farbe gegeben ist. Sollte etwa an einen in das Dolium gesetzten Recipienten aus Bronze zu denken sein?

Bäume sind mit Ausnahme des einzigen schon erwähnten schwarz, zeigen aber mehrere weiße Stellen, welche wohl die Risse in der Rinde andeuten sollen. Die schwarze Farbe herrscht auch in der Darstellung des felsigen Bodens vor; doch finden sich außerhalb und namentlich innerhalb derselben weiße Stellen von verschiedener Form, die etwa zur Andeutung helleren Gesteins oder von Schlingpflanzen und dgl. dienen sollen [1]). Was endlich die Tracht betrifft, so hat das wie eine Nebris angelegte Bocksfell bei dem einen Korb mit Trauben entgegennehmenden Satyr schwärzliche und grauliche Farbe; der Schurz des traubenaustretenden Satys ist schwarz mit weißen von oben nach unten gehenden Strichen, die Schurze der Satyrn auf t. IV sind schwarz mit mehr oder weniger rundlichen weißen Stellen; die Kleider der Priapen, des Silen, der Bacchischen Frauen zeigen schwarze und weiße Farbe zugleich.

Um auch die übrige eingelegte Arbeit an der Vorderseite noch mit einigen Worten zu berücksichtigen, so führen wir an, daß Castellani die due teste asinine als sbalzate in cesello e guarnite d'argento bezeichnet und die beiden Amorini in altorilievo als egualmente lavorati und daß le due sfingi le quali fiancheggiano il suppedaneo, cesellate a meraviglia, hanno le penne e le squame vagamente alternate d'argento e di rame, sowie daß la fascia esterna del medesimo, similer a quella del seggio, e decorata in egual modo di rose e meandri.

Castellani bezeichnet die oben im Detail berücksichtigten due scene bacchiche con finezza e con brio veramente mirabile eseguite als di tarsia d'argento sul fondo di rame. Ueber die schwarzen Partien hätte man eine genauere Auskunft gewünscht. Sind dieselben nur in der Bronze ausgeführt oder durch Niellirung oder hat wie bei der Bronzepyxis von Vaison (Nachr. 1886, S. 35, Anm.) Beides neben einander stattgefunden? Uns will es scheinen, als sei an der Niellirung nicht zu zweifeln und habe dieselbe ent-

1) An steinigen Erdboden kann man doch gewiß nur denken in Betreff der Gegenstände auf denen der den Korb entgegennehmende Satyr auf t. III links vom Beschauer steht. Auch der am Boden zwischen dem Baume weiter nach rechts und der Amphora zum Vorschein kommende Gegenstand wird wohl am wahrscheinlichsten so gefaßt werden. Beide sind von Castellani nicht besonders berücksichtigt. Dagegen bemerkt er über den vermeintlichen Lorberbaum auf t. IV: le cui radici grosse e contorte escono fuori di terra e circondano il pedale: sopra una di queste è assiso un altro Fauno u. s. w., und über den an den Baumstamm zumeist nach rechts stoßenden Gegenstand, auf welchem das Weib steht: che puo prendersi per un ceppo di albere. Ich kann mich von der Richtigkeit dieser Annahme nicht überzeugen.

schieden die erste Stelle eingenommen. Es wäre sehr wünschenswerth, daß das in Rede stehende Werk von einem Techniker und einem Archäologen zugleich einer erneuerten Prüfung unterzogen und über die Weise der Darstellung sowie über das Dargestellte mit Rücksichtnahme auf die von Castellani gegebene Abbildung und unsere obigen Detailbemerkungen genaue Auskunft gegeben würde.

Zu S. 36, Z. 16 fg., vgl. auch S. 45.

Den hier aufgeführten Beispielen von Venusstatuetten sind folgende hinzuzufügen. In Lord Murray's Sammlung zu Edinburgh befindet sich nach A. Michaelis Anc. marbles in Great Britain p. 299, n. 5 eine nackte Venus, welche in der Rechten eine goldene patera [mirror?] hält und geschmückt ist mit einem goldenen armlet und goldrings round her ankles. Unter den Bronzestatuetten des Turiner Museums fand ich eine mit zwei kleinen Harpokratesfiguren gruppirte auf einem Postamente stehende am Oberleibe nackte weibliche Figur mit goldenem (vergoldetem) Kranze auf dem Haupte und zwei goldenen Bändern an beiden Armen, ohne Zweifel Venus, vgl. Nachrichten 1877, S. 684 fg. Auch von Silberstatuetten der nackten Venus mit Gold- und Perlen-Schmuck haben wir ein Beispiel, vgl. Catal. Hertz, p. 101, n. 27: The neck and left arm are adorned with rings of twisted gold wire and from the necklace is suspendet an oriental perl[1]). Daß sich Goldschmuck bei mehreren großen nackten Venusstatuen aus Marmor nachweisen oder voraussetzen läßt, ist bekannt.

Zu S. 38 fg.

In dem behufs der vente Charvet, Paris 1883 verfaßten Catalog wird p. 170, n. 1825 unter den Griechischen Bronzen eine Büste der Pallas von einem manche de couteau als mit einer égide argentée avec masque de Méduse versehen aufgeführt.

Zu Regensburg sah ich in den letzten Michaelisferien in der Sammlung zu St. Ulrich eine bei Rogging gefundene durch vorzügliche Arbeit ausgezeichnete Bronzestatuette des Mercur mit einem Köcher auf dem Rücken, dessen Bandelier versilbert ist.

1) Leider hören wir weder in diesem noch in dem in den Nachrichten 1886, S. 86 verzeichneten Falle des Vorkommens einer Perle an einem Ohrgehänge ausdrücklich, ob es sich um eine ächte Perle, nicht um eine Glasperle handelt. Doch haben die Verfasser der betreffenden Angaben wohl jene gemeint und es ist nur die Frage, ob mit Recht oder nicht. Stephani bemerkte im Compte rendu pour 1862, p. 16, zu pl. I, n. 11 bei Gelegenheit der Besprechung eines goldenen Ohrgehänges in der Ermitage zu St. Petersburg, an welchem sich eine ächte Perle noch vollständig erhalten hat, daß diese »vielleicht die einzige aus dem Alterthum auf uns gekommene« sei.

Zu S. 40 und 484.

Eine weibliche Statuette von Silber, die als ganz vortreffliches Stück bezeichnet wird, trägt an dem Gewande noch reiche Spuren von Vergoldung (Catal. Milani S. 135, n. 466). An einer silbernen Büste d'un génie féminin en fort relief, welche aus der Sammlung Campana in den Louvre gekommen ist, sind les ailes, le torquès, la draperie dorés (Adr. de Longpérier Notice des bronzes ant. du Louvre p. 100, n. 458).

Z. S. 51 und 486.

Am Griff einer bronzenen Patera, der oben in einen Widderkopf endet und am Ansatztheil in ein breites Blattornament mit Blüthenknospen, sind sowohl die Augen des Widders als die Blüthenknospen silbertauschirt.

Zu S. 53 fg. und 487.

Goldene Augen hat auch die Statuette des sitzenden Mercur, welche im Cat. Hertz p. 133, n. 56 verzeichnet ist.

Zu S. 56.

Von Fr. Lenormant ist im Catal. der Collect. A. Dutuit p. 20, n. 35 verzeichnet eine ebenda pl. 12 in Abbildung gegebene Situla de bain en forme de tête. „La tête est celle d'un esclave imberbe et grotesque. La pupille des yeux est incrustée en pâte de verre.“

L. Müller führt unter den Etruskischen Werken in der Descr. des antiquités du Mus. - Thorvaldsen, Sect. I et II, p. 160, n. 27—28, auf deux têtes de lions, travaillées au repoussé dans une plaque mince, les yeux incrustés. Mit welchem Material sagt er nicht, doch wird vermuthlich an Glas oder Email zu denken sein. Er meint, es handele sich wahrscheinlich um ornements funeraires, indem er ein ornement absolument semblable de Cornéto qu'on trouve dans Micali Mon. (1832), t. 41, 3, veranschlagt. Ein anderer, jetzt verstorbener Gelehrter dachte in Betreff der Kopenhagener Köpfe an Deichselenden.

In dem Catalogue des objets d'art. dépend. de la success. Ad. Castellani, Rome 1884, werden p. 49, n. 202—203 als travail étrusque de l'ancien style aufgeführt deux masques de lion les yeux en émail, applique.

In demselben Werke wird p. 46, n. 273 unter den Bronzen verzeichnet und pl. XIX abbildlich mitgetheilt ein grand masque d'Achélous de l'ancien style étrusque, cornes de taureau, les yeux en émail. Das Weiße der Augen ist von weißer, die Pupille von schwarzer Farbe.

L. Müller verzeichnet a. a. O. p. 145, n. 107—108 auch poissons de crystal de roche aux yeux incrusté ohne Angabe des Materials der Augen, welches doch sicherlich als Email zu betrachten ist.

Zu S. 60.

Conze erwähnt in dem Verzeichn. d. ant. Skulpturen des K. Mus. zu Berlin vom J. 1885, S. 113 fg., n. 617 einen weiblichen Kopf von weißem Marmor aus Cypern, in dessen „Augenhöhlen" Spuren und Reste eines Bronzerandes und der linke Augapfel, von weißer Masse eingesetzt, noch erhalten" sei, als „gute Arbeit etwa des 2. Jahrh. v. Chr." Bei Friederichs - Wolters Bausteine zur Gesch. der Griech. - Röm. Plastik ist S. 671 fg. n. 1661 bei Gelegenheit der Besprechung der Büste des Antinous Mondragone bemerkt: „die Spuren von Erz — in den Augenhöhlen — rühren wohl von den Wimpern her, die man sehr häufig aus Erzstreifchen herstellte, wenn die Augen selbst besonders eingesetzt wurden". „Sehr häufig"?

Zu S. 62, S. 493 fg., S. 495.

Ueber die an diesen Stellen berührte Oldenburgische Bronzestatuette hat Herr Oberkammerherr von Alten die Güte gehabt mir folgenden auf den genauesten Untersuchungen beruhenden Bescheid mitzutheilen.

„Das Weiße im Auge ist hergestellt dadurch, daß ein Silberplättchen auf dasselbe gelegt ist. Als eine eigentliche Versilberung ist das kaum anzusehen, da das Plättchen ablösbar ist. Die Pupille hat eine Höhlung von 2 m.m. Tiefe. Allem Anschein nach hat ein anderer Gegenstand im Auge gesessen, also wohl ein Stein. Es ist kaum anzunehmen, daß bei einem so schönen Werke eine Pupillenhöhlung von dieser unverhältnißmäßigen Tiefe gemacht worden wäre, wäre dieselbe nicht bestimmt gewesen ein Steinchen aufzunehmen.

Die Lippen sind bestimmt Kupfer, vermuthlich also auch wohl übergelegte Plättchen.

Die Brustwarzen sind höchstwahrscheinlich von Kupfer. Es geht dies fast zweifellos aus der angewandten Technik des Gusses hervor, die Brustwarze zeigt nämlich einen kleinen Rand, hinter welchem das Plättchen gepunzt sein kann.

Ueber den Nabel möchte ich nicht bestimmt entscheiden, halte aber dafür, daß er ebenfalls mit Silber hervorgehoben war."

Zu S. 62, 2 und 493.

Lèvres de cuivre rouge bei dem „dieu Italiote" in Adr. de Longpérier's Notice des bronzes ant. du Louvre p. 99, n. 452.

Zu S. 63 und 494.

Den Gedanken an barbarische Arbeit an der Münchener Bronze mit silbernen Zähnen u. s. w. giebt jetzt Christ, wie er mir schriftlich meldet, auf.

Im Catalog der Collect. Milani wird S. 113, n. 378 aufgeführt „ein kleiner Geräthhenkel mit einer Satyrmaske, deren Zähne und Augen versilbert sind.“

Der S. 64 Mitte erwähnte aux Fins d'Annecy entdeckte „Mercur“ ist auch in dem Catalogue A. Dutuit, 1879, pl. 2 abgebildet und von Fr. Lenormant p. 6 fg. besprochen, der ihn als Bonus Eventus faßt und glaubt, daß er von einem contemporain des Antonins, wahrscheinlich in Gallien verfertigt sei.

Als Beispiel, daß silberne Zähne auch bei Thieren von Bronze vorkamen, ist interessant der Eberkopf von sehr feiner Arbeit im alterthümlichen Stile im Mus. Fol zu Genf, dessen Hauzähne von Silber waren, vgl. den Catalogue descr. des Mus. I, p. 264. n. 1222.

Zu S. 63 fg. und 494 unten.

Nach Christ's schriftlich mir mitgetheilter Bemerkung waren die Brustwarzen der bronzenen Statuette des Hercules im K. Antiquarium zu München n. 365 „wahrscheinlich von Silber, wie man aus den Spuren von Weiß in dem Innern der Löcher zu schließen berechtigt ist“.

Was vergoldete Brustwarzen (S. 64) betrifft, so bemerkt E. von Sacken „Die Bronzen d. K. K. Münz- und Ant.-Cab. in Wien“ S. 53 z. Taf. XXI (der lebensgroßen Bronzestatue des „Hermes Logios“): „Die Brustwarzen sind spitze Erhöhungen mit Goldblech belegt und von einem mit einem Zirkel gemachten, vertieften Kreise umzogen.“

An der nach Furtwängler Sammlung Saburoff, Text zu Taf. VIII. IX Lief. IX aus der argivisch-sikyon. Schule vom 5. bis zur Hälfte des 4. Jhrdts. stammenden außerordentlich schönen Statue des Apollon „war die Umgebung der Brustwarzen mit Ausnahme der Warzenspitze selbst von anderem Material eingesetzt, um die verschiedene Farbe dieses Theiles anzudeuten“.

Zu S. 492 in dem Zusatze zu S. 59.

Christ meldet mir brieflich: „die Schlange an der Aegis der äginetischen Athena ist von Blei, stark legiert mit Zinn; die Legierung hatte wohl größere Festigkeit zum Zweck“. Aus dem Material der Schlange folgt keinesweges, daß auch die Aegis aus derselben Metallmischung bestand. Wir würden eher glauben, daß sie aus Silberblech oder aus versilbertem Bronzeblech hergestellt war. Die dunklere Farbe der Schlangen findet sich auch an bemalten Terracottamasken der Medusa und sonst.

Einzig in ihrer Art steht die im J. 1884 in Rom gefundene und in den Thermen des Diocletian aufbewahrte Bronzestatue eines Faustkämpfers da, welche so eben in den Ant. Denkmälern, herausg. vom K. Deutschen archäologischen Institut Bd. I, H. I, Taf. 4 abbildlich mitgetheilt und von W. Helbig kurz besprochen ist. Man findet an ihr kleine Ritzen mit einem rothen Farbstoffe ausgefüllt, eine höchst naturalistische Darstellung der von Faustschlägen zerrissenen Haut.

Eine beachtenswerthe Verbindung von Gold und Silber zeigt der in dem Catalog der Collect. Milani S. 140, n. 483 erwähnte „goldene Fingerring mit einem in Silber gegossenen Amorettenkopf“.

Schließlich sei noch eine eigenthümliche sehr interessante Büste erwähnt, die in dem für die vente Charvet verfaßten Cataloge p. 170, n. 1826 verzeichnet ist: eine tête de jeune fille, beau style grec, welche a été montée sur un buste d'argent et un socle en lapis lazuli. Die auf p. 169 als Vignette abgebildete Büste, deren Kopf und Hals von Bronze sind, hat eingebohrte Augensterne.

Nachschrift.

Nachdem das Obige abgesetzt war, stieß ich noch auf einige in die Kategorie der Einlegung mit Silber und Kupfer gehörende Beispiele, deren Anführung ich hier noch geben will.

Das interessanteste ist das von Adr. de Longpérier Bronzes du Louvre p. 71, n. 331 verzeichnete: Hygiée, assise sur un loup et tournée à gauche; sa main gauche repose sur la croupe de l'animal; de la droite elle tient un serpent. En avant un arbre. L'oeil et les bracelets de la déesse, l'oeil du loup et les feuilles de l'arbre presentent des incrustations d'argent. Es handelt sich um ein bas-relief sur un fond de patère aus Neuvy-Pailloux (Indre). Die bildliche Darstellung gehört zu den außerordentlich seltenen. Adr. de Longpérier verweist auf Montfaucon Ant. expl. T. I, P. 2, pl. CXC, n. 4. Auch hier wird die weibliche Figur auf Hygieia bezogen, hinsichtlich des Thieres aber sowohl an einen Hund als an einen Wolf gedacht. Ersteres ist das Richtige. Das bei Montfaucon nach Maffei und Stefanoni mitgetheilte Werk erinnert durchaus an den Carneol des Berliner Museums (Winckelmann Descr. des pierres grav. de Stosch p. 16, Cl. I, n. 65, Toelken Erkl. Verz. der vertieft geschn. Steine S. 240 fg., Kl. III, Abth. V, n. 1408). Man hat Isis mit dem Schlangenattribut und den Siriushund zu erkennen. Vgl. auch Arch. Ztg. XIX, S. 209, 58.

Zu den Beispielen der Augen von Silber bei Thieren in den Nachrichten 1886, S. 51 und S. 486 kann noch gefügt werden das Tigerweibchen, ein Rundwerk aus Bronze in Wien, nach Sacken und Kenner Samml. d. K. K. Münz- u. Ant.-Cab. S. 293, n. 1103.

Brustwarzen aus rothem Kupfer (Nachr. a. a. O. S. 64 und 495) finden sich auch bei dem Aesculap mit silbernen Augen, welchen Adr. de Longpérier a. a. O. p. 70, n. 328 aufführt.

Universität.

Die Gewitter zu Göttingen in den Jahren 1857—1880.

(Mittheilungen aus dem physikalischen Institute der Universität).

Von **Hugo Meyer.**

(Mit einer Tafel.)

Die Statistik der Gewitter ist in neuerer Zeit wiederholt Gegenstand eingehender und erfolgreicher Studien gewesen. Wenn trotzdem unsere Kenntniß in dieser Beziehung noch manche Lücken aufweist, so liegt das vornehmlich an dem Mangel an gutem Beobachtungsmaterial. Erst in den letzten Jahren hat man damit begonnen, ausgedehnte Gebiete mit dichtmaschigen Gewitterbeobachtungsnetzen zu belegen und systematisch zu durchforschen. Die Ergebnisse dieser Beobachtungssysteme sind schon verschiedentlich bearbeitet worden. Allein die Gewitter sind keineswegs so locale Phänomene, wie man lange Zeit geglaubt hat, und es liegt daher in der Natur der Sache, daß, wenn man Mittelwerthe aus den Meldungen von Gewittern auch einer immerhin bedeutenden Anzahl verschiedener Orte aus einer nur kurzen Reihe von Jahren ableitet, den Resultaten gewisse Mängel anhaften, welche vornehmlich darin bestehen, daß ausgebreitete Gewitter mit einem größeren Gewicht in die Rechnung eingehen als local beschränkte. Daher dürften die Ergebnisse, welche aus langjährigen Beobachtungen eines einzelnen Ortes folgen, den Vorzug vor jenen verdienen, wenn auch andererseits nicht zu leugnen ist, daß in diesen leicht locale Verhältnisse von Einfluß werden können. Untersuchungen letzterer Art besitzen wir nur wenige, besonders wohl deshalb, weil früher auf die Gewitterbeobachtung weniger Gewicht gelegt wurde, und auch wohl mancher Beobachter nicht im Stande war das Wesentliche vom Nebensächlichen zu unterscheiden, da es an einer besonderen Instruction für die Beobachtung der Gewitter fehlte. Für Göttingen haben wir in Listings meteorologischen Tagebüchern, welche im hiesigen physikalischen Institute aufbewahrt werden, ein ganz vortreffliches Material. Wie aus einigen Notizen in den Journalen hervorgeht, hat Listing der Beobachtung der Gewitter von 1857—80 eine besondere Aufmerksamkeit zugewandt. Leider sind in den folgenden Jahren diese Beobachtungen etwas in den Hintergrund getreten, und erst seit etwa Jahresfrist werden sie wieder intensiver betrieben.

Es schien eine lohnende Arbeit, Listings Gewitterbeobachtun-

gen zusammenzustellen, ihre Ergebnisse zu prüfen und mit denen Anderer zu vergleichen. Eine etwas ausführlichere Behandlung, als man sie gewöhnlich durchgeführt findet, hat dabei einige Resultate zu Tage gefördert, welche allgemeineres Interesse beanspruchen dürfen, und deshalb möchte ich dieselben hier mittheilen.

1. Die jährliche Periode der Gewitter.

Auf die Complicirtheit der jährlichen Periode der Gewitter ist man mehr und mehr aufmerksam geworden, nachdem von Bezold[1]) für Mitteleuropa ein doppeltes Maximum der Gewitterhäufigkeit im Sommer nachgewiesen hat. Die genaue Fixirung der Eintrittzeiten dieser Maxima setzt jedenfalls eine sehr lange Reihe von Beobachtungsjahren voraus, und es scheint mir vorläufig richtiger die Gewitter nach Decaden zusammenzufassen, als die Pentade zur Einheit zu wählen und dann durch rechnerische Ausgleichungen die vermeintlichen Unregelmäßigkeiten zu beseitigen. Ich gebe daher in Tab. 1 die Anzahl der zu Göttingen in den einzelnen Decaden beobachteten Gewitter. Zur Vergleichung stelle ich in Tab. 2 die jährliche Periode der Gewitter für einige andere Orte auf; diese Tabelle ist nur zum Theil neu berechnet, zum Theil ist sie aus anderen Mittheilungen entnommen, der Quellennachweis für das benutzte Material findet sich am Fuße derselben. Die Eintrittszeiten der Extreme sind darnach in verschiedenen Gegenden sehr verschieden. Was zunächst das erste Sommermaximum anlangt, so tritt dasselbe in Göttingen später auf als in irgend einem anderen Orte, für den wir die jährliche Periode der Gewitter genauer kennen. Auf Juni 30—Juli 9 fällt in Prag, München, Tarnopol und der Grafschaft Glatz schon das zweite Maximum, in Zürich ein Minimum, nur in Budapest scheinen die Verhältnisse ähnlich wie bei uns zu liegen. Die große Häufigkeit der Gewitter um diese Zeit in Göttingen spiegelt sich in der Temperaturcurve zurück; es ist nicht zu verkennen (Tab. 1), wie dieselbe auf die Temperaturzunahme hemmend einwirkt, wenn sie auch eine dauernde Abhühlung nicht veranlaßt. Die Kälterückfälle des Junimonats gehen ihr vorauf, sind also durch sie nicht beeinflußt; sie ist von wenig dichten, aber andauernden Regen begleitet. — Das zweite Sommermaximum fällt durchweg auf Mitte bis Ende Juli. In Zürich, Buda und Göttingen aber erst auf Mitte August. Für die Richtigkeit dieser Eintrittszeit spricht in Göttingen der Umstand, daß wir, trotz sehr intensiver Regen, unmittelbar vor und während dieser Zeit, dennoch hier als Ursache der Gewitter

1) v. Bezold, Pogg. Ann 136, p. 513, 1869.

einen Wärmerückfall zu verzeichnen haben, und daß dann auf diese zahlreichen Gewitter ein starker Temperaturabfall folgt.

Die Göttinger Beobachtungen weisen außerdem noch zwei Maxima der Gewitterhäufigkeit auf, eins im Frühjahr (Apr. 1—10), das andere im Herbst (Sept. 28—Octob. 7), beide zu Zeiten, welche durch die Temperaturverhältnisse für Gewitterbildung sehr günstig sind; nämlich das erste in einer Periode ungewöhnlich rascher Temperaturzunahme, das zweite in einer solchen mit relatv schwachem Temperaturabfall. Es gehören deshalb diese secundären Maxima gewiß nicht unter die „Unregelmäßigkeiten", sie scheinen vielmehr wohl begründet. Das Frühjahrsmaximum findet sich ebenfalls, wenn auch erst um eine Decade später, in München und Zürich, man hat es aber wohl bislang übersehen; auch in Augsburg scheint es wenigstens angedeutet. Ein so spätes Herbstmaximum wie bei uns findet sich jedenfalls selten. Nur Augsburg bietet mit einem relativ hohen Werthe der Gewitterhäufigkeit für Sept. 8—17 ein Analogon dazu, vielleicht auch Buda und Tarnopol. In der Grafschaft Glatz treten eine Decade früher und eine später als bei uns Maxima der Häufigkeit auf, doch möchte ich hierauf kein allzu großes Gewicht legen, weil diese Reihe die Summe der Gewittertage von 10 Stationen darstellt, also die hohe Zahl der Gewitter zum Theil ihren Grund in der Ausbreitung derselben haben kann.

Die Tabellen 5 und 6 machen es wahrscheinlich, daß die Frühjahrs- und Herbstgewitter, wie die des Winters, der Mehrzahl nach Wirbelgewitter sind; es würde daher die Existenz unserer secundären Maxima der Gewitterhäufigkeit außer allen Zweifel gestellt sein, wenn sich ergeben sollte, daß auch die barometrischen Minima für die betreffenden Zeitabschnitte relative Maximalwerthe der Häufigkeit aufweisen.

2. Die tägliche Periode der Gewitter.

Zur Bestimmung der täglichen Periode wurden alle diejenigen Gewitter benutzt, für welche eine genaue Zeitangabe vorlag, diejenigen mit fehlender oder mangelhafter Stundenangabe („vormittags" etc.) mußten natürlich fortgelassen werden. Gewitter, welche während mehrerer Stunden andauerten, wurden für jede Stunde gezählt, z. B. „Gew. von 4—6. nachm." für 4—5 und 5—6 Uhr; lautete die Zeitangabe auf eine volle Stunde, z. B. 5, so wurde das Gewitter in die folgende Stunde (5—6) gestellt. Tab. 3 gibt demnach die Vertheilung von 536 Gewitterstunden von Göttingen über die einzelnen Jahresabschnitte. Man erkennt hieraus, daß (wie ebenfalls zuerst von Bezold[1]) betonte) in der täglichen

1) v. Bezold, Beobachtg. der met. Stationen im K. Bayern III, p. XLIV, 1881.

Periode zwei Maxima hervortreten, und zwar in allen Monaten, eins zur wärmsten Tageszeit, eins um Mitternacht. Die Lage dieser Maxima ist aber in den wärmeren Monaten eine etwas andere und die tägliche Periode eine etwas einfachere als in der kalten Jahreszeit. *Im Winterhalbjahre treten, wie es scheint, beide Maxima um einige Stunden früher auf als im Sommersemester, und das Nachmittagsmaximum zerfällt im Winter in zwei getrennte.*

Ich finde über die tägliche Periode der Gewitter nirgends so ausführliche Mittheilungen, daß dieselben für einen Ort mit hinreichend langer Beobachtungsdauer eine gesonderte Untersuchung für das Sommer- und das Winterhalbjahr möglich machten; in Wien und Buda sind die Wintergewitter viel zu selten, als daß sie einen Schluß auf die tägliche Periode gestatteten. Zum Vergleiche ziehe ich daher trotz der oben gemachten Bedenken Beobachtungen kürzerer Jahresreihen aus ausgedehnten Gebieten heran und gebe in Tab. 4 zunächst die tägliche Periode der Gewitter im deutschen Reichstelegraphengebiet, in Bayern und in der Grafschaft Glatz für die beiden Halbjahre.

Es ist lebhaft zu bedauern, daß das höchst werthvolle Material aus dem Reichstelegraphengebiete nicht ausführlicher publicirt worden ist. Bei der Zusammenfassung der Nachtgewitter in Gruppen zu je drei Stunden wird das nächtliche Maximum vollständig verdeckt. Ferner ist es wahrscheinlich, daß die Lage der Extreme in den verschiedenen Theilen des Gebietes etwas verschieden sein wird, es wäre daher zu wünschen, daß bei den späteren Mittheilungen der Ergebnisse, die Beobachtungen in wenigstens drei Gebiete (S, W und SW) getrennt würden. — Immerhin läßt die hier gegebene Zusammenstellung für April—Sept. ein scharfes Maximum in dem Nachmittagsstunden (4^h—5^h) erkennen. Das Nachmittagsmaximum der kälteren Jahreszeit zeigt sich früher und scheint sich auch in dieser Reihe, gerade wie in Göttingen, in zwei getrennte zu scheiden, von denen das erste gleich nach Mittag, das zweite einige Stunden später auftritt, beide sind durch einen sehr kleinen Werth der Häufigkeit getrennt. Dieselben Resultate liefern die bayrischen Beobachtungen. Außerdem aber scheint sich hier das Nachtmaximum ebenfalls zu theilen, das Hauptmaximum derselben tritt, wie in Göttingen, im Winter früher auf als im Sommer. Daß in der Grafschaft Glatz die tägliche Periode der Gewitter in der kälteren Hälfte des Jahres so wenig ausgeprägt erscheint, liegt wohl an der relativ kleinen Zahl der Wintergewitter, doch ist auch hier eine Tendenz zur Theilung des nachmittäglichen Maximums kaum zu verkennen.

Die Existenz eines doppelten Nachmittagsmaximums der Gewitterhäufigkeit während der kälteren Jahreszeit ist hierdurch für Deutschland mindestens sehr wahrscheinlich gemacht. Eine Erklärung desselben kann, wenn man auch für den Winter die Möglichkeit von Wärmegewittern zuläßt, folgendermaßen gegeben werden. Wärmegewitter entstehen dann am leichtesten, wenn der durch Insolation eingeleitete aufsteigende Luftstrom am intensivsten entwickelt ist, das ist in der kälteren Jahreszeit etwas früher der Fall als in der wärmeren, das Maximum der Häufigkeit der Wärmegewitter tritt daher im Winterhalbjahr früher ein als im Sommerhalbjahre. Die Wirbelgewitter dagegen werden zu den Tageszeiten am häufigsten sein, wo die Cyclonen am stärksten entwickelt sind. Nach Vincent[1]) erreichen die barometrischen Depressionen um 4^a und 4^p ihre größte Tiefe, das wäre zur Zeit der sommerlichen Maxima oder kurz nachher. Man kann die Thätigkeit der Cyclonen aber auch nach der Windgeschwindigkeit beurtheilen, man findet dann an den deutschen Küsten die größte Windgeschwindigkeit und damit die stärkste Ausbildung der Depressionen am Nachmittage im Winterhalbjahre etwas später als im Sommer[2]). In dieser Jahreszeit dürfte also das Maximum der Wirbelgewitter mit dem der Wärmegewitter zusammenfallen, im Winter dagegen nicht. Das erste nachmittägliche Maximum der Wintergewitter rührt hiernach von Wärmegewittern, das zweite von Wirbelgewittern her. — Ich verhehle mir nicht, daß man, da die meisten Wintergewitter Wirbelgewitter sind, erwarten könnte, daß das spätere Nachmittagsmaximum das absolute sein müßte, was nach dem vorliegenden Materiale nicht allem Zweifel überhoben ist. Allein man hat zu bedenken, daß die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Wirbelgewittern zur Zeit des ersten Maximums jedenfalls größer ist als die des Auftretens von Wärmegewittern am späteren Nachmittage. — Eine Erklärung für das frühere Auftreten des nächtlichen Maximums im Winter und dessen Theilung, wie sie aus den Beobachtungen in Bayern sich zu ergeben scheint, habe ich bislang nicht zu finden vermocht.

Wenn das Maximum der Gewitterhäufigkeit zur kälteren Jahreszeit früher statt hat als zur wärmeren, so wird man schließen

1) Vincent, Met. Zeitschr. 2 p. 299, 1885.

2) Hellmann (Met. Zeitschr. 2 p. 489, 1885) findet das Maximum der Windgeschwindigkeit

	Apr.—Sept.	Oct.—März
in Hamburg um	11^a—Mittag	11^a—1^p
in Keitum	11^a—Mittag	Mittag—1^p.

dürfen, daß im Jahresdurchschnitt dasselbe der Fall sein wird in einer kälteren Gegend, verglichen mit einer wärmeren. Die Untersuchungen Hildebrandssons für die Gewitter in Schweden bestätigen dieses, cf. Tab. 4. Das Hauptmaximum aller Gewitter des Jahres fällt in Deutschland auf 4^h—6^h p. m., in Götaland auf 3^h—5^h, in Svealand auf 3^h—4^h und endlich in Norrland auf 2^h—3^h. Ich will dazu noch hervorheben, daß in Schweden die Wirbelgewitter im Allgemeinen von SSW nach NNE ziehen (s. unten), aus ihnen kann also die Verschiebung der Eintrittszeit des Maximums der Häufigkeit mit zunehmender geographischer Breite nicht erklärt werden. — Das nächtliche Maximum stellt sich in Schweden später ein als bei uns.

3. Die Zugrichtungen der Gewitter und deren Perioden.

Ueber die Häufigkeit, mit welcher die Gewitter in Göttingen auf den verschiedenen Compasstrichen einherziehen, geben die Tab. 5 und 6 Aufschluß. Diese Tabellen zeigen, daß Gewitter aus den Richtungen zwischen NW über N bis SE nur in der wärmeren Tages- und Jahreszeit vorkommen; dies legt schon die Vermuthung nahe, daß diese Gewitter Wärmegewitter sind. Die Wirbelgewitter kommen wohl fast ausschließlich aus westlicher und südwestlicher Richtung; denn wenn die barometrischen Theilminima die Hauptdepressionen entgegen der Drehung des Uhrzeigers zu umkreisen streben, so werden die mit ihnen verbundenen Wirbelgewitter durchschnittlich nur aus W, SW oder S heraufgehen können, da die großen Zugstraßen der barometrischen Minima nördlich von uns von SW nach NE gerichtet sind. Die Fälle, an denen die Depressionen südlich von uns vorbeiziehen uns also Wirbelgewitter aus östlicher Richtung bringen können, sind namentlich im Sommer selten.

Der jährliche Gang der Gewitterhäufigkeit auf den acht Compasstrichen wird anschaulicher durch eine graphische Darstellung, wie ich sie auf der beigegebenen Tafel in Fig. 1 für Göttingen gebe. Wie man sieht, ist dieselbe nach Art der Windrosen für die Häufigkeit der Winde entworfen, indem auf den Compasstrichen Längen proportional der procentischen Anzahl der Gewitter, welche auf dem betreffenden Striche heraufzogen, aufgetragen und dann das Gewitterpolygon construirt wurde; 1 Millimeter entspricht 1 Procent. — Die mittlere Richtung aller Gewitter läuft aus S 68 $^1/_6$° W.

Um einen Ueberblick über die Hauptzugrichtungen der Gewitter in Europa zu gewinnen, habe ich in Tab. 7 die

Vertheilung der Gewitterhäufigheit in Procenten für eine Reihe von Ländern zu bestimmen versucht, und die Ergebnisse auf der Tafel in Fig. 2—13 graphisch dargestellt. Die Hauptrichtung der Gewitter in Oberitalien ist darnach nahe rein aus W., in Mittel- und Unteritalien dreht sie sich nach N. hinüber. In Frankreich beinahe SW, wird sie nach E hin über Bayern nach Böhmen und Oesterreich mehr und mehr westlich. In Ungarn sind Gewitter aus N am häufigsten, aus SW am seltensten. Es machen hier, wie bereits Hann[1]) hervorgehoben hat, die barometrischen Depressionen über der Adria und in Ungarn ihren Einfluß geltend. Im Reichstelegraphengebiete liegen die Verhältnisse wie in Frankreich, die Gewitter ziehen in überwiegender Mehrzahl aus SW, dasselbe wird voraussichtlich für Nordwestrußland gelten. Im Telegraphengebiet Kasan sind die Hauptrichtungen NW, W und SW in Uebereinstimmung mit den Zugstraßen der Cyclonen im europäischen Rußland nach Leyst[2]). In Schweden endlich dreht sich mit zunehmender geographischer Breite die vorherrschende Zugrichtung der Gewitter von SW gegen den Zeiger der Uhr nach Süden. Aus der Figurentafel springen diese Verhältnisse unmittelbar in die Augen.

Tabelle 1.

Jährlicher Gang der Gewitterhäufigkeit zu Göttingen 1857/80.

Decade		Gewitter	Lufttemperatur	Niederschlag Höhe mm	Niederschlag Dichtigkeit	Decade		Gewitter	Lufttemperatur	Niederschlag Höhe mm	Niederschlag Dichtigkeit
März	1—11	2	3.0	18	3.4	Juli	30—9	50	16.8	21	4.0
	12—21	1*	2.7	10	2.3		10—19	47	18.0	17	4.0
	22—31	8	4.9	11	2.3		20—29	42	18.1	23	5.3
April	1—10	10	7.2	13	3.5	Aug.	30—8	36*	17.5	22	5.0
	11—20	8*	8.2	12	3.2		9—18	48	17.8	26	5.2
	21—30	11	9.0	10	2.8		19—28	26	16.4	19	4.9
Mai	1—10	10	10.0	9	2.5	Sept.	29—7	21	15.7	18	4.2
	11—20	31	12.5	14	3.7		8—17	18	14.2	10	3.0
	21—30	40	13.6	16	3.4		18—27	4*	12.6	14	3.8
Juni	31—9	43	15.8	15	3.6	Oct.	28—7	8	11.6	13	3.4
	10—19	44	15.6	21	4.8		8—17	4	9.6	13	2.8
	20—29	46	16.6	21	5.1		18—27	0	7.4	15	3.8

1) Hann, Meteorolog. Zeitschr. 3 p. 287, 1886.

2) Leyst, Repertorium für Meteorologie 8, 1883.

Tabelle 2.

Die jährliche Periode der Gewitter.

	Zürich [1]) 90 Jahre	Augsburg [2]) 1812—37 und 1866—85	Bayreuth [2]) 1814—34 und 1850—85	München [2]) 1781—92, 1825—37, 1842—80	Prag [3]) 1840—85	Wien [4]) 1853—84	Buda [5]) 1861—70	Tarnopol [6]) Mittel aus 1861—85	Grafschaft Glatz [7]) 1877—85
Januar	4	6	—	2			—		1
Februar	8	9	3	1			—		1
März 1—11	3	5	4	2			3		11
12—21	6	8	1	2			—		1
22—31	10	7	11	3			2		18
April 1—10	32	13	15	10			3	0.08	1
11—20	55	25	21	29			1	0.13	25
21—30	52	27	26	22			11	0.42	42
Mai 1—10	66	38	40	36	31	12	11	0.29	77
11—20	74	47	52	43	43	37	24	1.12	68
21—30	102	56	61	58	56	32	21	0.92	111
Mai 31—Juni 9	114	65	77	75	72	47	21	1.29	142
Juni 10—19	155	75	87	59	65	39	19	1.54	108
20—29	138	50	69	68	71	30	13	0.83	115
Juni 30—Juli 9	102	73	82	72	73	41	23	1.30	204
Juli 10—19	121	75	85	60	62	43	22	1.26	199
20—29	122	75	78	82	65	36	20	1.04	117
Juli 30—Aug. 8	136	74	73	80	59	42	21	0.96	110
Aug. 9—18	155	66	61	52	55	38	24	0.87	84
19—28	112	39	43	51	52	25	22	0.50	102
Aug. 29—Sept. 7	59	26	36	31			10	0.42	39
Sept. 8—17	48	28	17	20			8	0.21	21
18—27	22	20	15	9			8	0.37	38
Sept. 28—Oct. 7	15	6	7	6			7		4
Oct. 8—17	8	6	2	3			4		27
18—27	—	1	2	—			2		—
28—31	} 15	—	—	—			1		5
Novemb.		4	3	3			—		10
December		7	—	2			—		4

1) Zeitschr. d. oest. Ges. f. Met. 16, p. 350, 1881.

2) Nach: Beobachtungen der meteorologischen Stationen im Königreich Bayern II—VII.

3) Láska: Die Gewitter von Prag 1840—85 in Magnet. u. met. Beobachtungen a. d. k. k. Sternwarte zu Prag i. J. 1885.

4) Hann, Met. Zeitschr. 3, p. 237, 1885.

5) Nach: Observationes meteorologicae ann. 1861—70, Budapestini 1884.

6) Satke, Met. Zeitschr. 3 p. 270, 1885.

7) Gef. Originalmittheilung des Hrn. Localisten A. Richter in Lichtenwalde (Schlesien).

Tabelle 3.

Die tägliche Periode der Gewitter zu Göttingen 1857—80.

	Apr.	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Apr.—Sept.	Oct.—März	Jahr
Mitternacht—1	—	—	—	1	1	—	2	—	2
1—2	—	2	2	1	1	2	8	—	8
2—3	—	—	1	2	2	1	6	1	7
3—4	—	—	—	2	—	2	4	—	4
4—5	—	—	—	2	2	—	4	—	4
5—6	—	1	1	—	1	1	4	—	4
6—7	—	—	—	—	—	—	—	1	1
7—8	—	1	1	—	1	1	4	—	4
8—9	1	1	1	—	2	1	6	—	6
9—10	—	1	—	—	—	—	1	1	2
10—11	1	1	3	2	2	—	9	—	9
11—Mittag	2	—	1	8	7	—	16	1	17
Mittag—1	1	2	11	5	5	1	25	3	28
1—2	2	3	14	17	11	1	48	5	53
2—3	1	7	13	14	8	5	48	2	50
3—4	2	11	15	24	14	3	69	—	69
4—5	2	14	15	19	13	4	67	3	70
5—6	3	11	10	13	11	7	55	1	56
6—7	4	7	11	8	8	5	43	4	47
7—8	1	6	4	19	6	4	40	1	41
8—9	2	3	5	6	3	1	20	—	20
9—10	1	3	4	1	1	—	10	—	10
10—11	—	2	4	2	3	1	12	3	15
11—Mitternacht	—	—	3	2	2	—	7	2	9

Tabelle 4.

Die tägliche Periode der Gewitter.

	Reichstelegraphengebiet 1882—85 [1]		Bayern 1880—85 [2]		Grafschaft Glatz 1877—85 [3]		Schweden 1871—75 [4]		
	April—Sept.	Oct.—März	April—Spt.	Oct.—März	April—Spt.	Oct.—März	Götaland	Svealand	Norrland
Mittern.—1			323	12	52	1	58	16	23
1—2	86	4	310	10	80	6	62	17	11
2—3			351	14	58	19	52	27	14
3—4			282	15	31	10	55	29	8
4—5	82	3	269	7	29	—	54	27	18
5—6			245	2	18	—	65	12	17
6—7			204	1	22	—	83	21	15
7—8	358	5	218	4	18	—	89	36	8
8—9			214	8	26	6	66	47	11
9—10			251	20	55	2	73	46	18
10—11	760	19	557	29	130	9	146	58	49
11—Mittag			995	26	222	—	265	127	97

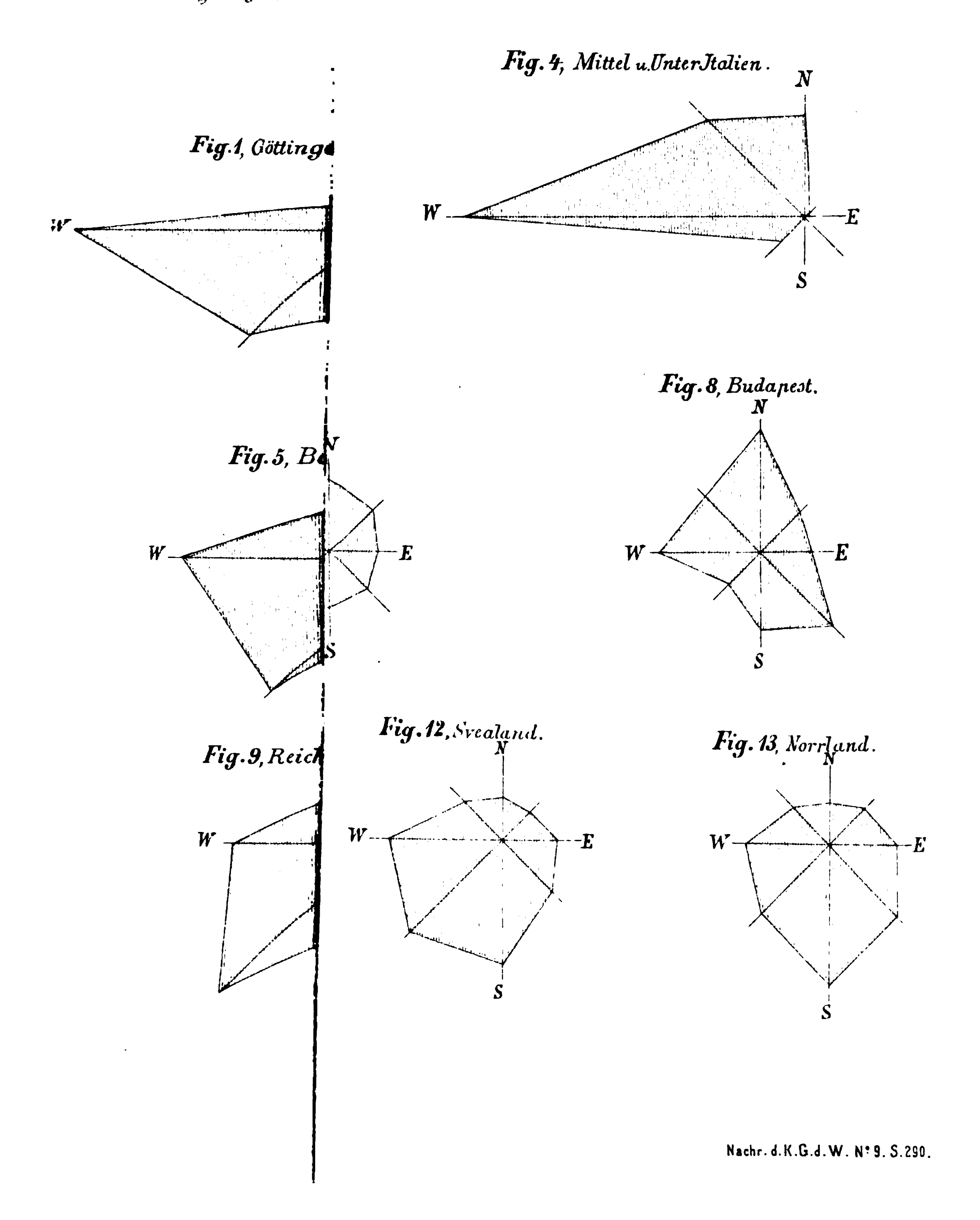
1) Nach: Electrotechnische Zeitschrift 1884—86.

2) Beobachtungen der met. Stationen i. K. Bayern VII p. XLIV.

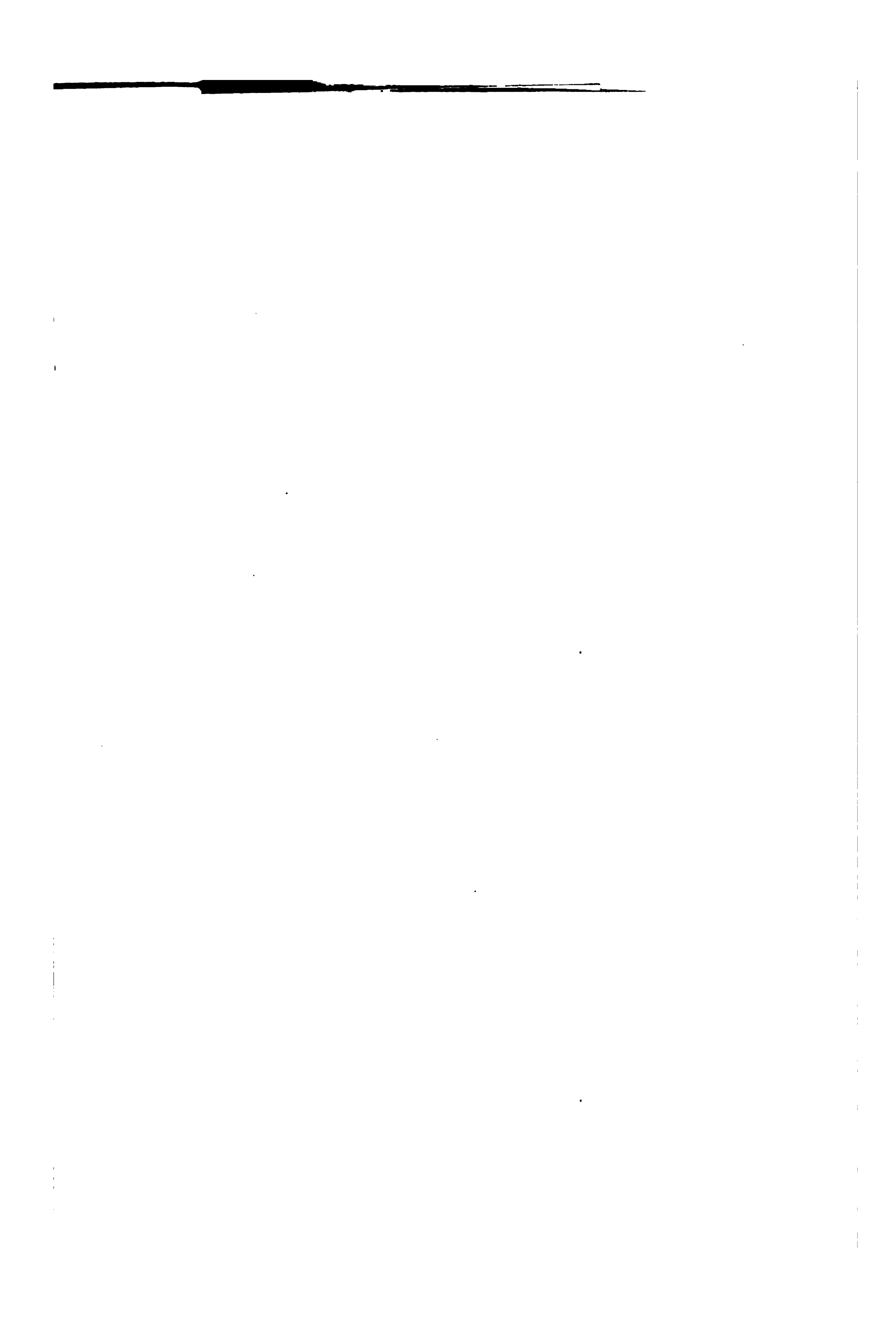
3) Gef. Originalmittheilung des Herrn A. Richter.

4) H. Hildebrandsson: Askvädren i Sverige 1871—75, Bihang till Kongl. Svenska Akademiens Handlingar 4, 1876/78.

Zu Hugo Meyer, Die (



Nachr. d. K. G. d. W. N° 9. S. 290.



Fortsetzung von Tabelle 4.

	Reichstelegraphengebiet 1882—85		Bayern 1880—85		Grafschaft Glatz 1877—85		Schweden 1871—75		
	April—Sept.	Oct.—März	April—Spt.	Oct.—März	April—Spt.	Oct.—März	Götaland	Svealand	Norrland
Mittag—1	555	17	1572	23	311	—	273	199	139
1—2	820	20	2244	47	444	4	318	265	155
2—3	1170	7	2999	98	470	9	371	344	188
3—4	1358	27	3148	87	479	6	399	450	182
4—5	1374	20	3165	68	564	12	400	429	168
5—6	1315	22	2591	68	528	10	313	331	169
6—7	1019	18	2075	58	431	3	214	260	126
7—8	749	6	1813	31	340	11	183	186	82
8—9	450	7	1458	21	315	6	169	129	75
9—10			885	13	258	1	133	84	59
10—11	357	15	650	15	177	1	80	55	35
11—Mittern.			416	32	111	—	68	23	23

Tabelle 5.

Vertheilung von 262 Gewittern zu Göttingen nach den Compasstrichen, aus denen sie heraufzogen.

	N.	NE.	E	SE.	S.	SW.	W.	NW.
April	—	—	—	—	—	2	6	—
Mai	2	1	2	5	4	7	12	—
Juni	3	—	4	4	8	13	23	5
Juli	3	—	1	2	12	15	34	6
August	2	—	4	1	10	11	29	—
September	—	—	—	—	1	9	9	2
Apr.—Sept.	10	1	11	12	35	57	113	13
Oct.—März	—	—	1	—	—	5	3	1
Jahr	10	1	12	12	35	62	116	14
in Procenten	3.8	0.4	4.6	4.6	13.3	23.7	44.3	5.3

Tabelle 6.

Vertheilung von 255 Gewitterstunden zu Göttingen nach den Compasstrichen.

	N	NE.	E.	SE.	S.	SW.	W.	NW.
Mitternacht—2	—	—	—	—	—	—	4	1
2—4	—	—	—	—	2	1	1	—
4—6	—	—	—	—	—	1	2	—
6—8	—	—	—	—	1	—	1	—
8—10	—	—	—	—	—	—	1	—
10—Mittag	1	—	1	—	3	3	7	—
Mittag—2	3	—	2	2	6	7	17	2
2—4	3	—	2	3	8	16	21	3
4—6	1	1	3	3	6	11	28	6
6—8	1	—	3	1	5	11	18	1
8—10	1	—	—	—	3	6	6	1
10—Mitternacht	—	—	—	—	1	6	6	—

Tabelle 7.

Vertheilung der Gewitterhäufigkeit in Procenten auf die Compasstriche.

	Beobachtungsjahre	Zahl d. Gewitt.	N.	NE	E.	SE.	S.	SW.	W.	NW.
Frankreich [1])	1865—77	3239	0.9	1.9	2.6	3.2	11.2	44.1	31.2	4.6
Ober-Italien [1])	1880—81	201	8.7	1.1	1.2	0.3	2.0	13.3	56.5	16.9
Mittel- u. Unter-Italien [1])	1880—81	201	16.1	0.8	0.6	—	—	5.4	55.0	22.1
Bayern [2])	1881—85	751	5.5	2.9	2.7	4.3	6.5	30.0	35.5	12.7
Prag [3])	1840—85	442	4.3	3.9	3.9	8.8	11.1	17.4	38.2	12.4
Wien [4])	1853—84	444	11.1	9.5	7.5	8.1	9.0	14.2	23.8	16.8
Budapest [5])	1861—70	195	19.1	8.7	8.2	16.2	12.3	7.2	16.2	12.3
Reichstelegraphengeb. [6])	1882—85	10488	3.4	4.8	5.3	8.4	11.8	33.5	22.2	10.5
Telegraphenbez. Kasan [7])	1880—82	4036	8.1	6.7	7.8	8.1	13.5	20.1	21.0	15.7
Götaland [8])	1871—75	3544	3.9	6.6	9.7	10.4	17.4	25.7	20.4	5.9
Svealand [8])	1871—75	2789	6.6	6.4	8.8	11.3	19.4	20.9	18.1	8.5
Norrland [8])	1871—75	1549	6.8	8.0	10.8	15.3	22.1	15.4	13.6	8.0

1) Ciro Ferrari, Das Wetter, 3 p. 209, 1886.

2) Beobachtungen d. met. St. im K. Bayern III—VII. Es wurden die Beobachtungen sämmtlicher Stafionen benutzt, ausgelassen sind nur die vereinzelten Angaben nach der 16theiligen Windrose. Aus einer Zusammenstellung der Vertheilung der Gewitter nach den Himmelsstrichen für die einzelnen Monate ist hervorzuheben, daß Gewitter aus den östlichen Richtungen zwischen N. und S. fast nur im Mai—Juli vorkommen. Die Richtung W. überragt mit Ausnahme von April (SW.) in allen Monaten, am meisten im Juli (W:SW. = 89 : 58).

3) Láska, l. c.

4) Hann, l. c.

5) Nach: Observationes metrologicae ann. 1861—70. Budapestini 1884. Ueber die Berechnung gilt dasselbe wie für Bayern.

6) Nach: Electrotechnische Zeitschrift 1884—86.

7) Nach: Weinberg, Gewitterbeobachtungen im Kasanschen Telegraphenbezirke in Rußland; Electrotechn. Zeitschr. 5 p. 254. 1884.

8) H. Hildebrandsson l. c.

Göttingen, d. 28. Febr. 1887.

Inhalt von Nr. 9.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

29. Juni. № 10. 1887.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 15. März.

Ueber den galvanischen Widerstand dünner Metallplatten;

Von **Rudolf Krüger.**

(Vorgelegt von Eduard Riecke.)

Die Widerstände, welche sich der Ausbreitung des galvanischen Stromes in leitenden Platten entgegensetzen, sind verhältnißmäßig selten Gegenstand experimenteller Untersuchungen gewesen. In der That ist auch die einfacher ausführbare Bestimmung der isoelectrischen Curven im Wesentlichen hinreichend, um die für die Ausbreitung des Stromes in leitenden Flächen aufgestellten Gesetze als richtig zu bestätigen. Dagegen bieten Widerstandsbestimmungen dünner leitender Schichten ein besonderes Interesse deshalb, weil sie einen Schluß auf die größere oder geringere Homogeneität derselben gestatten. In dieser Absicht habe ich auf Veranlassung von Hrn. Prof. Riecke die Widerstände von Aluminium-, Silber- und Goldblatt untersucht und erlaube mir im Folgenden die Resultate dieser Untersuchung mitzutheilen.

Die Gestalt der Platten war eine quadratische von etwa 86 mm. Seitenlänge. Um einen möglichst scharf begrenzten Rand zu erhalten, wurden für Aluminium und Silber aus einer etwas größeren quadratischen Platte von 100 mm. Seitenlänge die Formen von den gesuchten Dimensionen herausgeschnitten und auf diese Weise die ausgefransten Ränder entfernt. Das Gold gelangte ohne Umwand-

lung zur Untersuchung, weil Quadrate mit mehr als 85 mm. Seitenlänge nicht geliefert werden konnten; es muß jedoch hierbei bemerkt werden, daß die Ränder an und für sich weniger Unregelmäßigkeiten zeigten und weiter nur die besten Flächen ausgewählt wurden. Die Zuleitung des Stromes fand an einer Ecke des Quadrates statt und die Ableitung an der diagonal gegenüberliegenden Ecke; ist dann das Potential in irgend einem Punkte P_1 der Fläche gleich V_1 und an einem zweiten Punkte P_2 entsprechend gleich V_2, so ist der Widerstand, welchen die von den beiden durch P_1 und P_2 gehenden Niveaucurven und von der Begrenzung gebildete Fläche dem Strom darbietet, gegeben durch den Ausdruck:

$$w = \frac{V_1 - V_2}{i},$$

worin i die Intensität des Stromes bezeichnet, welcher durch die Electrode in die Fläche eintritt. Weil in den Potentialausdrücken im Zähler die Größe i als Factor auftritt, ist der Widerstand w in der That durch einen von i unabhängigen Ausdruck gegeben, welcher von den Dimensionen der Platte, der Lage der Punkte P_1 und P_2 und der specifischen Leitungsfähigkeit abhängt. Ist w durch Beobachtung bestimmt, so kann demnach die specifische Leitungsfähigkeit berechnet werden.

Die Platten stammen aus der Bronzefarbenfabrik des Hrn. W. Ehrmann in Fürth und erwiesen sich bei der chemischen Analyse als ziemlich rein. Das Silber hatte durchaus keine Beimengungen, während im Aluminium eine Spur Eisen und im Golde eine Spur Kupfer nachgewiesen wurde. Die Quantität der Verunreinigungen war aber in beiden Fällen zu klein, als daß sie gemessen werden konnte; schätzungsweise wurde auf allerhöchstens $^1/_{10}$ Procent geschlossen.

Die Widerstandsmessungen wurden nach einer von Hrn. Prof. Riecke angegebenen Modification der von Matthiessen und Hockin benutzten Brückenmethode ausgeführt; bei derselben wird die Einführung eines besonderen Vergleichswiderstandes dadurch umgangen, daß die Stromstärken in den beiden durch den Brückendraht verbundenen Zweigen der Wheatstone'schen Combination gleich groß gemacht werden. Die in der Figur 1 schematisch dargestellte Drahtcombination enthielt als Meßdraht $A\alpha\beta B$ eine vertical ausgespannte Neusilbersaite, welche in dem von Hrn. Dr. H. Meyer[1]) zu Widerstandsmessungen umgeformten

1) H. Meyer Wied. Ann. 22 pag. 460. 1884.

und früher beschriebenen Weber'schen Monochord befestigt war. Das Instrument gelangt, abgesehen von je einer Klemmschraube, welche an den Messingbacken A und B hinzugefügt wurden, ohne Veränderungen zur Benutzung. In dem Stromzweige $A\alpha'\beta'B$ war neben dem von A ausgehenden dicken kupfernen Leitungsdraht und der Metallplatte eine Unterbrechungsstelle angebracht, welche zur Ein- resp. Ausschaltung einer beliebigen Drahtlänge diente, um die Gleichheit der Widerstände in den beiden Zweigen $A\alpha\beta B$ und $A\alpha'\beta'B$ herzustellen. Die Methode, nach welcher die Gleichheit der Widerstände bestimmt wurde, war wiederum die Wheatstone'sche Drahtcombination, und zwar wurde dabei in folgender Weise verfahren. Der vom Commutator kommende Leitungsdraht wurde aus der Backe B gelöst und zum Verzweigungspunkt zweier Siemens'scher Normaleinheiten geführt. Von den Quecksilbernäpfen, in welche die freien Enden der Einheiten einmündeten, gingen einerseits die Galvanometerdrähte ab, andrerseits je ein dicker Kupferbügel zu der Backe B und zu dem Ende des aus B gelösten Leitungsdrahtes des Zweiges $A\alpha'\beta'B$. In der Backe A vereinigten sich die beiden Zweige und kehrten durch den Leitungsdraht zum Commutator zurück. Nachdem die Abgleichung erzielt war, wurde die frühere Verbindung wiederhergestellt und diejenigen Punkte α, β, ... auf dem Meßdrahte bestimmt, in denen dieselbe electrische Spannung herrschte als in den auf der Metallplatte fixirten Punkten α', β', ... Zur Abgleichung der Wiederstände sowohl als zur Bestimmung der Punkte gleichen Potentiales wurde eine empfindliche Wiedemann'sche Spiegelbussole mit großem Widerstande benutzt. Wie man sieht, liegen die Punkte α, β, ... auf dem Meßdrahte um so weiter von einander entfernt, je kleiner die Differenz ist zwischen dem Widerstande im Neusilberdraht und dem Widerstande, welchen die Metallplatte im Stromzweige $A\alpha'\beta'B$ darbietet. Bei der Verschiedenheit der untersuchten Materialien konnte dieses günstige Verhältniß nur bis zu einem gewissen Grade hergestellt werden; bei den Goldblättchen, welche einen bedeutend größeren Widerstand aufweisen als die gleich großen Aluminium- und Silberplatten, war es notwendig, den Draht mit einem dünneren zu vertauschen. Umgekehrt erforderten die Staniolplatten einen stärkeren Draht. Was die Untersuchungen über das calibrische Verhalten der Neusilberdrähte anbetrifft, welche in derselben Weise angestellt wurden, wie sie in der oben genannten Abhandlung des Hrn. Dr. H. Meyer[1]) be-

1) H. Meyer Wied. Ann. 22 pag. 460. 1884.

schrieben sind, so kann auch hier nur die große Homogeneität solcher Neusilberdrähte constatirt werden; selbst bei ganz dünnem Draht, wie er bei den Goldblättchen zur Verwendung gelangte, war es bei einiger Sorgfalt beim Ausziehen möglich calibrische Saiten zu erhalten.

Von den beiden Quecksilbernäpfchen, in welche die von A und B (Figur 2) kommenden Leitungsdrähte einmündeten, gingen 2 U-förmig gebogene Kupferelectroden E und E' aus; dieselben liefen unten in eine Spitze aus und wurden mittelst Federung gegen die Metallplatte gedrückt. Die Hülsen H und H', welche die Federn enthielten, waren parallel mit der Fläche der Metallplatte verschiebbar, so daß die Electroden leicht über die Platte hin fortgeführt werden konnten. Die Electroden wurden stets in 2 diagonal gegenüberliegenden Eckpunkten der Metallblättchen aufgesetzt; letztere lagen auf einer matt geschliffenen Glasscheibe und waren gegen äußere Einflüsse durch eine quadratische Spiegelglasplatte von 85 mm. Seitenlänge geschützt. Um den Zuleitungsdrähten E und E' Raum zu geben, waren 2 diagonal gegenüberliegende Ecken dieser Spiegelglasplatte abgeschliffen; außerdem waren 2 dünne Glimmerstreifen auf der untern Seite dieser Scheibe in unmittelbarer Nähe der abgestumpften Ecken festgeklebt, um die directe Berührung der Metallplatte und der glatten Glasdecke und ein damit verbundenes Unbrauchbarwerden für weitere Untersuchungen zu verhindern. Auf der zwischen den abgestumpften Ecken gezogenen Diagonale war die Glasdecke an 6 zu den Ecken symmetrisch gelegenen Punkten durchbohrt; der Abstand der Punkte von einander betrug 12 mm. Ueber den Durchbohrungen waren Metallhülsen q angebracht, welche 6 U-förmig gebogenen Electroden Führung gaben. Diese Electroden r gingen durch die Glasscheibe hindurch und berührten die Metallplatte mit einer Spitze; durch Belastung mit einem Bleigewicht p wurde ein sicherer Contact hergestellt; auf der andern Seite endigten die Electroden in 6 Quecksilbernäpfchen s, von denen aus dann die weitere Verbindung mit dem Galvanometer hergestellt wurde. Die Orientirung der Glasplatte und der von derselben getragenen Electroden geschah in der Weise, daß die Flächen des Metallblättchens und der Glasplatte zu vollkommener Deckung gebracht wurden.

Aus den quadratischen Aluminium- und Silberblättchen wurden je zwei rechteckige Platten ausgeschnitten, deren Länge gleich 86.3 mm., deren Breite gleich 29.2 mm. war; der dritte schmalere Streifen wurde nicht zur Untersuchung herangezogen. Die Zuleitungselectroden berührten auch hier die Metallplatte in 2 diagonal

gegenüberliegenden Eckpunkten. Die schützende Glasdecke hatte Seitenlängen von 86.3 mm. und 29.2 mm.; sie war, abgesehen von der Form und der Anzahl der Punkte, an denen die Spannung beobachtet wurde, in derselben Weise hergerichtet, wie es bei der quadratischen Gestalt soeben ausführlich beschrieben ist; statt der 6 Punkte dort waren hier nur 4 Durchbohrungen ebenfalls symmetrisch zu den Ecken und im gegenseitigen Abstand von 12 mm. auf der die Zuleitungselectroden verbindenden Diagonale angebracht. Bei dem Goldblatt wurde von einer Zerlegung in Rechtecke Abstand genommen.

Der Versuch, das specifische Gewicht der untersuchten Metallblättchen zu bestimmen, führte zu keinem Resultate; die Dicke der Platten konnte in Folge dessen nur annäherungsweise aus dem absoluten Gewicht unter zu Grundelung folgender Werthe für die specifischen Gewichte berechnet werden:

Aluminium $s = 2.6$
Silber $s = 10.4$
Gold $s = 19.3$

Im Mittel erhielt man daraus die folgenden Dicken:

Aluminium $d = 0.00047$ mm.
Silber $d = 0.00018$ mm.
Gold $d = 0.00009$ mm.

Um einen Maaßstab für die Brauchbarkeit der zur Widerstandsmessung angewandten Methode zu erhalten, wurde der Widerstand von drei kreisförmigen Staniolscheiben nach dieser und nach der von G. Kirchhof[1]) gegebenen Methode untersucht. Die Zuleitungselectroden waren in zwei diametral gegenüberliegenden Punkten des Randes so angelöthet, daß der Mittelpunkt des kreisförmigen Electrodenquerschnittes in den Rand fiel. Die Punkte, in denen die Spannung beobachtet wurde, lagen auf dem die Electroden verbindenden Durchmesser. Bei diesen Versuchen war keine Glasdecke mit Durchbohrungen vorhanden, sondern die U-förmig gebogenen Kupferelectroden wurden durch Federn direct gegen die Staniolscheiben gedrückt. Die Werthe λ der Leitungsfähigkeiten sind hier wie im Folgenden auf Quecksilber bei 0 Grad gleich 1 bezogen; die den Leitungsfähigkeiten hinzugefügten Klammergrößen bezeichnen die Temperaturen, bei denen die Versuche angestellt sind.

---

1) Kirchhof, Berl. Ber. 1880. pag. 601.

	Durchmesser	Dicke	Leitungsfähigkeit λ Kirchhof	neue Methode
Scheibe I	199.22 mm.	0.041 mm.	8.1466 ($t = 15.°3$)	8.1304 ($t = 15.°8$)
Scheibe II	206.44 „	0.013 „	8.2826 ($t = 14.°6$)	8.2660 ($t = 15.°0$)
Scheibe III	196.20 „	0.039 „	7.0808 ($t = 14.°0$)	6.8388 ($t = 13.°2$)

	mittlerer Fehler d. Resultates Kirchhof	neue Methode	Zahl d. Beobachtungen Kirchhof	neue Methode
Scheibe I	0.01277	0.00895	22	10
Scheibe II	0.03480	0.02266	12	12
Scheibe III	0.01150	0.03298	5	5

Eine Vergleichung der mittleren Fehler ergiebt, daß die hier zur Anwendung gebrachte Methode vollkommen brauchbare Resultate liefert. Die gefundenen Werthe der Leitungsfähigkeit stimmen auch mit den Resultaten anderer Beobachter vollkommen überein; nach älteren Bestimmungen an käuflichen Metallen findet

Lenz[1]) $\lambda = 6.65$
E. Becquerel[1]) $\lambda = 8.06$
Matthiessen[1]) $\lambda = 7.02$.

Die neueren Untersuchungen ergeben für die Leitungsfähigkeit des reinen Zinn

nach Matthiessen[2]) $\lambda = 7.56$
nach Benoist[3]) $\lambda = 8.23$.

Für den Fall der Stromverbreitung in einem Rechteck, in welchem beliebig viele Einströmungspunkte liegen, ist das Potential V durch den reellen Bestandtheil einer doppelt periodischen Function $U = V + Wi$ gegeben; der imaginäre Bestandtheil dieser Function gleich einer Constanten gesetzt, giebt die Gleichungen der Strömungscurven[4]). In unserem Falle ist der Rand des Rechtecks $abcd$ (Fig. 3) eine Strömungscurve. Durch wiederholte Spiegelung der Einströmungspunkte in Bezug auf die Seiten des Rechtecks kann man sich die Ebene bis ins Unendliche erweitert denken. Das Periodenparallelogramm $efgc$ soll so gewählt werden, daß der Mittelpunkt desselben den Nullpunkt des Coordinatensystems darstellt. Weil es sich im Folgenden nur um Potentialdifferenzen handelt, werden die additiv in dem Potentialausdrucke auftretenden Constanten nicht berücksichtigt werden; außerdem wird die Anzahl der Einströmungspunkte auf zwei beschränkt und vorausge-

1) Wied. Electricität. Band I. 1882. pag. 503.
2) ebendaselbst. pag. 508.
2) ebendaselbst. pag. 525.
4) E. Jochmann. Zeitschrift für Math. 1865. pag. 56.

setzt, daß die Intensität des Stromes im Schließungskreise gleich $+1$ ist; w_1 und w_2 seien die beiden Einströmungspunkte. Als singuläre Stellen (8 an der Zahl) treten dann auf:

$$w_1 \quad -w_1 \quad w_1' \quad -w_1' \quad w_2 \quad -w_2 \quad w_2' \quad -w_2'$$

und die Function $U = V + Wi$ nimmt die folgende Gestalt an:

$$U = V + Wi = -C\, lg \frac{\sigma(w-w_1)\,\sigma(w+w_1)\,\sigma(w-w_1')\,\sigma(w+w_1')}{\sigma(w-w_2)\,\sigma(w+w_2)\,\sigma(w-w_2')\,\sigma(w+w_2')}$$

abgesehen, wie schon erwähnt von Constanten. Die Größe C vor dem Logarithmus ist

$$C = \frac{1}{2\pi\lambda\delta}$$

wo δ die Dicke der rechteckigen Metallplatte und λ ihre Leitungsfähigkeit bezeichnet. Läßt man den Punkt w_1 in den Nullpunkt a rücken und den Punkt w_2 in die diagonal gegenüberliegende Ecke c, so reduciren sich die singulären Stellen von 8 auf 5 und die Function U geht über in:

$$U = V + Wi = -C\, lg \frac{\sigma^4(w)}{\sigma(w-\omega_1-\omega_3)\,\sigma(w-\omega_1+\omega_3)\,\sigma(w+\omega_1-\omega_3)\,\sigma(w+\omega_1+\omega_3)}$$

worin mit ω_1 und ω_3 die Halbperioden bezeichnet sind. Durch Zusammenfassen[1]) von $\sigma(w-\omega_1+\omega_3)$ und $\sigma(w-\omega_1-\omega_3)$ und entsprechend von $\sigma(w+\omega_1+\omega_3)$ und $\sigma(w+\omega_1-\omega_3)$ bringt man U auf die einfachere Gestalt:

$$U = V + Wi = -C\, lg \frac{\sigma^4 w}{(e_1-e_3)^2\,\sigma^4\omega_1\,\sigma^4\omega_3\,\sigma_2^4 w,}$$

oder, wenn man wieder von den constanten Gliedern $(e_1-e_3)^2\sigma^4\omega_1\sigma^4\omega_3$ Abstand nimmt:

$$U = V + Wi = -C\, lg \frac{\sigma^4 w}{\sigma_2^4 w}$$

Um hieraus den Potentialausdruck zu gewinnen, ist der reelle Bestandtheil abzutrennen. Die Function hat, nachdem die Scheidung in den reellen und imaginären Theil stattgefunden hat, die folgende Form:

$$U = V + Wi = -2\,C\, lg \frac{\sigma^2 u\, \sigma_2^2 vi - \sigma_2^2 u\, \sigma^2 vi}{\sigma_2^2 u\, \sigma_2^2 vi - (e_2-e_3)(e_2-e_1)\,\sigma^2 u\, \sigma^2 vi} -$$

$$-2\,C\, lg \frac{\sigma_2 u\, \sigma u\, \sigma_3 vi\, \sigma_1 vi + \sigma_3 u\, \sigma_1 u\, \sigma_2 vi\, \sigma vi}{\sigma_2 u\, \sigma u\, \sigma_3 vi\, \sigma_1 vi - \sigma_3 u\, \sigma_1 u\, \sigma_2 vi\, \sigma vi}$$

$$V = -\frac{1}{\pi\lambda\delta}\, lg \frac{\sigma^2 u\, \sigma_2^2 vi - \sigma_2^2 u\, \sigma^2 vi}{\sigma_2^2 u\, \sigma_2^2 vi - (e_2-e_3)(e_2-e_1)\,\sigma^2 u\, \sigma^2 vi},$$

1) Bei den Umformungen wurden die von Hrn. Prof. H. A. Schwarz herausgegebenen „Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Functionen" zu Grunde gelegt.

Für den speciellen Fall des Quadrates vereinfacht sich diese Formel noch weiter; es ist:

$$-e_1 = +e_3 \quad \text{also } e_2 = 0 \quad \text{und}$$

$$\frac{\sigma_2 vi}{\sigma vi} = \frac{1}{i}\frac{\sigma_2 v}{\sigma v}$$

$$V' = -\frac{1}{\pi\lambda\delta}\, lg \frac{\frac{\sigma_2^2 v}{\sigma^2 v} + \frac{\sigma_2^2 u}{\sigma^2 u}}{-e_1^2 + \frac{\sigma_2^2 u}{\sigma^2 u}\,\frac{\sigma_2^2 v}{\sigma^2 v}}$$

Weil die Punkte, an denen die Spannung beobachtet wurde, auf der die Zuleitungselectroden verbindenden Diagonale lagen, so ist in den Potentialausdruck V' noch $u = v$ zu setzen und die definitive Gestalt desselben ist dann:

$$V' = -\frac{1}{\pi\lambda\delta}\, lg \frac{2\,\sigma^2 u\, \sigma_2^2 u}{\sigma_2^4 u - e_1^2\, \sigma^4 u}$$

Durch Einführung der ϑ-Reihen an Stelle der σ-Functionen erhält man für die Spannung in einem beliebigen Punkte auf der die Zuleitungselectroden verbindenden Diagonale den Werth:

$$V' = -\frac{1}{\pi\lambda\delta}\, lg \frac{\vartheta_1^2(u)\,\vartheta_3^2(u)}{\vartheta_3^4(u) - \vartheta_1^4(u)}$$

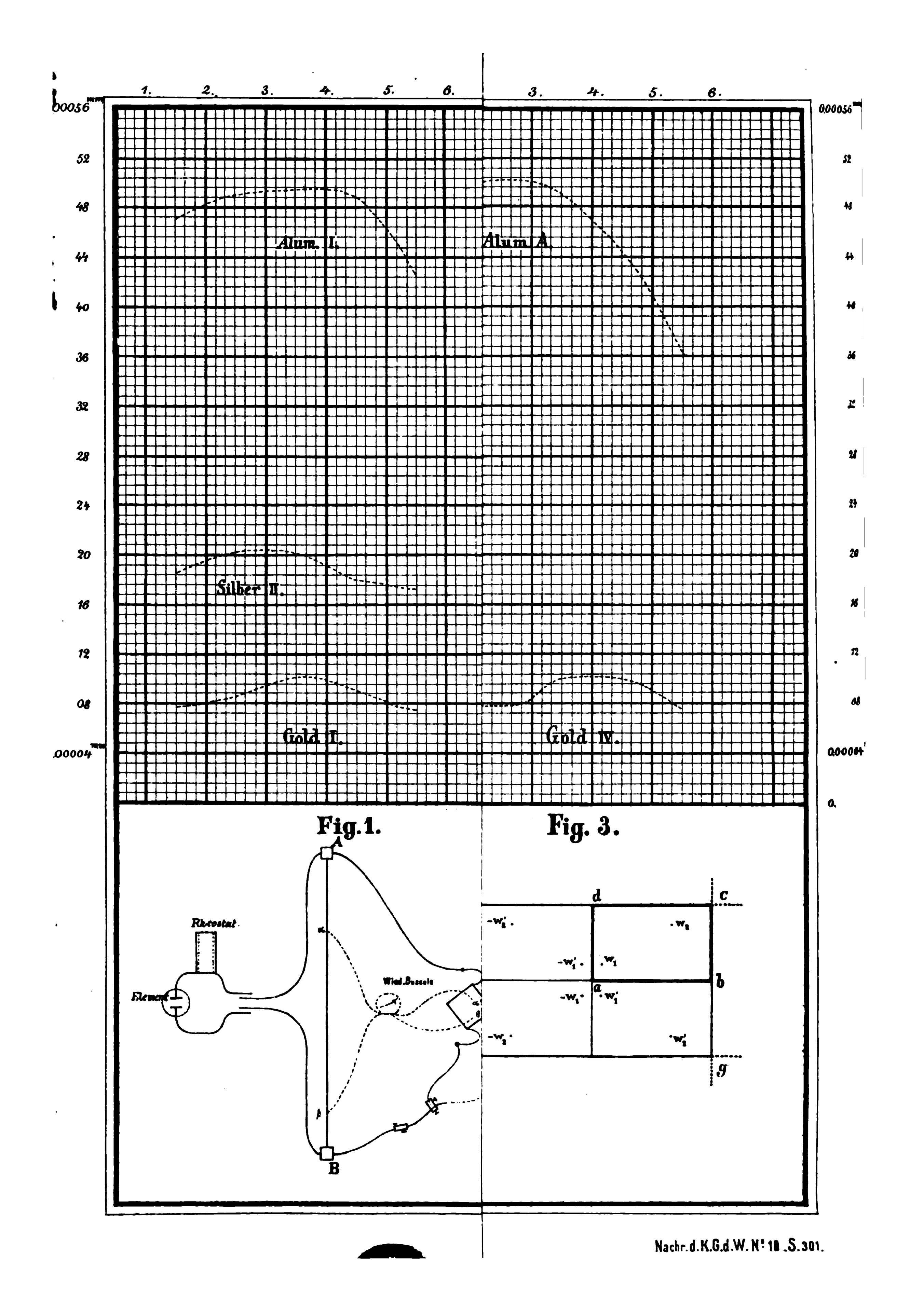
Der Leitungswiderstand, welcher dem Strom durch diejenige Fläche entgegengesetzt wird, welche durch die den Punkten u_1 und u_2 zugehörenden Niveaucurven und durch den Rand des Quadrates begrenzt wird, ist:

$$w = V_1' - V_2',$$

wenn man auch hier annimmt, daß die Intensität des ein- und austretenden Stromes gleich $+1$ ist. Setzt man den oben gefundenen Werth für V' in die letzte Gleichung ein, so erhält man:

$$w = \frac{1}{\pi\lambda\delta}\, lg \frac{\vartheta_1^2(u_2)\,\vartheta_3^2(u_2)}{\vartheta_3^4(u_2) - \vartheta_1^4(u_2)}\;\frac{\vartheta_3^4(u_1) - \vartheta_1^4(u_1)}{\vartheta_1^2(u_1)\,\vartheta_3^2(u_1)}.$$

Um die Beobachtungsart zu erläutern, möge je ein Protocoll für ein Quadrat und für ein Rechteck folgen. Die mit a bezeichnete Größe ist der Widerstand des Meßdrahtes für eine Länge von 1000 mm.; die Lage der Punkte gleichen Potentiales auf dem Meßdrahte und auf der Metallplatte ergeben die mit l und p bezeichneten Columnen; die Zahlen in der ersten Reihe geben die Stellung des beweglichen Schlittens gegen das feste mit einer Millimetertheilung versehene Gestell des Monochords, während die mit Hülfe eines Kathetometers gewonnenen Zahlen der zweiten Columne den gegenseitigen Abstand der Punkte P_1 P_2 . . . von einander und auch von den Zuleitungselectroden angeben; letztere sind in der Tabelle mit 0 und 10 bezeichnet.


1.
2.
3.
4.
5.
6.
3.
4.
5.
6.
Alum. I.
Alum. A.
Silber II.
Gold I.
Gold IV.
Fig. 1.
Fig. 3.
Rheostat
Element
Wied. Bussole
A
B
d
c
b
a
g

Aluminium. Quadrat A $\alpha = 1.3511$ Siemens

		l
Temp. 20°.1 C.	Punkt 1.	789.8
	„ 2.	809.8
	„ 3.	826.4
	„ 4.	841.9
	„ 5.	860.6
	„ 6.	888.0
	„ 5.	860.4
	„ 4.	841.9
	„ 3.	826.2
	„ 2.	809.9
	„ 1.	789.9
	„ 2.	809.9
	„ 3.	826.4
	„ 4.	842.0
	„ 5.	860.7
	„ 6.	888.0
	„ 5.	860.5
	„ 4.	841.9
	„ 3.	826.3
	„ 2.	809.8
Temp. 20.°2 C.	Punkt 1.	789.8

p							
Punkt 0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	10.
661.90	692.75	704.55	716.56	728.60	740.55	752.54	783.48
661.90	692.75	704.54	716.56	728.60	740.55	752.55	

Die Seitenlänge des Quadrates betrug $a = 86.373$ mm,

Dementsprechend ist das Protocoll für die rechteckigen Platten durchgeführt.

Aluminium. Rechteck A_a $\alpha = 1.3515$ Siemens.

		l
Temp. 20.°9 C.	Punkt 1.	788.0
	„ 2.	841.2
	„ 3.	884.8
	„ 4.	934.5
	„ 3.	884.7
	„ 2.	841.2
	„ 1.	788.0
	„ 2.	841.1
	„ 3.	884.7
	„ 4.	934.5
	„ 3.	884.7
	„ 2.	841.1
Temp. 21.°0 C.	Punkt 1.	788.0

p					
0.	1.	2.	3.	4.	10.
782.41	755.16	743.08	731.10	719.13	691.64
782.40	755.15	743.10	731.10	719.13	

Die Seitenlängen waren $a = 86.353$ mm. und $b = 29.239$ mm.

In den folgenden Tabellen sind die Resultate der Beobachtungen für die Aluminiumblättchen zusammengestellt. Die mit Quadrat I bezeichnete Platte war als bestes Exemplar einem Buche entnommen, welches ausschließlich Platten von der erforderlichen Größe enthielt; die späteren Quadrate II, IV und *A* wurden, wie schon erwähnt, aus größeren Flächen von 100 mm. Seitenlänge herausgeschnitten. Durch Zusammenfassen je zweier der 6 Punkte des Quadrates und der 4 Punkte des Rechteckes ergeben sich 15 resp. 6 Werthe für das Product $\lambda\delta$; die den einzelnen Größen vorgesetzten Klammern ergeben die Combination, aus welcher der betreffende Werth hervorgegangen ist.

Aluminium.

	Quadrat I	Quadrat II	Quadrat IV	Quadrat A
(1.2)	$\lambda\delta$ = 10.83179	$\lambda\delta$ = 7.52806	$\lambda\delta$ = 8.81919	$\lambda\delta$ = 7.93046
(1.3)	11.01967	8.13011	9.01133	7.95000
(1.4)	11.12113	8.25324	8.90089	7.92019
(1.5)	11.15652	8.26230	8.83946	7.66352
(1.6)	10.82605	8.54044	8.33160	7.13568
(2.3)	11.25675	9.01193	9.25622	7.97373
(2.4)	11.31384	8.79207	8.95355	7.91379
(2.5)	11.29825	8.61236	8.84797	7.55822
(2.6)	10.82218	8.89358	8.19621	6.93229
(3.4)	11.37772	8.56566	8.64383	7.85050
(3.5)	11.32020	8.41953	8.64744	7.35829
(3.6)	10.69211	8.85658	7.90091	6.65421
(4.5)	11.26862	8.29064	8.65077	6.94613
(4.6)	10.42407	8.98339	7.62300	6.24920
(5.6)	9.83066	9.66042	6.92277	5.77620
Mittel	$\lambda\delta$ = 10.97130	$\lambda\delta$ = 8.58669	$\lambda\delta$ = 8.50301	$\lambda\delta$ = 7.32083

	Rechteck II_a	Rechteck IV_a	Rechteck A_a
(1.2)	$\lambda\delta$ = 9.33372	$\lambda\delta$ = 7.90383	$\lambda\delta$ = 5.72662
(1.3)	9.64212	8.33920	6.16306
(1.4)	9.58457	8.64439	6.12196
(2.3)	9.99195	8.83918	6.69548
(2.4)	9.72016	8.86941	6.34705
(3.4)	9.47277	9.32007	6.04209
Mittel	$\lambda\delta$ = 9.62422	$\lambda\delta$ = 8.65268	$\lambda\delta$ = 6.18271

	Rechteck II_b	Rechteck IV_b	Rechteck A_b
(1.2)	$\lambda\delta$ = 11.29247	$\lambda\delta$ = 7.58346	$\lambda\delta$ = 8.05278
(1.3)	10.83145	7.66092	8.68066
(1.4)	10.47154	7.94044	8.91640
(2.3)	10.38964	7.74377	9.44248
(2.4)	10.09517	8.13788	9.48321
(3.4)	9.82508	8.55956	9.42418
Mittel	$\lambda\delta$ = 10.48423	$\lambda\delta$ = 7.93766	$\lambda\delta$ = 8.99162

Im Mittel ergeben sich aus den verschiedenen Beobachtungen die folgenden Werthe:

Aluminium.

		Leitungs-fähigkeit	Dicke	Gew. d. quad. Platte	wahrsch. Fehler d. Resnlt.		Temp.
Quadrat	I	23.07	0.0004755 mm.	8.970 mg.	0.15384	(0.7%)	17.°0C.
„	II	17.62	0.0004874 „	9.109 „	0.17517	(1.0%)	19.2
„	IV	17.89	0.0004754 „	9.038 „	0.22623	(1.3%)	21.4
„	A	16.02	0.0004569 „	8.863 „	0.26299	(1.6%)	20.1
Rechteck	II_a	19.75	0.0004874 „		0.12724	(0.7%)	18.9
„	II_b	21.51			0.29559	(1.4%)	19.7
„	IV_a	18.20	0.0004754 „		0.28212	(1.6%)	21.7
„	IV_b	16.70			0.21125	(1.2%)	22.1
„	A_a	13.53	0.0001469 „		0.19470	(1.4%)	20.9
„	A_b	19.68			0.33802	(1.7%)	20.4

Die Abhängigkeit des specifischen Widerstandes für reines, weiches Aluminium von der Temperatur, läßt sich durch die Formel:

$$r_t = r_0\ (1 + 0.003876\ t - 0.000001320\ t^2)$$

darstellen[1]); die Leitungsfähigkeit des Metalls berechnet sich darnach für die Temperatur 20.0

$$\lambda = 28.628.$$

Dagegen giebt die obige Zusammenstellung im Mittel eine Leitungsfähigkeit von 18. Würde man den Grund für diese Abweichung in einer fehlerhaften Berechnung der Dicke suchen und dementsprechend das specifische Gewicht, welches der Berechnung der Dicke zu Grunde liegt, ändern, so würde man auf einen Werth $s = 4.1$ an Stelle von $s = 2.6$ geführt werden. Gegen eine Erwärmung der dünnen Metallplatte durch den hindurchgehenden Strom und eine damit verbundene Verminderung der Leitungsfähigkeit sprechen verschiedene Gründe; einerseits wurde der Strom stets nur momentan geschlossen und andrerseits würde sich eine solche Erwärmung durch Verschiebung der Punkte auf dem Meßdrahte bemerkbar machen, was aber, wie die oben angeführten Protocolle zeigen, durchaus nicht der Fall ist.

Die entsprechenden Resultate für die Silberblättchen finden sich in den folgenden Tabellen zusammengestellt.

---

1) Wied. Electricität Band I. 1882. pag. 524.

Silber.

	Quadrat II	Quadrat III	Quadrat IV
(1.2)	$\lambda\delta$ = 8.14284	$\lambda\delta$ = 8.52325	$\lambda\delta$ = 7.84799
(1.3)	8.45333	8.76587	7.86445
(1.4)	8.54125	8.85606	7.98455
(1.5)	8.36248	8.96550	8.08805
(1.6)	8.16327	9.00720	8.05607
(2.3)	8.86074	9.07407	7.88438
(2.4)	8.81081	9.07634	8.07279
(2.5)	8.45617	9.16000	8.19247
(2.6)	8.16921	9.15758	8.11986
(3.4)	8.75769	9.07879	8.28847
(3.5)	8.26135	9.20550	8.36523
(3.6)	7.97176	9.18463	8.19969
(4.5)	7.85141	9.32576	8.43894
(4.6)	7.68374	9.22948	8.16290
(5.6)	7.55000	9.15178	7.94652
Mittel	$\lambda\delta$ = 8.26907	$\lambda\delta$ = 9.05079	$\lambda\delta$ = 8.10082.

	Rechteck II a	Rechteck III a	Rechteck IV a
(1.2)	$\lambda\delta$ = 9.30796	$\lambda\delta$ = 8.87226	$\lambda\delta$ = 8.31380
(1.3)	9.60295	8.95283	8.10728
(1.4)	9.71943	8.90694	7.87053
(2.3)	9.93159	9.03936	7.90611
(2.4)	9.94383	8.92497	7.66273
(3.4)	9.95556	8.81770	7.43807
Mittel	$\lambda\delta$ = 9.74355	$\lambda\delta$ = 8.91901	$\lambda\delta$ = 7.88309

	Rechteck II b	Rechteck III b	Rechteck IV b
(1.2)	$\lambda\delta$ = 8.27478	$\lambda\delta$ = 9.03925	$\lambda\delta$ = 9.48128
(1.3)	8.92999	9.16813	9.22894
(1.4)	8.31404	9.08011	8.96045
(2.3)	8.10517	9.30468	8.98169
(2.4)	8.33457	9.10107	8.71596
(3.4)	8.56785	8.90995	8.47157
Mittel	$\lambda\delta$ = 8.42107	$\lambda\delta$ = 9.10053	$\lambda\delta$ = 8.97331

Aus diesen Beobachtungen ergeben sich folgende Mittelwerthe für die Leitungsfähigkeit der Silberblättchen.

Silber.

	Leitungsfähigkeit	Dicke	Gew. d. quad. Platte	wahrsch. Fehler d. Result.		Temp.
Quadrat II	43.84	0.0001886 mm.	14.538 mg.	0.36553	(0.8%)	23.°3 C
„ III	47.90	0.0001889 „	14.636 „	0.31180	(0.6%)	23.2
„ IV	45.00	0.0001800 „	13.543 „	0.17322	(0.4%)	21.8
Rechteck II$_a$	51.66	0.0001886 „		0.37540	(0.8%)	21.9
„ II$_b$	44.65			0.42349	(1.0%)	20.5
„ III$_a$	47.22	0.0001889 „		0.10958	(0.2%)	23.3
„ III$_b$	48.18			0.19201	(0.4%)	21.4
„ IV$_a$	43.79	0.0001800 „		0.47550	(1.1%)	20.9
„ IV$_b$	49.85			0.54800	(1.1%)	20.7

Die Leitungsfähigkeit des Silbers für die Temperatur t ist, wenn dieselbe bei 0 Grad gleich 100 gesetzt wird, durch folgende Formel [1]) gegeben:

$$\lambda_t = 100 - 0.38287\, t + 0.0009848\, t^2.$$

Hiernach ist bei 23.°0 $\lambda = 91.71$ oder in Quecksilbereinheiten $\lambda = 55.39$.

Das specifische Gewicht würde sich hier unter Annahme einer beobachteten Leitungsfähigkeit von $\lambda = 45$ unter denselben Voraussetzungen wie bei dem Aluminium auf $s = 13.1$ statt auf $s = 10.4$, also auf einen etwa 25% größeren Werth stellen.

Die folgende Tabelle enthält schließlich die Resultate, welche sich bei den Untersuchungen der Goldblättchen ergaben.

Gold.

	Quadrat I	Quadrat II	Quadrat III	Quadrat IV
(1.2)	$\lambda\delta$ = 1.02076	$\lambda\delta$ = 0.97741	$\lambda\delta$ = 1.05469	$\lambda\delta$ = 1.04892
(1.3)	1.04719	1.06623	1.13244	1.05467
(1.4)	1.11606	1.14303	1.17715	1.12488
(1.5)	1.12812	1.16013	1.15871	1.16331
(1.6)	1.08161	1.12743	1.11800	1.12747
(2.3)	1.08052	1.19867	1.24236	1.06172
(2.4)	1.18443	1.27949	1.26920	1.17861
(2.5)	1.17877	1.25759	1.20785	1.21844
(2.6)	1.10046	1.17631	1.13774	1.15263
(3.4)	1.32159	1.37929	1.29969	1.33749
(3.5)	1.23749	1.29035	1.19053	1.31975
(3.6)	1.10695	1.16947	1.10813	1.18468
(4.5)	1.16790	1.21747	1.10411	1.30366
(4.6)	1.03669	1.10043	1.04455	1.13117
(5.6)	0.95084	1.02188	1.00156	1.02262
Mittel	$\lambda\delta$ = 1.11729	$\lambda\delta$ = 1.17101	$\lambda\delta$ = 1.14978	$\lambda\delta$ = 1.16200

Die Zusammenstellung der Mittelwerthe der Leitungsfähigkeit liefert die folgende Tabelle.

Gold.

	Leitungsfähigkeit	Dicke	Gew. d. Platte	wahrsch. Fehler d. Result.		Temp.
Quadrat I	13.01	0.0000859 mm.	11.998 mg.	0.18603	(1.4%)	16.°0 C.
„ II	12.30	0.0000952 „	13.235 „	0.19454	(1.6%)	15.7
„ III	12.46	0.0000915 „	12.757 „	0.15967	(1.3%)	14.7
„ IV	13.37	0.0000869 „	12.094 „	0.19781	(1.5%)	16.9

Die Leitungsfähigkeit des harten Goldes ist unter zu Grundelegung von λ für Quecksilber bei 0 Grad gleich 1, für die Temperatur 0 gleich 47.07 [1]).

1) Wied. Electricität Band I. 1882. pag. 508.

Bei der Anwendung der Formel

$$\lambda_t = 100 - 0.36745\, t + 0.0008443\, t^2$$

ergiebt sich der auf Quecksilber reducierte Werth für die Temperatur 16.°0

$$\lambda_t = 44.4044.$$

Die beobachtete mittlere Leitungsfähigkeit bleibt also etwa 3.2 mal hinter der berechneten zurück. Diese Abweichung ist so groß, daß der Versuch, die Differenz durch ein größeres specifisches Gewicht und eine bedeutendere Höhe des Metalles zu erklären, absurd erscheint. Es bleibt hier nur die Annahme von Discontinuitäten in den leitenden Metallschichten übrig; dasselbe dürfte, wenn auch in geringerem Grade beim Aluminium und Silber der Fall sein. Wenn man die Leitungsfähigkeit der Platten als eine constante Größe betrachtet, so können aus den verschiedenen Beobachtungen der $\lambda\delta$ die Dicken der Platten an den verschiedenen Stellen berechnet werden (Fig. 4). Mit der einzigen Ausnahme des Aluminiumquadrates II haben alle Curven die Eigenschaft gemein, daß sie von der Mitte nach beiden Seiten hin abfallen; die ausgehämmerten dünnen Metallblätter werden also dem Rande zu stets dünner.

Göttingen, physik. Institut im März 1887.

Universität.

Preisstiftung der Wittwe Petsche geb. Labarre.

In Gemäßheit der Statuten dieser unter dem 10. März 1873 genehmigten Stiftung schreibt die juristische Fakultät folgende Preisaufgabe aus:

Das Wesen der Auflassung nach dem preußischen Grundbuchrecht von 1872.

Der Preis (Zweihundert Vierzig Mark) kann nur einer solchen Arbeit zuerkannt werden, deren Verfasser in diesem oder dem folgenden Semester als Studirender unserer Universität angehört. Die Preisarbeiten müssen spätestens bis zum ersten Januar 1888 dem Dekan der juristischen Fakultät übergeben werden, zugleich mit einem versiegelten, den Namen des Verfassers enthaltenden Zettel. Arbeit und Zettel müssen ein gleichlautendes Motto tragen.

Göttingen, am 7. Juni 1887.

Ziebarth,
d. Z. Dekan der juristischen Fakultät.

Bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

März und April 1887.

Pamietnik akademii umiejetnosci w. Krakowie. Wydzial matematyczno-przyrodniczy 1886. XII.
Sprawozdania Romisyi do Badania historyi Sctuki W. Polsce. Tom. III. Zeszyt II, III.
Journal of the College of science Imp. University Japan. Vol. I. Part I.
Memoirs of the literature College. Imp. University of Japan N. 1.
U. S. geological survey XI Geological history of lake Lahoutan by Isr. Cook Russell.
Smithsonian report 1884. Part II.
American journal of Mathematics. (Johns Hopkins Univ.) Vol. IX. N. 3.
Johns Hopkins University circulars. Vol. VI. N. 56.
Johns Hopkins University studies: fifth series IV: The city government of Saint Louis.
Bulletin of the American geographical society 1885. No. 4. 5. Vol. XIX N. 1. 1887.
Bulletin of the Un. St. geological survey N. 30—33.
Proceedings of the American philosophical society. Vol. XXIII. N. 124.
The transactions of the Academy of science of St. Louis. Vol. IV. N. 4. 1878—1886.
Journal ot the Elisha Mitchell scientific society for the year 1885—86.
Bulletin of the Museum of comparative Zoology. Vol. XIII N. 2. 3.
Transactions of the Connecticut Academy. Vol. VII. P. I.
Proceedings of the Canadian Institute. Toronto. Third series. Vol. IV. fasc. N. 2.
Report of the superintendent of the U. S. Coast and geodetic survey for the year 1884 to June 1885. a. Part I Text. b. Part II Scetches.
Ueber den Auf- und Zugang der Gewässer des Russischen Reiches bearb. v. M. Rykalschew (2. Supplbd. f. Meteorologie).
Wahre Tagesmittel und tägliche Variation der Temperatur an 18 Stationen des russ. Reiches (3. Supplbd. f. Meteorologie).
Katalog der meteorologischen Beobachtungen in Rußland und Finnland. (4. Supplbd. f. Meteorologie).
Jahrbuch d. K. Pr. geologischen Landesanstalt u. Bergakademie zu Berlin. 1885.
Zeitschrift d. deutschen Morgenländischen Gesellschaft. Band 40. Heft IV.
Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas. Coimbra. Vol. VII. N. 4.
Report of the scientific results of the exploring voyage of H. M. S. Challenger 1873—76.
a. Botany. Vol. II.
b. Zoology. Vol. XVII. Vol. XVIII first Part. Vol. XVIII Second. Vol. XVIII Plates. Vol. XIX.
Kosmos. Vol. I. N. 2. March 1887.
Mittheilungen der antiquarischen Gesellschaft in Zürich. Band XXI. Heft 7. Band XXII. Heft 1. 3.
Astronomische Mittheilungen v. Dr. Rudolf Wolf. N. 68.
Von der Magyar Tudományos Akadémia:
Almanach 1886.
Értesitö. 1885: 3—6. 1886: 1. 2.
Emlékbeszédek. III. 3—10. IV. 1.
Nyelvtudományi értekezések. XII. 6—12. XIII. 1. 2. 5.
Dr. Duka Tivadar. Kőrösi Csoma Sándor dolgozatai.

Nyelvtudományi Közlemények. XIX. 2. 3.
Nyelvemléktár. XIII.
Irodalomtörténeti Emlékek. I.
Hellebrandt Arpád. Catalogus librorum saeculo XV° impressorum quotquot in Bibliotheca Academiae Literarum Hungasicae asservantur.
Történettudományi Értekezések. XII. 3 5—10. XIII. 1. 3.
Társadalmi Értekezések. VII 10. VIII 1. 6.
Dankó József. A franczia könyvdíss.
Fejérpataky László. A királyi cancellária az Arpádok korában.
Dr. Wlassics Gyula. A bünkisérlet és bevégzett büncselekmény. I.
Historiae Hungariae Fontes Domestici. Vol. IV.
Monumenta Comitiorum Hungariae. Vol. IX.
Fejérpataky László. Magyarországi városok régi számadáskönyvei.
Majláth Béla. A szönyi béke okmánytára.
Br. Nyáry Albert: A heraldika vezérfonala.
Szentkláray J. A dunai hajóhadak története.
Szilágyi Sándor. A linczi béke okirattára.
Thaly Kálmán: A székesi gróf Bercsényi család 1525—1835.
Archaeologiai Közlemények. Vol. XIV.
Archaeolog. Értesitö. Uj folyam. V. 3. 4. 5. VI. 1. 2.
Természettudományi Értekezések. XIV. 9. XV. 1—18. f. Heft 1 B. XV.
Mathematikai Értekezések. XI. 10. XII. 1—11.
Mathematikai és természettudományi Értesitö. III. 6—9. IV. 1—6.
Dr. Mihalkovics Géza. A gerinczes állatok kiválasztó és ivarszerveinek fejlödése.
Mathematikai és természettudományi Közlemények. XX. 1—5. XXI. 1.
Ungarische Revue. 1885: 8—10. 1886: 1—10.
Bulletin. IV. V.
Naturwissenschaftliche Berichte. III.
Évkönyv. XVII. 3.
Bulletin mensuel de l'observatoire de l'université d'Upsal. Vol. XVIII. 1886.
Fortschritte der Chemie in den letzten 25 Jahren. Festrede v. 21. März 1887 geh. i. Polyt. in Charlottenburg.
Jahresbericht des Vereins für Erdkunde zu Stettin 1886.
The Canadian record of science. Vol. II. N. 6.
Johns Hopkins University Circulars. Vol. VI. N. 57.
Bullettino di bibliografia e di storia delle science matem. e fisiche. Tomo XIX. Maggio-Giugno 1886.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).



Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

Juli 20. **№ 11.** 1887.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 21. Mai 1887.

Ehlers legt eine Mittheilung von Herrn Dr. Brock vor: „Zur Systematik der Cephalopoden".

Meyer legt eine Mittheilung von „G. Daccomo und V. Meyer, Bestimmung der Dichte des Stickoxyds bei niederer Temperatur" vor.

Riecke legt eine Arbeit von Herrn Prof. Hermann in Königsberg i/Pr., Korresp. d. physikal. Klasse, vor: „Ueber Polarisation zwischen Electrolyten".

de Lagarde legt „Bemerkungen von L. Fuchs, ausw. Mitglied, zu einer Note des Herrn Hurwitz, enthalten in No. 6 Jahrg. 1887 p. 104 ff. der Nachrichten" vor.

Zur Systematik der Cephalopoden.

Von Dr. **J. Brock.**

(Vorgelegt von Ehlers).

1. Ein neuer Octopus (O. robustus n. sp.) von Neu-Süd-Wales.

Das zoologische Museum der Göttinger Universität erhielt im vorigen Jahre aus dem Nachlasse des Marinearztes Dr. Wilkens eine kleine Sammlung mariner Evertebraten, unter welchen sich auch eine für die Wissenschaft neue Octopus-Art befand, welche ich in Folgendem näher zu beschreiben gedenke. Obgleich man bei der Schwierigkeit, durchgreifende Charactere für die Begrenzung der Arten dieses schwierigen und deshalb mit unhaltbaren Arten

überlasteten Genus zu finden [1]), im Allgemeinen mit Aufstellung neuer Arten nicht vorsichtig genug sein kann, so besitzt doch diese neue Art, gleichwie O. ocellatus Quoy und Gaim., der jüngst von mir beschriebene O pictus [2]) und einige andere Arten eine so characteristische Zeichnung, daß er, wie ich hoffe, auch von dem ungeübtesten Beobachter unter allen Umständen wird wiedererkannt werden können.

Das Thier ist im Ganzen sehr gedrungen, fast plump gebaut, der Eingeweidesack fast kugelig, etwas breiter, als lang, hinten sanft abgerundet, in der Mittellinie der Bauchfläche durch eine seichte Furche getheilt. Die Oeffnung der Mantelhöhle ist eng und erstreckt sich nicht ganz bis zum medianen Augenrand; die Augen nicht prominirend.

Die Arme sind kurz, etwa nur doppelt so lang als der Körper, auffallend stumpf und gedrungen gebaut und an Länge unter sich fast gleich. Ihr Querschnitt ist ausgesprochen viereckig, indem sich an den Kanten der Rückseite zwei starke vorspringende Kiele ausbilden. Die Umbrella ist gut entwickelt und erstreckt sich zwischen den Rücken- und Baucharmen nicht ganz bis zu einem Drittel der Höhe der Arme, zwischen den Seitenarmen noch etwas weiter, nicht ganz bis zur Hälfte. Die Saugnäpfe sind fast sitzend, breit und in zwei sehr lockeren, weit auseinanderstehenden, nur undeutlich alternirenden Reihen angeordnet, die nur sehr allmählich nach der Spitze zu an Größe abnehmen. Nur die ersten beiden Saugnäpfe stehen in einer Reihe, das Maximum der Größe erreichen sie zwischen dem 6. und 15., doch sind die ersten fünf Saugnäpfe kaum kleiner.

Der dritte rechte Arm war hektokotylisirt und merklich kürzer als der dritte linke; der hektokotylisirte Abschnitt verhältnißmäßig kurz (3 Mm), aber gar nicht, wie sonst bei den Octopoden mehr minder löffelförmig ausgehöhlt, sondern fast konisch. Der zu dem hektokotylisirten Abschnitt führende, von der Umbrella gebildete Halbkanal ist auffallend breit (2 Mm.).

Der Trichter ist von gewöhnlicher Gestalt und Größe. Die Ursprungslinie der Baucharme etwa der Hälfte seiner Länge entsprechend.

---

1) Vgl. darüber die treffenden Bemerkungen Hoyles (Rep. sc. result. voyag. H. M. S. Challenger. Zool. P. XII. Cephalopoda Lond. 1886 p. 75), denen ich vollkommen beistimme, ferner Brock Cephalopoda indica, Zoolog. Jahrb. Bd. II 1887, Einleitung.

2) Zeitschr. wiss. Zool. Bd. XXXVI p. 603.

Die Haut des Rückens, der ganzen Umbrella und der Außenseite aller Arme ist sehr stark runzlig, fast schwartig, auf der Außenseite der Arme sind die Runzeln sehr regelmäßig quer gestellt.

Die Farbe ist auf der Bauchseite des Eingeweidesackes, dem Trichter, der Innenseite der Saugnäpfe und der Umgebung des Mundes dunkel ockergelb mit feinen dunkelbraunen Chromatophoren dicht gesprenkelt. Die Bauchseite der Umbrella ist mit runden, c. 5 Mm. im Durchmesser haltenden dunkel schiefergrauen am Rande verwaschenen Flecken bedeckt, die auf dem ganzen Rücken und der Rückenseite der Umbrella zu einer ununterbrochenen Färbung zusammenfließen, in der oberen Hälfte der Arme aber scharf begrenzte Ringe um dieselben bilden, welche durch etwa ebenso breite Zwischenräume von der dunkel ockergelben Färbung der Bauchseite von einander getrennt sind. Auf dem dunklen Untergrunde der Flecke etwa in ihrem Centrum befindet sich eine sehr eigenthümliche Zeichnung, die an dem Spiritusexemplar trübe bläulich, im Leben wahrscheinlich brillant lafurblau gefärbt war. Es sind das Gruppen von 2—5 unregelmäßigen Ringen, welche mit ihren Peripherien theilweise zusammenfließen, so daß unregelmäßig rosettenförmige Figuren entstehen. Gewöhnlich ist einer der Kreise sehr viel größer, bisweilen mehr als doppelt so groß als die anderen.

Maße:

Totallänge	c. 80	Mm.
Länge des Körpers	28	„
Länge des Eingeweidesackes bis zur Mantelhöhlenöffnung	22	„
Größte Breite desselben	25	„
Länge des Trichters	8	„
Länge des 1. Armpaares	50	„
Länge des 2. Armpaares	50	„
Länge des 3. rechten hectokot. Armes	37	„
Länge des 3. linken Armes	55	„
Länge des 4. Armpaares	52	„
Höhe der Umbrella zwischen Rücken- und Baucharmen	15	„
Höhe der Umbrella zwischen den Seitenarmen	20	„

Die Art dürfte durch den gedrungenen, plumpen Bau, insbesondere der ausgeprägt vierkantigen Arme und die ganz eigenthümliche, entfernt an O. lunulatus Quoy und Gaim. erinnernde Zeichnung hinreichend gut characterisirt sein; eine besonders nahe Verwandtschaft mit einer schon bekannten Art vermag ich jedoch nicht zu erkennen.

Das einzige übrigens wohl erhaltene ♂ Exemplar der Göttinger Sammlung wurde nach dem auf der Etikette befindlichen Vermerk in den Sydney-Docks erbeutet.

2. Zur Systematik des Genus Cranchia.

In seiner ausgezeichneten Bearbeitung der Cephalopoden der Challenger Expedition hat sich Hoyle der dankenswerthen Aufgabe unterzogen, nach den in der Kopenhagener Sammlung befindlichen Originalexemplaren eine genaue Beschreibung der Cranchia Reinhardtii Strp. zu geben, von welcher bis jetzt nur die kurze Diagnose ihres Autors vorlag[1]). Dabei spricht Hoyle die Vermuthung aus, daß die von mir (Zeitschr. wiss. Zool. Bd. XXXVI 1883 p. 605) als Cr. Reinhardtii beschriebene Form des Göttinger Museums wohl nicht mit dieser Art identisch wäre.

Ich habe nun darauf hin das betreffende Exemplar und ein zweites, das ich vor einigen Jahren von dem Hamburger Naturalienhändler Putze erworben habe, einer genauen Vergleichung mit Hoyle's Beschreibung unterzogen, welche ergab, daß beide Exemplare ganz sicher zu Cr. Reinhardtii Strp. gehören. Die Unterschiede, welche Hoyle in meiner Figur in Bezug auf den allgemeinen Umriß insbesondere die Configuration des hinteren Körperendes zu finden glaubt, beruhen, wie ich gern zugestehe, auf einer nicht ganz glücklichen Reproduction. Es war eben an meinem Exemplare, abgesehen davon, daß vielleicht auch mein künstlerisches Können nicht ganz ausreichte, der Mantel so stark zerknittert (wie mehr minder bei allen Cranchien, die ich gesehen habe), daß bei der Wiederherstellung seines Umrisses während des Lebens der Phantasie ein gewisser Spielraum gelassen war. Die Originalexemplare, die Hoyle vorlagen, sind größer und auch wohl besser erhalten, als die meinigen. Ich will darum auf die ziemlich stark bauchige Form, welche ich dem Eingeweidesack in meiner Zeichnung gegeben habe, weiter keinen Werth legen und gern zugeben, daß der mehr tonnenförmige Umriß wie ihn Hoyle zeichnet, besser den natürlichen Verhältnissen entspricht; jedenfalls aber — und das möchte ich noch besonders hervorheben — kann ich nach Vergleichung der ausführlichen Hoyle'schen Diagnose erst recht nicht zugeben, daß ich mich seiner Zeit in der Bestimmung geirrt habe. Wenigstens sind die

1) Vgl. Vidensk. Selsk. Skr. 5 Raekke naturw. math. Afdel. 4 Bd. p. 200 Anm.

Abweichungen meiner beiden Exemplare von der Hoyle'schen Beschreibung durchaus nicht derart, daß die Aufstellung einer neuen Species gerechtfertigt werden könnte. Der Vollständigkeit wegen will ich dieselben indessen namhaft machen: hier sind sie:

1) An den bauchständigen Knorpelstreifen zähle ich je 15—16 Höcker, während Hoyle nur 13 angiebt.

2) Der 2. Arm ist nur etwas länger, als der erste, aber keinesweg doppelt so lang, wie bei Hoyle angegeben ist.

3) Der 3. Arm hat, wovon Hoyle nichts sagt, eine zarte aber deutliche Schwimmhaut, die bis zur Spitze reicht, und auch an den übrigen Armen glaubte ich Spuren davon zu sehen, kann aber wegen der Kleinheit der betreffenden Gebilde nichts sicheres aussagen.

4) Die Unterschiede in den Tentakelkeulen meines einen Exemplars (das andere war zu schlecht erhalten) gegen Hoyle's Beschreibung und Abbildung (Taf. XXXI Fig. 12) sind allerdings nicht unerheblich, können aber allein meinen Glauben an die Identität beider Formen nicht erschüttern. An meinem Exemplare stehen die vier Saugnapfreihen, sowohl in der Längs- wie in der Querrichtung viel dichter und regelmäßiger, als es Hoyle zeichnet. In der Richtung der Längsaxe so, daß sich die einzelnen Saugnäpfe fast berühren, in der Richtung der Queraxe verhalten sie sich etwas verschieden, indem die erste und zweite Reihe einerseits, und die dritte und vierte andererseits sich mehr genähert sind, aber auch der etwas weitere Zwischenraum zwischen der 2. und 3. Reihe ist immer noch geringer, als der Durchmesser der Saugnäpfe. In der Hoyle'schen Figur sind die Saugnäpfe kleiner und stehen unregelmäßiger und weiter aus einander, so daß der Abstand zwischen der 2. und 3. Reihe oft gleich dem doppelten Durchmesser der Saugnäpfe ist. Die Schwimmhaut der Tentakelkeule finde ich verhältnißmäßig stark entwickelt und in regelmäßige transversale Falten gelegt, wie in ähnlicher Weise bei Ommastrephes Bartramii Les.

5) Ueber die Färbung des ersten Exemplares habe ich mich schon seiner Zeit (Zeitschr. wiss. Zool. Bd. XXXVI) ausgesprochen, das seitdem neu erworbene zeigt feine verwaschene hellbraune Punkte, die in unregelmäßigen weiten Abständen über den Körper und die Arme zerstreut sind, und nur auf der Rückseite der Keule sich zu zwei regelmäßigen Längsreihen ordnen. In der Cutis des Mantels und der Arme finden sich auffallend viele und große Kalkconcretionen.

Von diesen Abweichungen käme bei der Frage nach einer

specifischen Verschiedenheit meiner und der Hoyle'schen Exemplare nur 3) und 4) in Betracht. Die zarte Schwimmhaut des längsten Armpaares kann von Hoyle vielleicht nur übersehen sein, und auch von den mannigfaltigen kleinen Differenzen in den Tentakelkeulen möchten vielleicht noch manche bei einer erneuten Revision der Hoyle-Steenstrup'schen Exemplare verschwinden. Jedenfalls wäre es verfrüht bevor eine solche vorliegt und auf so geringes Material hin für die Göttinger Exemplare eine neue Art aufzustellen.

Hoyle hat auch das Originalexemplar von Cranchia maculata Leach im British Museum untersucht und den Eingeweidesack derselben vollkommen glatt gefunden. Damit muß die von mir seiner Zeit auf gewisse Gründe hin ausgesprochene Vermuthung, daß Cr. maculata vielleicht identisch mit Cr. Reinhardtii wäre, natürlich fallen gelassen und Cr. maculata als wohlbegründete, wenn auch ungenügend characterisirte Species (dem einzigen Exemplar fehlen Kopf und Arm) zunächst weiter geführt werden.

Daß die von Pfeffer[1]) mit einigen Zweifel zu Cr. Reinhardtii gebrachte Form, wohl eine neue nahe verwandte Art ist, muß ich Hoyle vollkommen beipflichten.

Bestimmung der Dichte des Stickoxyds bei niederer Temperatur.

Von **G. Daccomo** und **Victor Meyer.**

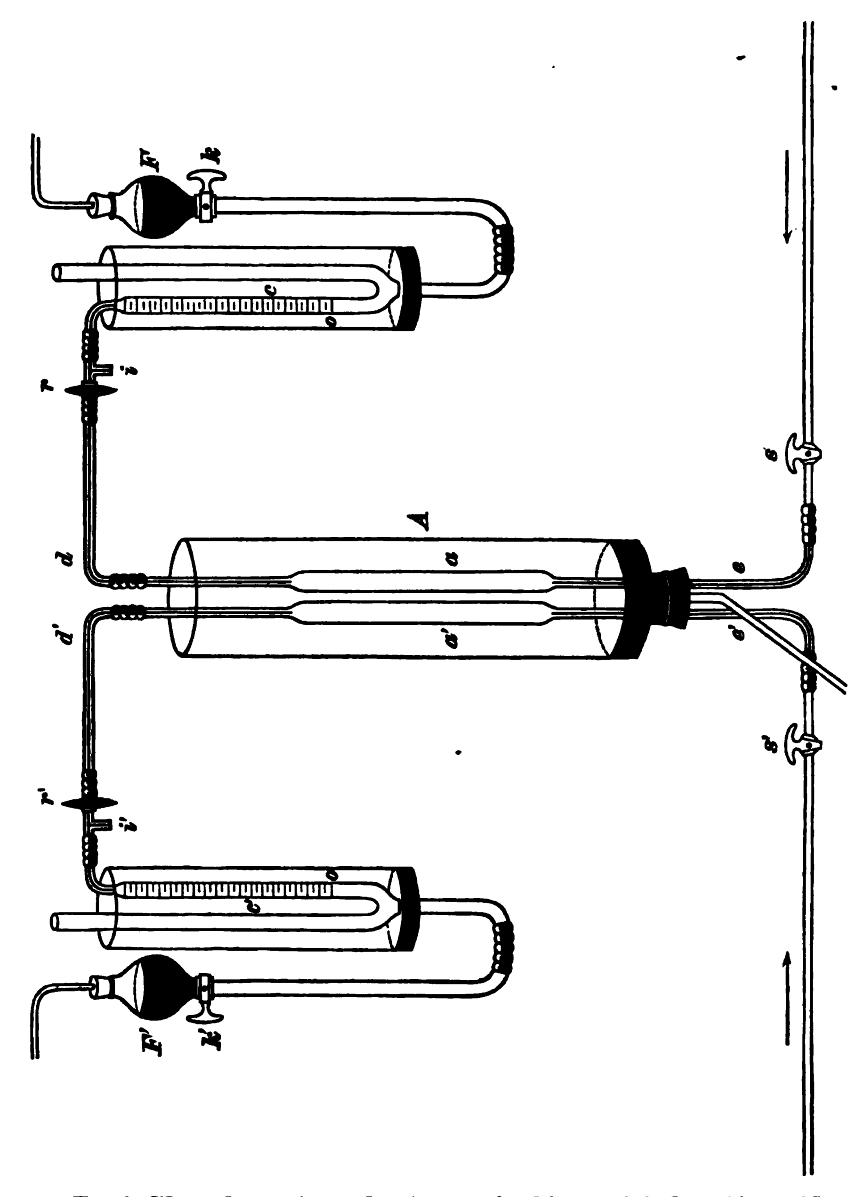
Zur Bestimmung der Dichte des Stickoxyds bei sehr niedriger Temperatur wurden wir durch die Erwägung veranlaßt, daß das ungesättigte Molecül NO_2, welches wir in der dissociirten Untersalpetersäure annehmen müssen, sich beim mäßigen Abkühlen in das gesättigte N_2O_4 verwandelt. Danach schien es nicht unmöglich, daß das Molecül NO, dessen Struktur mit den allgemeinen Prinzipien der Valenzlehre in Widerspruch steht, nichts anderes sei als das Produkt der Dissociation einer unbekannten Verbindung N_2O_2, welche möglicherweise bei niederer Temperatur beständig sein könnte[2]).

Die ersten Versuche stellten wir in folgender Weise an. Ein cylindrisches Glasrohr von 200 cc. Inhalt, das auf beiden Seiten

1) Pfeffer, Die Cephalopoden des Hamburger naturhistorischen Museums. Abhdl. naturw. Ver. Hamburg VIII 1884 p. 29 d. Sep.

2) Vgl. auch: K. Olszewski, Compt rend. 100, 943.

in Capillarröhren mündete, wurde mit trockenem Stickstoff gefüllt und mit einem Gefäß umgeben, daß zur Aufnahme einer Kältemischung bestimmt war. In daß Rohr ließ man aus einer Gasburette kleine, genau abgemessene Mengen von Stickoxyd eintreten und maß mit Hilfe einer zweiten Gasburette das austretende (verdrängte) Stickstoffgas. Bei Zimmertemperatur lieferte dieser Apparat natürlich für je 5 cc. eingeführtes Stickoxyd auch genau 5 cc. verdrängten Stickstoff. Beim Abkühlen mit einer Kältemischung aus Eis und Kochsalz zeigte sich zunächst eine Schwierigkeit, da die Temperatur selbst nicht vorübergehend konstant blieb; diese ließ sich indessen durch Einführung eines Abflußrohrs in die Kältemischung beseitigen, welches bewirkte, daß der flüssig gewordene Theil der Kältemischung fortdauernd abfloß. (Bei den Versuchen mit fester Kohlensäure und Aether bleibt dies — in der Zeichnung angedeutete — Abflußrohr fort). So blieb die Temperatur genügend lange konstant — eine oder wenige Minuten genügen für je eine Beobachtung —, um die Ablesungen bequem vornehmen zu können, und es zeigte sich auch hier, daß ein bestimmtes Volumen Stickoxyd, in den Apparat eingeführt, genau das gleiche Volumen Stickstoff verdrängte. Als wir nun aber zur Abkühlung mit fester Kohlensäure und Aether übergingen, war dies Verfahren, die Temperatur konstant zu halten, nicht mehr anwendbar und schien es uns daher bei weitem zweckmäßiger, den Apparat so zu modifiziren, daß es auf ein Konstanthalten der Temperatur überhaupt nicht ankommt. Wir haben zu diesem Zwecke das folgende einfache und recht bequeme Verfahren ausgearbeitet, welches vielleicht auch für andere Zwecke gelegentlich Anwendung finden kann.



Zwei Glasröhren (a und a_1) von je 21 cc. Inhalt, die beiderseits in dickwandige Capillarröhren münden, sind dicht nebeneinander in vertikaler Stellung in einem Glasgefäße (A), das zur Aufnahme der Kältemischung bestimmt ist, angebracht. Die kubischen Inhalte von a und a_1 wurden nach der von Bunsen angegebenen Methode genau gleichgemacht, indem man die Röhren zunächst möglichst gleich groß herstellte und den Inhalt der größe-

ren durch Einfügen sehr feiner Glasstäbchen soweit verkleinerte, daß er dem der kleineren genau gleich wurde. Die Anlöthung der oberen Capillare an die Gefäße geschieht erst nach Ausführung dieser Operation. Ein geschickter Glasbläser erreicht so ohne Schwierigkeiten, daß die Gefäße nach der Anfügung der Capillare vollkommen gleichen Inhalt haben. Die Gefäße sind in der aus der Figur ersichtlichen Weise mit zwei Gasburetten (c und c^1) in Verbindung gebracht, in welchen die Gase über Schwefelsäure aufgesammelt und gemessen werden konnten. Die Gasmeßröhren dieser beiden Buretten sind von genau gleicher Form und Größe und befinden sich in kaltem Wasser, das bei beiden stets genau die gleiche Temperatur besitzt. Die unteren Capillaren (e und e_1) führen zu Gasometern, in welchen die zu untersuchenden Gase (in unserem Falle Luft und Stickoxyd) aufbewahrt werden. Die Glashähne (s und s_1 und r und r_1) dienen dazu, die Gefäße von den Gasometern sowohl, wie von den Gasburetten absperren oder sie mit denselben in Verbindung setzen zu können. Die dickwandigen Capillarröhrchen i und i_1 sind am Ende offen, ihre Enden können aber durch Wachs leicht verschlossen werden.

Wir ließen nun einen Strom von trockenem, reinem Stickoxyd von s und e aus das Gefäß a passiren, bis das aus der Gasburette tretende Gas von Eisenvitriollösung vollständig absorbirt wurde. Zu gleicher Zeit wurde a_1 mit trockener Luft gefüllt. Die Hähne $r\,r_1$ nnd $s\,s_1$ wurden darauf geschlossen und von den Behältern $f\,f_1$ Schwefelsäure zutreten gelassen. Man öffnet die mit Wachs verschlossenen Oeffnungen $i\,i_1$, bringt die Schwefelsäure in den Burettenschenkeln in gleiche Höhe und auf den Theilstrich o und verschließt sodann i und i_1 wieder. Nun wird der Mantel A mit fester Kohlensäure und Aether gefüllt und die Hähne $r\,r_1$ sowie $k\,k_1$ werden geöffnet. Infolge der Abkühlung von $a\,a_1$ erhebt sich die Schwefelsäure in den Meßröhren der Buretten, und zwar bei beiden genau in gleichem Maße, wenn die zu vergleichenden Gase bei der Abkühlung keine Veränderung ihrer Dichte erleiden; eventuell läßt sich das Eintreten einer solchen genau verfolgen und messen. Sobald die Volumenverminderung ihr Maximum erreicht, werden die Hähne r und r_1 geschlossen und wird die Schwefelsäure in den beiden Schenkeln der Gasburetten in gleiches Niveau gestellt. Die nun folgende Ablesung des Standes der Schwefelsäure in den beiden Gasburetten ergab genau das gleiche Resultat: es änderte also das Stickoxyd seine Dichte beim Abkühlen nicht.

Inhalt der beiden Röhren (a und a_1), mit Wasser von 21° gemessen: 21 c.c.

I. Versuch: Temp. vor dem Versuche + 16° C.

	Luft	Stickoxydgas
Niveau der Schwefelsäure vor dem Versuch	13.90	14.00
Nach der Abkühlung	5.40	5.45
Contraction =	8.50 ccm.	8.55 ccm.

II. Versuch: Temp. vor dem Versuche + 21° C.

	Luft	Stickoxydgas
	15.05	15.00
	5.25	5.20
Contraction =	9.80 ccm.	9.80 ccm.

Der Apparat ist zugleich ein Luftthermometer und gestattet, unter Berücksichtigung des Volumens von a und a_1 (21,0 cc.), der Ausdehnung des Glases und der Kontraktion der Luft in a, genau die Temperatur zu ermitteln: dieselbe betrug beim Versuch I: — 67°, beim Versuch II: — 73°, und es ist also erwiesen, daß bei — 70° das Stickoxyd die nämliche Dichte besitzt wie bei der Zimmertemperatur (+ 16° C. und + 21° C.). Um uns nochmals zu vergewissern, daß bei dieser das Stickoxyd die für NO berechnete Dichte besitzt, haben wir eine in zwei capillare Stiele mündende Glasröhre von genau bekanntem Inhalte mit Stickoxydgas gefüllt und gewogen (wobei als Tara eine annähernd gleiche Glasröhre diente). Wir fanden so:

Inhalt des Rohr's mit Wasser von 22° ausgemessen: 320,6 ccm.
Uebergewicht des Rohr's, gefüllt mit Luft bei 19° C. und 744 mm. Druck: 5,9724
Dasselbe, mit Stickoxyd, bei 19° C. und 744 mm. Druck: 5,9865.

Diese Zahlen führen zu der Dichte 1,0372, während der für NO berechnete Werth 1.0384 beträgt.

Göttingen, Universitätslaboratorium.

Ueber Polarisation zwischen Electrolyten.

Von Prof. Dr. **L. Hermann** in Königsberg i/Pr.

Correspondenten der physik. Klasse.

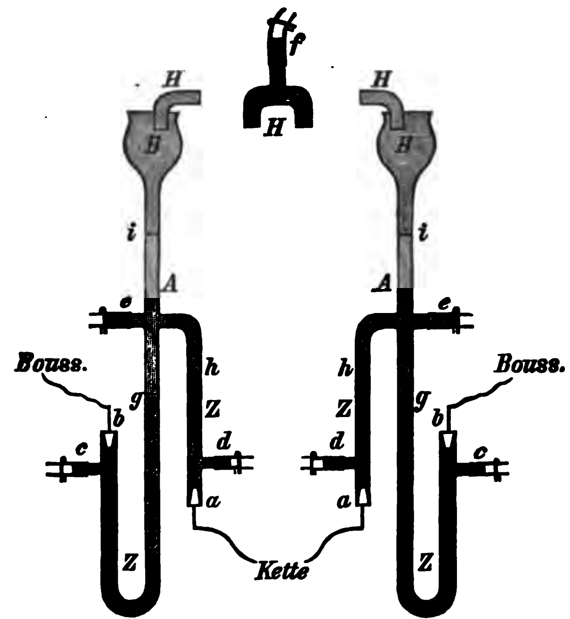
Untersuchungen über die von du Bois-Reymond entdeckte innere Polarisation der Muskeln und Nerven führten mich auf die Frage, ob diese Polarisation Beziehungen habe zu der ebenfalls von du Bois-Reymond gefundenen Polarisation an der Grenze

ungleichartiger Electrolyte [1]). Bald zeigte sich, daß diese letztere Erscheinung, welche in den letzten 30 Jahren nicht weiter untersucht worden zu sein scheint [2]), weiterer Ermittelungen bedarf; die hier mitzutheilenden Versuche sind größtentheils im Jahre 1884, in Zürich, zum Theil aber im letzten Jahre in Königsberg angestellt worden.

Die Versuche du Bois-Reymond's erstrecken sich nur auf Combinationen gesättigter Kochsalzlösung mit anderen Flüssigkeiten; diese Beschränkung war durch das angewandte Verfahren, namentlich durch die damaligen Multiplicatorelectroden, welche aus Platinblechen in gesättigter Kochsalzlösung bestanden, bedingt. Meine Versuche erstrecken sich auf mannigfachere Combinationen.

Der von mir angewandte Apparat, welcher im Laufe der Versuche vielfach variirt wurde, nahm zuletzt folgende Gestalt an.

ZAB, *ZAB* sind zwei oben mit Trichtern endende Glasröhren von 5—6 mm. lichtem Durchmesser. Bei *a* und *b* sind dieselben durch gut schließende Korke verschlossen, durch welche dicke amalgamirte Zinkdrähte in die Röhren hineinragen. Der schräg schraffirte Theil der Röhren bei *Z* ist mit gesättigter neutralerZinksulphatlösung gefüllt. Die Füllung geschieht, um jede Benetzung der oberen Röhrentheile mit der Lösung zu vermeiden, durch die mit Schläuchen und Klemmen versehenen Röhrenansätze *c c* und *d d*, an welche ein hebernder Schlauch angesetzt wird.



Die beiden Flüssigkeiten, welche zum

1) Monatsber. d. Berliner Akad. 1856, S. 395; auch Moleschott's Untersuchungen etc. Bd. IV, S. 144, und du Bois-Reymond's gesammelte Abhandlungen Bd. I S. 1.

2) Wiedemann's Lehre v. d. Electricität, 3. Aufl. Bd. II, S. 778—783 erwähnt keine weitere Arbeit über diesen Gegenstand.

Versuche combinirt werden sollen, werden über die Zinklösung geschichtet, die schwerere *A* zu unterst. Die Flüssigkeit *A* wird durch die Röhrenansätze *e e* in der schon angeführten Weise eingelassen, so daß sie ebenfalls den mit der Flüssigkeit *B* zu füllenden obersten Röhrentheil nicht benetzt; der von der Flüssigkeit *A* eingenommene Raum ist vertical schraffirt. Die Flüssigkeit *B* endlich wird in die Trichter in dünnem gegen die Wand gerichtetem Strahle vorsichtig eingegossen, so daß sich zwischen *A* und *B* eine scharfe Grenzfläche bildet (ebenso wie zwischen *Z* und *A*). Die Trichter werden bis oben gefüllt, und endlich durch das Heberrohr *H* verbunden, in welches die Flüssigkeit *B* durch einen bei *f* angesetzten Schlauch mit Klemme aufgesogen wird.

Die Electroden *a a* führen den polarisirenden Strom zu; die Electroden *b b* leiten den Polarisationsstrom zu einem höchst empfindlichen Galvanometer ab. Die Aufwärtsbiegung der Röhrenenden *b* hat den Zweck zu verhüten, daß durch Herabsinken von Niederschlägen etc. die Gleichartigkeit der Boussolelectroden gefährdet wird.

Wie man sieht, hat der Apparat den Zweck die zu untersuchenden Flüssigkeiten ohne jede Anwendung poröser Scheidewände oder ausgezogener capillarer Röhrenenden in scharfen Grenzflächen communiciren zu lassen, weil bei den eben genannten Communicationsmitteln sich Umstände einmischen können, welche bei grundlegenden Versuchen zunächst principiell zu vermeiden sind. Daher wurden auch grundsätzlich alle Combinationen vermieden, welche zur Bildung von Niederschlagsmembranen an der Grenzfläche Anlaß geben. Es leuchtet ferner ein, daß die etwaige Polarisation an der Grenze der Zinklösung und der Flüssigkeit *A* vollständig eliminirt ist, weil die betreffende durchströmte Grenze *h* bei der Ableitung zum Galvanometer nicht in Betracht kommt. Nur die Polarisation an der Grenze *i* ist Gegenstand der Untersuchung. Läßt man daher die Flüssigkeit *A* auch die Trichter und das Verbindungsrohr *H* erfüllen, so zeigt sich, wovon ich mich häufig überzeugt habe, auch nach den stärksten Strömen keine Spur von Polarisation.

Soll die Polarisation zwischen Zinklösung und irgend einer Flüssigkeit untersucht werden, so wird natürlich der Raum von *A* ebenfalls von der Zinklösung eingenommen, so daß diese bis *i* reicht.

Der Apparat wird gut isolirt aufgestellt, indem beide Röhren von Schellbach'schen Haltern getragen werden, welche auf

Paraffinplatten stehen. Es sei noch bemerkt, daß die Röhren nicht, wie der Deutlichkeit halber gezeichnet ist, in einer Ebene stehen, sondern ihre Ebenen parallel sind, so daß sie ganz nahe zusammengerückt werden können; das Heberrohr *H* konnte daher nicht in situ gezeichnet werden.

Die alternirende Verbindung von *a a* mit der Kette und von *b b* mit der Boussole muß bekanntlich so geschehen, daß beide Kreise auf das Vollkommenste von einander isolirt sind. Ich benutzte hierzu anfangs, um die „Uebertragungszeit“ so kurz wie möglich zu machen, eine Paraffinwippe. Da aber die Polarisationsströme, wie wir sehen werden, äußerst beständig sind, so ist es viel einfacher beide Kreise völlig zu trennen, und jeden mit einem Schlüssel zu versehen; man öffnet den Kettenkreis, und schließt dann gemächlich den Boussolkreis. Eine einfache Vorrichtung verhütete, daß etwas aus Versehen einmal beide Kreise gleichzeitig geschlossen sind, wodurch wegen der gewaltigen Stromstärken das Galvanometer Schaden leiden könnte. Ich übergehe die Kontrolversuche, welche die vollständige Zuverlässigkeit der Vorrichtungen feststellten.

Die Kette muß sehr stark sein; ich benutzte meist 18—20 Zinkkohlenelemente, in neuerer Zeit eine Gleichstrommaschine von Siemens und Halske von 65 Volts Klemmspannung. Die Intensität des polarisirenden Stromes konnte jederzeit durch Einführung einer auf dem Boussolschlitten stehenden Thermorolle (mittels Umlegens einer Wippe), deren Ablenkungen für verschiedene Abstände auf Milli-Ampère graduirt waren, gemessen werden. Die electromotorische Kraft der Polarisationsströme wurde durch Kompensation bestimmt, und in Milli-Volt ausgedrückt.

Resultate.

Bei fast allen untersuchten Kombinationen zeigen sich Polarisationsströme, welche in zweifelfreien Versuchen stets und unabänderlich dem polarisirenden Strome entgegengesetzt gerichtet sind.

Die Polarisation entwickelt sich stets sehr langsam. Nach kurzen Schließungen (Bruchtheile von Secunden) zeigen zahlreiche Kombinationen völlige Stromlosigkeit. Nach mehreren Minuten ist die Polarisation, wo sie überhaupt auftritt, deutlich. Läßt man jetzt den Boussolkreis geschlossen, so sieht man den Strom oft gar nicht, meist aber sehr langsam abnehmen. Ich bemerke ausdrücklich, daß dies auch dann der Fall ist, wenn

die Uebertragungszeit von minimaler Kürze ist, so daß unzweifelhaft der volle Initialbestand zur Beobachtung kommt. Die Abnahme des Stromes geschieht so außerordentlich langsam, daß zum Verschwinden desselben unvergleichlich viel mehr Zeit erforderlich ist, als der polarisirende Strom geschlossen war. Schließt man bald wieder in alter Richtung, und untersucht nach einiger Zeit von Neuem, so hat die Polarisation beträchtlich zugenommen, und man kann auf diese Weise constatiren, daß das Wachsthum der Polarisation mit der Schließungszeit stundenlang fortdauert; allerdings wird dasselbe immer langsamer, so daß die Polarisation einem Maximum sich nähert.

Schließt man in umgekehrter Richtung, so nimmt die Polarisation mit derselben Langsamkeit ab, mit der sie entstanden ist. Es bedarf jetzt zum Verschwinden der Polarisation, resp. zur Umkehr, ziemlich genau gleicher Dauer des Gegenstroms, wie der erste Strom geschlossen war.

Der Sitz der electromotorischen Kraft, welche beobachtet wird, ist die Grenzfläche *i i*. Dies wurde zunächst dadurch constatirt, daß der Strom wegfällt, wenn man nach erfolgter Durchströmung das Heberrohr *H* entfernt, und zwischen den Röhrenansätzen *e* (welche, wie oben bemerkt, in Wirklichkeit parallel nebeneinander stehen) eine aus der Flüssigkeit *A* gebildete Verbindung herstellt. Zu diesem Zwecke brauchte nur zwischen die Kautschuckschläuche *e e* ein T-Rohr eingesetzt zu werden, dessen unpaarer Schenkel offen ist, und in welches man durch Lüften der Klemmen *e e* etwas Flüssigkeit einläßt. Das Galvanometer zeigt jetzt keinen Strom an. Entfernt man aber diese Querverbindung, und bringt nun wieder das Heberrohr *H* an, so ist der Polarisationsstrom in nahezu alter Stärke wieder da.

Taucht man, während der Polarisationsstrom vorhanden ist, einen dünnen Glasstab in einen der Trichter, senkt ihn bis über die Grenzfläche *i* hinaus ein, und zerstört durch Hin- und Herbewegen die Schichtung, so zeigt sich nach Entfernung des Stabes die Polarisation beträchtlich, und zwar ungefähr um die Hälfte, vermindert. Wiederholt man die gleiche Procedur auch auf der anderen Seite, so wird die Polarisation nahezu vollständig zerstört.

Hieraus ist zu schließen, daß die Polarisation ihre Ursache in einer Anordnung der Theilchen an der Grenze beider Flüssigkeiten hat, und daß diese Anordnung mechanisch zerstörbar ist; ferner daß die electromotorische Kraft sich ungefähr (wahrscheinlich genau) zu gleichen Theilen auf beide Grenzflächen vertheilt [1]).

1) Es darf nicht unerwähnt bleiben, daß in einzelnen Fällen das Rühren

Schließt man nach der eben angeführten Verwischung der Grenzen den polarisirenden Strom von Neuem, so zeigt sich neue Polarisation; jedoch ist dieselbe schwächer als vorher. Gute Schichtung scheint also für die Polarisation günstig zu sein.

Um von der Größe des Polarisationsbetrages eine Vorstellung zu gewinnen, wurde wie schon oben bemerkt in den meisten Versuchen die Intensität des polarisirenden Stromes und die electromotorische Kraft des Polarisationsstromes bestimmt, und die letztere durch die erstere dividirt. Ist die Intensität in Ampère und die Polarisationskraft in Volt ausgedrückt, so hat der so bestimmte Quotient die Dimension eines Widerstandes und ist in Ohm ausgedrückt. Dieser Widerstand ist nichts Anderes als der scheinbare Uebergangswiderstand, welchen die Polarisation verursachte. Ist nämlich E die electromotorische Kraft, w der Widerstand im Kreise, und p die Polarisation, so ist die Intensität

$$I = \frac{E-p}{w}$$

der Quotient, welcher nach Obigem bestimmt wird ist

$$q = \frac{p}{I}.$$

Betrachtet man diesen wie einen sich zu w summirenden Uebergangswiderstand, anstatt die Polarisation zu Rechnung zu ziehen, so ergiebt sich

$$I = \frac{E}{w+q}$$

woraus sich mit Einsetzung des Werthes von q wieder der obige Werth von I ergiebt.

Es fragt sich nun vor Allem, ob dieser Quotient etwa für jede Combination eine Constante, mit anderen Worten, ob die Polarisation der Stromstärke proportional ist. Jede quantitative Bestimmung muß jedoch an dem Umstande scheitern, daß die Polarisation keinen Grenzwerth erreicht, sondern, wenigstens lange Zeit hindurch, mit der Schließungszeit zunimmt. Ich mußte mich daher darauf beschränken, den Quotienten für annähernd gleiche Schließungszeiten auszumitteln. Folgendes Beispiel möge einen solchen Versuch veranschaulichen.

---

auf der einen Seite von viel geringerem zerstörenden Effect war, als auf der anderen; jedoch bestand in dieser Hinsicht keinerlei Gesetzmäßigkeit in Beziehung auf die Stromrichtung, so daß wohl zufällige Störungen im Spiele waren.

Beispiel. 12. IV. 84.
A. Gesättigte Zinksulphatlösung.
B. Brunnenwasser.

Polarisirender Strom		Polarisation			
		nach kurzem Schluß (1/2 Secunde)		nach langem Schluß (3 Minuten)	
Zahl der Elemente	Intensität Milli-Ampère	Kraft Milli-Volt	Quotient Ohm	Kraft Milli-Volt	Quotient Ohm
1	0,07	0,030	**0,43**	2,519	**36,0**
5	0,41	0,180	**0,44**	8,723	**21,3**
18	1,51	0,394	**0,26**	24,651	**16,3**
54	4,61	1,438	**0,31**	33,891	**7,4**

Wie man sieht, besteht nur für sehr kurze Schlußzeiten eine annähernde Proportionalität zwischen Intensität und Polarisation, dagegen nicht für längere Schlußzeiten; sondern hier wachsen die Polarisationen weniger als die Stromstärken; es ist als ob erstere nicht bloß mit der Schlußzeit (s. oben), sondern auch mit der Stromstärke sich einem Maximum näherten.

Um von der Art des Wachsthums der Polarisation mit der Schlußzeit eine Vorstellung zu geben, dienen folgende Beispiele.

21. IV. 87.
A. Gesättigte Kochsalzlösung.
B. Salzsäure von 2 mol. (73 grm.) HCl im Liter.
Strom der Dynamomaschine. Intensität durchweg 147,6 Milli-Ampère.

Schlußzeit Minuten	Polarisationsbestand Milli-Volt	Quotient Ohm
1	16,37	**0,11**
4	36,42	**0,25**
5	47,99	**0,32**
6	59,70	**0,40**
7	62,67	**0,42**
9	66,10	**0,45**
14	69,41	**0,47**

18. I. 84.
A. Gesättigte Zinksulphatlösung.
B. Schwefelsäure von 5% acid. sulph. angl.
18 Elemente. Intensität durchweg 44,6 Milli-Ampère.

Schlußzeit Minuten	Polarisationsbestand Milli-Volt	Quotient Ohm
3	4,02	**0.09**
7	9,95	**0,22**
30	22,7	**0,51**
50	22,3	**0,50**

Die Art des Verschwindens der Polarisation nach der Oeffnung und durch Gegenströme verdeutlichen folgende Beispiele.

18. I. 84.

Zusammenstellung die vorige.

Intensität 27,5 Milli-Ampère.

Zeit	Polarisationsbestand Milli-Volt	Quotient Ohm
Nach 3 min. Durchströmung	18,76	**0,68**
3 min. nach Oeffnung	17,26	**0,63**
10 „ „ „	13,51	**0,49**
60 „ „ „	8,61	**0,31**

Die in 3 Minuten entstandene Polarisation ist also in einer Stunde nur um etwas über die Hälfte herabgesunken.

11. IV. 87.

A. Gesättigte Kochsalzlösung.

B. Schwefelsäure von 10% engl. Schw.

Es erfolgte keine Kraftmessung. 10 Elemente bewirkten folgende Polarisationsablenkungen:

nach 20 Min. Schlußzeit 269 sc.
„ 30 „ „ 347 „
„ 40 „ „ 335 „

jetzt in umgekehrter Richtung geschlossen:

nach 2 Min. Schlußzeit 320 sc.
„ 35 „ „ 29 „

Der Gegenstrom hat also die in 40 Minuten ausgebildete Polarisation in 35 Minuten nahezu beseitigt.

Schon die bisher mitgetheilten Beispiele zeigen, daß die Polarisationsbeträge relativ sehr gering sind; in den letztangeführten Fällen war der Quotient, d. h. der durch die Polarisation bedingte scheinbare Uebergangswiderstand, durchweg nur ein Bruchtheil eines Ohm, während der Gesammtwiderstand zwischen 500 und 1000 Ohm lag. Man sieht hieraus deutlich, daß diese Polarisationen am polarisirenden Strome selbst nicht merklich sein würden, da sie ihn nur um 1—2 p. mille schwächen können. Beim erstgenannten Beispiel lag allerdings der Uebergangswiderstand zwischen 7 und 36 Ohm, aber der Gesammtwiderstand betrug hier (wegen des Brunnenwassers) gegen 20000 Ohm.

Es fragte sich nun, ob sich Gesetzmäßigkeiten auffinden lassen

hinsichtlich des Einflusses der Komponenten einer Kombination auf deren Polarisirbarkeit. Die Schwierigkeit jeder quantitativen Ermittelung leuchtet aber ein, wenn man bedenkt, daß weder eine eigentliche Polarisationsconstante für jede Combination angebbar ist, da ja unser Quotient mit der Stromstärke variirt, noch bei dem stundenlangen Wachsthum der Polarisation die Erreichung eines Grenzwerthes abgewartet werden kann. Ferner ist anzunehmen, daß zahlreiche Umstände, wie Temperatur, Größe der Grenzflächen etc., in quantitativer Hinsicht von Einfluß sind.

Um trotzdem einige erste Anhaltspuncte zu gewinnen, habe ich mich auf Vergleichung verschiedener Kombinationen bei möglichst gleichen Schlußzeiten, und nicht allzu verschiedenen Stromstärken, beschränkt. Diese Versuche gestatten, einige Regeln aufzustellen, welche ich kurz angeben werde.

Meine Versuche erstrecken sich auf Kombinationen folgender Flüssigkeiten:

Brunnenwasser,
Salzlösungen: neutrale Alkalisalze, Zinksulphat, Kupfersulphat.
Säuren: Schwefelsäure, Salzsäure, Salpetersäure.
Alkalien: Kali, Natron, Ammoniak.

Die Lösungen waren theils gesättigte, theils titrirte (nur Schwefelsäure kam auch in Volumverdünnungen englischer Schwefelsäure zur Anwendung). Ich bereitete mir durch Titriren Säure- und Alkalilösungen, welche sämmtlich untereinander, und mit einer 10 procentigen Oxalsäurelösung äquivalent waren. Gleiche Volumina einer Säure- und einer Alkali-Urlösung gaben so eine neutrale Salzlösung, welche einer 5 procentigen Oxalsäurelösung äquivalent war; und sollte diese mit einer ihr äquivalenten Säure- oder Alkalilösung combinirt werden, so brauchte nur die betreffende Urlösung auf das doppelte Volum verdünnt zu werden. — In neueren Versuchen wurden die Urlösungen, statt einer 10 procentigen, einer „1 Molekül“ (= 90 grm.) im Liter enthaltenden Oxalsäure äquivalent bereitet, so daß die Versuchslösungen $^1/_2$ Mol. (oder 1 Mol. einwerthig) im Liter enthielten, und somit den Mohr'schen Normallösungen entsprachen.

Bemerkt sei noch, daß bei allen messenden Versuchen darauf geachtet wurde, daß die combinirten Flüssigkeiten Zimmertemperatur besaßen.

Bei weitem die größten Quotienten (bei längerem Schluß stets mehrere, bis zu 20, ja 40 Ohm) erhielt man bei der Combination von S a l z e n (besonders in gesättigter Lösung) mit B r u n n e n w a s s e r. Die folgende Tabelle giebt eine Anzahl solcher Ver-

suche an. Die Zahlen haben natürlich nur den Werth, eine annähernde Vorstellung von den in Betracht kommenden Größen zu geben; insbesondere gelten sie nur für die durch die Röhrenweite bedingten Stromdichten. Unter „kurzer Schluß" ist ein Schluß von ½ Secunde, unter „langer Schluß", wenn nichts Besonderes angegeben ist, ein solcher von 3—5 Minuten zu verstehen.

Datum.	Flüssigkeiten		Polar. Strom		Polarisation			
					Kurzer Schluß		Langer Schluß	
	A	B	Kette	Intens. M.-A.	Kraft M.-V.	Quot. Ohm.	Kraft M.-V.	Quot. Ohm.
11/II. 84	Na Cl gesätt.	Brunnenw.	18 El.	2,25	0,14	**0,06**	7,79	**3,46**
3/III. „	Zn SO_4 „	„	„	1,25	1,10	**0,88**	6,41	**5,13**
12/IV. „	desgl.	„	„	1,51	0,39	**0,26**	24,65	**16,3**
„ „	desgl.	„	54 El.	4,61	1,44	**0,31**	33,89	**7,4**
20/IV. 87	desgl.	„	Dynamo	0,52	—	-	11,42	**21,9** [1])
26/IV. „	desgl.	„	„	1,05	—	—	8,60	**8,2**
8/III. 84	Cu SO_4 ges.	„	18 El.	0,75	0,30	**0,40**	9,52	**12,7**
5/V. 87	Mg SO_4 „	„	Dynamo	1,37	—	—	14,38	**10,5**
2/IV. 84	Na Cl 3,25%	„	18 El.	1,06	0,06	**0,06**	7,62	**7,2**
3/IV. „	desgl.	„	„	1,00	0,12	**0,12**	16,65	**16,65**
6/III. „	Na_2SO_4 7,9%	„	„	0,88	0,28	**0,3**	8,67	**9,9**

Im Gegentheil die geringsten Quotienten zeigen Combinationen zwischen gesättigten Salzlösungen; hier findet man nicht selten geringe positive, d. h. dem polarisirenden Strome gleichsinnige Wirkungen. Da diese sonst nie und auch hier nur zuweilen auftreten, so dürfte es sich rechtfertigen, sie von der Einmischung gewisser Fehlerquellen herzuleiten, und zu sagen, daß die Polarisation zwischen gesättigten Salzlösungen wahrscheinlich gleich Null ist. Folgende Beispiele mögen dies erläutern.

Datum.	Flüssigkeiten		Polar. Strom.		Polarisation			
					Kurzer Schluß		Langer Schluß	
	A	B	Kette	Intens. M.-A.	Kraft M.-V.	Quot. Ohm.	Kraft M.-V.	Quot. Ohm.
3/II. 84	$ZnSO_4$ ges.	Na Cl ges.	18 El.	10,0	0	**0**	—	—
28/I. „	desgl.	desgl.	„	12,1	0	**0**	+0,5	**+0,041**
24/I. „	desgl.	desgl.	„	8,0	0	**0**	0	**0**
„ „	desgl.	desgl.	30 El.	11,2	0	**0**	+0,2	**+0,018**
7/III. „	desgl.	desgl.	18 „	6,25	0	**0**	0,08	**0,013**
„ „	desgl.	desgl.	„	4,4	0	**0**	0	**0**
26/IV. 87	desgl.	desgl.	Dyn.	39,5	0	**0**	1,31	**0,03**
7/III. 84	desgl.	$CuSO_4$ ges.	18 El.	6,7	0,02	**0,003**	+0,25	**+0,037**
„ „	desgl.	desgl.	„	3,6	0,01	**0,003**	∓ [2])	∓

1) 10 min. Schluß.

2) Schwach + mit neg. Vorschlag. Ohne Vorzeichen heißt negativ.

Zwischen diesen beiden Extremen stehen die Polarisationsgrößen aller anderen untersuchten Combinationen. Die Quotienten sind durchweg gering, auch bei längerem Schluß meist unter 1 Ohm. Bemerkenswerth ist, daß die chemische Natur der combinirten Flüssigkeiten, wenn nicht beide gesättigte Salzlösungen, oder die eine Brunnenwasser ist, keinen deutlichen Einfluß auf die Polarisationsgröße hat; es ist also ziemlich dasselbe ob die obere Flüssigkeit verdünnte Salzlösung oder Säure oder Alkali ist. Auch ist es gleichgültig, ob beide combinirte Lösungen einander genau äquivalent sind, oder nicht. Am besten wird man dies aus folgender Zusammenstellung von Beispielen sehen [1]).

Gesättigte und verdünnte Salzlösungen.

Datum.	Flüssigkeiten		Polar. Strom		Polarisation			
					Kurzer Schluß		Langer Schluß	
	A	B	Kette	Intens. M.-A.	Kraft M.V.	Quot. Ohm.	Kraft M.-V.	Quot. Ohm.
29. I. 84	$ZnSO_4$ ges. (50%)	$ZnSO_4$ 2,5%	18 El.	2,25	0,05	0,022	0,08	0,035
7. III. „	desgl.	Na_2SO_4 7,9%	„	4,8	0,037	0,077	0,724	0,151
27. III. „	desgl.	Na_2SO_4 1,58%	„	4,1	0,046	0,11	1,83	0,45
28. III. „	desgl.	$NaNO_3$ 1,89%	„	3,6	0,18	0,05	4,16	1,16
4. II. „	NaCl ges. (36%)	NaCl 1,8%	„	4,8	0,02	0,004	—	—

Salzlösungen und Säuren.

a. Nicht äquivalente Lösungen.

Datum.	A	B	Kette	Intens. M.-A.	Kraft M.V.	Quot. Ohm.	Kraft M.-V.	Quot. Ohm.
24. I. 84	$ZnSO_4$ ges. (50%)	H_2SO_4 4,8%	18	9,4	0,02	0,002	5,40	0,57
12. IV. „	desgl.	desgl.	10	3,04	—	—	0,836	0,27
„ „	desgl.	desgl.	30	8,38	—	—	0,993	0,12
20. IV. 87	desgl.	H_2SO_4 9,8%	Dyn.	20,0	—	—	7,97	0,4
11. IV. 84	NaCl ges. (36%)	H_2SO_4 9,6%	10	4,19	—	—	4,288	1,02
18. IV. 87	desgl.	desgl.	Dyn.	?	—	—	41,88	?
21. IV. „	desgl.	HCl 7,3%	„	147,6	—	—	69,41	0,47
13. IV. „	NaCl 18%	H_2SO_4 2,4%	20	?	—	—	18,13	?

1) Die Procentangaben beziehen sich durchweg auf den Gehalt an wasserfreier Substanz (Schwefelsäure als H_2SO_4, Natron als NaHO berechnet).

b. Aequivalente Lösungen.

Datum.	Flüssigkeiten		Polar. Strom		Polarisation			
					Kurzer Schluß		Langer Schluß	
	A	B	Zahl d. Elemente	Intens. M.-A.	Kraft M.-V.	Quot. Ohm.	Kraft M.-V.	Quot. Ohm.
6. II. 84	$Zn\,SO_4$ ges. (50%)	H_2SO_4 30,4%	18	10,1	0	0	0,30	0,03
4. III. „	desgl.	desgl.	„	8,4	0	0	0,15	0,018
31. III. „	$Na\,Cl$ 6,5%	$H\,Cl$ 4,06%	„	9,0	0,036	0,004	5,29	0,59
1. IV. „	desgl.	desgl.	„	9,1	0	0	3,58	0,39
21. IV. 87	$Na\,Cl$ 11,7%	$H\,Cl$ 7,3%	Dyn.	60,0	—	—	3,96	0,066
6. III. 84	Na_2SO_4 7,9%	H_2SO_4 5,44%	18	8,0	0,02	0,0025	1,24	0,155
19. IV. 87	Na_2SO_4 14,2%	H_2SO_4 9,8%	Dyn.	?	—	—	7,60	?
28. III. 84	$Na\,NO_3$ 9,44%	H_2SO_4 5,44%	18	10,4	0,143	0,014	24,20	2,33
29. III. „	desgl.	desgl.	„	10,6	0,018	0,0017	4,03	0,38
„ „ „	desgl.	$H\,NO_3$ 7,0%	„	11,2	0,018	0,0016	8,32	0,74
30. III. „	desgl.	desgl.	„	11,9	0	0	1,47	0,12

Salzlösungen und Alkalien.

Bei Versuchen mit Alkalien zwischen Salzlösungen mischt sich in störender Weise die Bildung von Niederschlagsmembranen ein. Ganz unvermeidlich und sehr stark ist dieselbe, wenn Alkali mit Zinksulphat combinirt wird. In diesem Falle, welcher nach dem oben S. 328 Gesagten dem Princip unsres Verfahrens direct widerspricht, entsteht schon bei kürzester Schließung eine ungemein starke (negative) Polarisation, welche nach der Oeffnung schnell verschwindet, also ganz den Character metallischer Polarisation besitzt.

Aber auch bei Schichtung von Alkalien über Alkalisalzen findet nach kurzer Zeit durch Diffusion des Zinksalzes durch das Alkalisalz die Bildung einer leichten Niederschlagsmembran zwischen dem letzteren und dem Alkali statt, so daß auch diese Versuche unrein sind. Trotzdem mögen einige Beispiele hier Platz finden (die mit * bezeichneten Combinationen sind äquivalent).

Datum.	Flüssigkeiten		Polar. Strom		Polarisation			
					Kurzer Schluß		Langer Schluß	
	A	B	Zahl d. Elemente	Intens. M.-A.	Kraft M.-V.	Quotient Ohm.	Kraft M.V.	Quotient Ohm.
5. II. 84	Na Cl ges. (36%)	Na HO 8,89%	18	11,5	0,01	**0,0009**	0,80	**0,07**
2. IV. „	* Na Cl 6,5%	* Na HO 4,44%	„	7,7	0	0	0,055	**0,007**
25. IV. 87	Na Cl ges. (36%)	Na HO 8%	Dyn.	178,9	—	—	3,3	**0,019**
„	„	„	„	„	—	—	18,5	**0,104** [1])
6. III. 84	* Na_2SO_4 7,9%	* Na HO 4,44%	18 El.	5,6	0,055	**0,01**	1,89	**0,34**

Säuren oder Alkalien mit Brunnenwasser.

In allen bisher angeführten Versuchen war die eine (untere) Flüssigkeit Salzlösung. Es blieben nun noch diejenigen Fälle übrig, in welchen die untere Flüssigkeit Säure oder Alkali, die obere Brunnenwasser ist. Hier aber zeigte es sich unmöglich eine scharfe Grenzfläche zu bilden; mächtige Diffusionsströmungen, welche während des ganzen Versuches fortdauern, machen die Resultate äußerst schwankend und regellos; nicht selten sind die Ablenkungen verkehrt (positiv), dann aber meist mit negativen Vorschlägen, d. h. die eigentliche Polarisation scheint auch hier normal stattzufinden, aber schnell durch Diffusionsströme zerstört zu werden, worauf verkehrte Ablenkungen stattfinden können. Die Größen der Quotienten, soweit sie beobachtet werden konnten, schienen nicht beträchtlich. Ich begnüge mich eins der Beispiele mit rein negativer Polarisation anzuführen; es betrifft eine Combination starker Schwefelsäure mit Brunnenwasser.

7. II. 84	H_2SO_4 30,4%	Brunnenw.	18 El.	4,0	0,01	**0,0025**	0,20	**0,05**

Die durch den Strom hervorgebrachte electromotorische Anordnung an der Grenze der beiden Electrolyte ist, wie wir gesehen haben, außerordentlich stabil, aber mechanisch zerstörbar. Die Depolarisation erfolgt sicher nicht in nennenswerthem Grade durch den Polarisationsstrom selbst, welcher ja ungemein schwach ist, während zur Depolarisation grade wie zur Polarisation sehr starke Ströme erforderlich sind. Daher macht es auch keinen merklichen Unterschied für die Depolarisation, ob der Kreis offen

1) Sehr langer Schluß.

oder irgendwie geschlossen bleibt. Offenbar erfolgt die langsame Zerstörung der geschaffenen electromotorischen Anordnung hauptsächlich durch Diffusion, und hierin sehe ich auch den Grund einer der wesentlichsten Abweichungen meiner Ergebnisse von denjenigen du Bois-Reymond's, bei welchem die Polarisationsströme immer schnell verschwanden. Von scharfen Trennungsflächen beider Flüssigkeiten konnte bei du Bois-Reymond's Verfahren keine Rede sein. Schon beim Eintauchen der mit Papier verschlossenen weiten Röhren mit der Flüssigkeit B in die Gefäße mit A mußte nach dem Wegziehen der Papiere die Grenzfläche sich verwischen, zumal der unvermeidliche Niveauunterschied der beiden A-Gefäße eine Ausgleichungsströmung bedingen mußte. Diese weiten diffusen Communicationen mußten aber auch nach erfolgter Polarisation deren Verschwinden durch Diffusion sehr begünstigen.

Ich habe übrigens eine Anzahl von Versuchen in ähnlicher Weise wie du Bois-Reymond angestellt, indem ich die Flüssigkeit *A* bis an die Trichterränder auffüllte, und nun ein mit der Flüssigkeit *B* gefülltes Heberrohr unter ähnlichen Manipulationen wie du Bois-Reymond zwischen die Trichter schaltete. In der That zeigte sich hier rasches Schwinden der Polarisation nach der Oeffnung; die Resultate selbst waren aber äußerst schwankend, und es kamen häufig verkehrte Ströme vor (s. unten).

Eine andere Differenz der beiderseitigen Versuchsresultate liegt in der Stärke der beobachteten Ströme (Kraftmessungen, sowie Intensitätsbestimmungen des polarisirenden Stromes sind von du Bois-Reymond nicht ausgeführt worden). Während in der älteren Untersuchung das Nadelpaar eines Multiplicators an die Hemmung fliegt, sind bei mir die Ablenkungen einer empfindlichen Spiegelboussole durchaus mäßige. Der Grund dieser Verschiedenheit liegt höchst wahrscheinlich großentheils in dem sehr viel kleineren Gesammtwiderstande der du Bois'schen Anordnung, während bei mir die langen engen Röhren, auch das schlechte Leitungsvermögen der Zinklösung im Vergleich zur Kochsalzlösung, und die weit kleineren Metallflächen einen sehr großen Widerstand bedingten.

Die bei weitem größte Differenz liegt in den verkehrten, „positiven", Polarisationen, welche du Bois-Reymond bei manchen Combinationen beobachtet hat. Er fand solche, und zwar sehr stark, zwischen Kochsalzlösung einerseits, und Wasser, Kalilauge, Eiweißlösungen, thierischen Säften andrerseits. Bei meinem Verfahren tritt die positive Polarisation zwischen Kochsalzlösung und Wasser oder Alkali, obgleich ich aus naheliegenden Gründen grade

diesen Combinationen besondere Aufmerksamkeit geschenkt habe, niemals auf, und überhaupt niemals bei Combinationen von Salzlösungen mit Wasser oder Alkalien. Unzweifelhaft ist die von mir benutzte Anordnung die vollkommnere, und ihre Resultate daher in höherem Grade entscheidend. Trotzdem bleibt es eine sehr interessante und wichtige Frage, welcher Umstand in du Bois-Reymond's einschlägigen Versuchen die verkehrte Polarisation bedingt hat. Vielleicht sind mechanische Strömungen dabei im Spiele gewesen; es waren nämlich in vielen Fällen die Heberröhren, welche die Flüssigkeit *B* enthielten, an den Enden capillar ausgezogen; in diesen Fällen konnte, namentlich wenn die Flüssigkeit ein schlechter Leiter war, Fortführung durch den starken Strom, also eine Niveauverschiedenheit in den beiden verbundenen Gefäßen auftreten, welche sich unmittelbar nach der Oeffnung wieder auszugleichen begann. Diese Strömung würde eine unberechenbare Fehlerquelle bilden. In meinen Versuchen ist die Fortführung durch die Weite des Rohres *H* völlig ausgeschlossen, und könnte, auch wenn sie stattfände, auf die Grenzschichten bei *i i* nicht den mindesten Einfluß üben.

Ein Theil der du Bois'schen Versuche ist so angestellt, daß die Flüssigkeiten in Papierbäusche infiltrirt wurden. Ich habe auch diese Versuchsform wiederholt, und zwar in der Gestalt, daß auf eine trockne Porzellanplatte parallel neben einander in gewissem Abstande zwei längliche Papierbäusche gelegt wurden, welche mit der Flüssigkeit *A* getränkt waren. Ein Ende jedes Bausches war mit den Kettenelectoden, das andre mit den Galvanometerelectroden verbunden; letztere bestanden aus du Bois'schen Röhren (mit Zinksulphat gefüllt und mit Zinksulphatthon verschlossen, ein amalgamirtes Zinkblech enthaltend). Die alternirende Verbindung geschah wie oben. Die Flüssigkeit *B* war in einen dritten ähnlichen Bausch infiltrirt, welcher wie der Querstrich eines *H* über die Mitten der ersteren gebrückt wurde. Die Resultate entsprachen genau den von du Bois-Reymond angegebenen, d. h. die Polarisation war normal, wenn *A* Kochsalzlösung, *B* Säure war, dagegen verkehrt zwischen Kochsalzlösung und Wasser oder Alkali, merkwürdigerweise aber nicht verkehrt, sondern normal, zwischen Zinksulphatlösung und Wasser (ein von du Bois-Reymond nicht untersuchter Fall). Während die normalen Polarisationen die Tendenz hatten abzunehmen (die Abnahme ist übrigens sehr langsam, wenn auch schneller als beim Normalverfahren), war häufig die verkehrte Polarisation eine Zeit lang im Zunehmen begriffen, oder es ging ihr, wie schon du

Bois-Reymond bemerkte, ein Vorschlag im Sinne normaler Polarisation vorauf. Der aperiodische Magnet gestattete dies mit Sicherheit zu constatiren.

Auch dieser letztere Umstand deutet darauf hin, daß die verkehrte Polarisation eine Erscheinung ganz anderer Art ist als die normale. Ihre Ursache muß in Umständen gesucht werden, welche mit der bloßen Aufeinanderfolge heterogener Electrolyte nichts zu thun haben. Die Vermuthung liegt nahe, daß sie mit der mechanischen Fortführung der Leiter in ihren Bäuschen, und der verschiedenen Geschwindigkeit dieser Fortführung für verschieden gut leitende Flüssigkeiten zusammenhängt. Aus diesen Gründen müssen an den Grenzen Veränderungen der Zusammensetzung auftreten, welche electromotorisch wirken könnten. Eine Erklärung freilich, warum das schlecht leitende Wasser und das gut leitende Kaliumhydrat in Bäuschen zwischen Kochsalzbäuschen verkehrte und der Wasserbausch zwischen Zinksulphatbäuschen normale Polarisation giebt, kann nicht gegeben werden.

Wie dem auch sei, so ist, wenn man von den verschwindend schwachen, oben S. 335 besprochenen verkehrten Polarisationen zwischen gesättigten Salzlösungen absieht, nunmehr festgestellt, daß verkehrte Polarisationen bei Durchströmung eines Systems von Electrolyten nicht vorkommen, wenn alle fremdartigen, d. h. nicht von der bloßen Folge der Electrolyte herrührenden Einwirkungen vermieden werden.

Was nun die Ursache der Polarisation an der Grenze von Electrolyten betrifft; so läßt sich jetzt nicht viel mehr darüber sagen, als du Bois-Reymond schon geäußert hat. Ein Gesammtüberblick der Ergebnisse lehrt, daß es weniger auf die chemische Natur der Componenten als auf deren Concentration oder Leitungsvermögen ankommt. Bemerkenswerth ist es ohne Zweifel, daß zwischen gesättigten Salzlösungen kaum Spuren, zwischen Salzlösungen und Wasser die stärkste relative Polarisation auftritt. Aber ein bestimmter Schluß auf die Ursache läßt sich hieraus nicht ziehen. Nur über eine der hierbei sich aufdrängenden Fragen besitze ich eine Anzahl weiterer Erfahrungen, welche ich im Folgenden kurz mittheile.

Anhang.

Ueber Abscheidung von Jonen an der Grenze von Electrolyten.

Nach einer ziemlich verbreiteten Angabe kann die Electrolyse hinter einander geschichteter Lösungen zur Bildung von Niederschlägen und dgl. an der Grenze zweier Lösungen Anlaß geben. Wohl die älteste Angabe dieser Art rührt wie es scheint von Faraday her, und wird ausführlich von Gmelin begründet [1]); auch Wiedemann citirt sie in seinem Lehrbuch [2]). Schichtet man gesättigte Magnesiumsulphatlösung und Wasser in einem U-Rohr übereinander, und läßt man einen kräftigen Strom hindurchgehen, so scheidet sich an der Uebergangsstelle des Stroms von der Salzlösung zum Wasser Magnesia als flockiger Niederschlag ab. Die Erklärung scheint einfach nach dem Schema:

$$
\begin{array}{c}
< \text{――――――――――} <<< \\
\begin{array}{|l|lr|r|}
H_2O & & Mg\,SO_4 & H_2\,O \\
H_2\;\;O & Mg & SO_4 & H_2\;\;O
\end{array}
\end{array}
$$

Bei den zahlreichen oben mitgetheilten Versuchen, in denen sehr oft Wasser über Salzlösungen geschichtet war, habe ich niemals eine Niederschlagbildung durch den Strom an der Grenzfläche gesehen, und zweifelte überhaupt an der Möglichkeit einer solchen, weil dieselbe anscheinend voraussetzt, daß reines Wasser leitet und zersetzt wird, während bekanntlich das Leitungsvermögen des Wassers sich bei jeder Vervollkommnung der Untersuchung mehr der Null nähert. Leitet aber das Wasser nur vermöge der in ihm gelösten Salzspuren, so ist das obige Schema nicht zutreffend.

Um eine vollkommnere Entscheidung zu gewinnen, wiederholte ich zunächst den Gmelin'schen Versuch in der Gestalt wie er angegeben ist. In ein U-förmiges Rohr brachte ich unten gesättigte Lösung von Magnesiumsulphat, darüber mit spiegelnden Grenzflächen in beide Schenkel destillirtes Wasser, in welche zwei Electroden von Platinblech eingetaucht wurden. Wird ein starker Strom hindurchgeleitet, so sieht man allerdings bald, Gmelin's Angabe entsprechend, an der Grenzfläche des cathodischen Rohrschenkels einen flockigen Niederschlag von Magnesia auftreten.

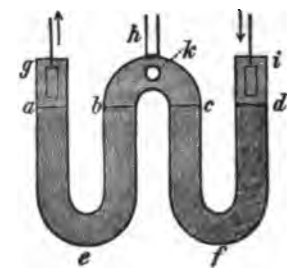
Aber man überzeugt sich leicht, daß dieser Niederschlag nicht hier, sondern am Kathodenblech selbst entsteht, weil das Wasser unvermeidlich etwas Magnesiumsulphat aufnimmt; die Flocken senken sich, soweit sie nicht durch das Wasserstoffgas emporge-

1) Poggendorff's Ann. Bd. XLIV. S. 29. 184.

2) A. a. O. Bd. II. S. 599 und 602.

wirbelt werden, langsam herab, und bleiben, da Magnesia sehr leicht ist, auf der Grenzfläche der schweren Salzlösung liegen. Ist der Strom nicht sehr stark, so daß man den Apparat lange sich selbst überlassen muß, so kann man beim Hinzutreten glauben, der Niederschlag sei da entstanden, wo man ihn angehäuft findet. Offenbar würde auch ein Niederschlag, wenn er hier entstände, mehr membranartig auftreten.

Diese Versuchsform ist also durchaus nicht entscheidend. Ich brachte nun umgekehrt das Wasser zwischen zwei Salzschichten. Hierzu benutzte ich die nebenstehende kleine Vorrichtung, ein W-förmiges Glasrohr von 12 mm. lichter Weite, welches bei *h* und *k* kurze Röhrenansätze besitzt Die schräg schraffirten Theile *aeb* und *cfd* werden mit gesättigter Magnesiumsulphatlösung, die Räume *ag*, *bhc* und *di* mit destillirtem Wasser gefüllt. In *bhd* wird das Wasser bei *k* (mit Schlauch und Klemme verschlossen) hineingehebert, während die Luft bei *h* entweicht. In *ag* und *di* kommen die Platinelectroden. Bei der durch die Pfeile angegebenen Richtung des Stromes sieht man bei *d* sehr bald den oben beschriebenen flockigen Niederschlag, während die Grenzen *a*, *b*, *c* völlig klar bleiben. Aber nach stundenlangem Durchleiten eines so starken Stromes, daß das Wasser in *bhc* sich fast bis zum Sieden erhitzt, sieht man endlich an der Grenze *b* einen schwachen, äußerst zarten Niederschlag auftreten.



Noch ein Einwand ist denkbar; es könnte nämlich etwas von dem Niederschlage im rechten Schenkel durch den Strom nach der Anode hin fortgeführt werden (Reuss-Jürgensen'sches Phänomen), namentlich in dem schlecht leitenden Wasser. Um auch dies zu entscheiden, hüllte ich die Electrodenbleche in dichte Leinewand ein, so daß bei *d* keine Abscheidung eintrat. Auch jetzt zeigte sich bei *b* schließlich die zarte Abscheidung; bei *d* war sie nicht deutlich, wohl weil hier die Grenze weniger scharf zu sein pflegt.

So kann denn in der That unzweifelhaft eine electrolytische Abscheidung an der Grenze zweier geeigneter Electrolyte stattfinden. Dies ist um so bemerkenswerther, weil das Wasser in *bhc* unzweifelhaft, namentlich unten, etwas Salz enthält, so daß die Abscheidung eigentlich an der Grenze gesättigter und verdünnter Salzlösung erfolgt.

Derselbe Versuch gelingt auch, wenn man statt des Magnesiumsulphats Zinksulphat nimmt; nur ist hier anscheinend noch längere Zeit nöthig. Am Blech in *i* scheidet sich hier schwarzes Zink ab.

Nach dem obigen Schema muß, wenn man statt des Schwermetallsalzes neutrales Alkalisalz, z. B. Natriumsulphat nimmt, bei *b* freies Alkali, bei *c* freie Säure auftreten. Daß dies in der That geschieht, hat zuerst du Bois-Reymond in der oben citirten Arbeit gefunden, indem er einen mit Lacmuspapier bekleideten Wasserbausch zwischen zwei Salzbäuschen durchströmen ließ; er giebt sehr richtig an, daß die Säureabscheidung weniger deutlich ist, als die Alkali-Abscheidung. Auch ich fand dies bei Wiederholung des Versuches, und bemerkte nicht selten auch zwischen den Anliegestellen eine Blaufärbung des Lacmuspapiers; zuweilen waren die Resultate überhaupt sehr schwer zu deuten.

Bei der Wichtigkeit der Frage (bekanntlich hat H. Davy das Gesetz ausgesprochen, daß electrolytische Abscheidungen nur an den metallischen Electroden stattfinden) benutzte ich zu entsprechenden Versuchen den eben erwähnten kleinen Apparat. Zuerst füllte ich die schräg schraffirten Theile mit gesättigter Natriumsulphatlösung, und die Räume *a g*, *b h c* und *d i* mit durch Lacmuslösung violett gefärbtem Wasser. In *a g* zeigte sich sehr rasch Bläuung, in *d i* Röthung, offenbar von den Blechen herrührend, an welchen sich wegen des geringen Salzgehaltes Wasserstoff und Natron, resp. Sauerstoff und Schwefelsäure abschied. Bei *b* bildete sich allmählich eine intensive Farbstoffanhäufung, welche aber nicht eigentlich blau zu nennen war, während die Flüssigkeit in *b h c* sich zusehends entfärbte. Wie es scheint führt der Strom im Wasser den Farbstoff wie ein suspendirtes Pulver gegen die Anode hin fort, und diese Erscheinung scheint auch bei dem du Bois'schen Papierversuch eine Rolle zu spielen, und das Resultat zu trüben.

Ich änderte nun, um diese Anhäufung zu vermeiden, den Versuch so ab, daß ich statt des Wassers die Salzlösung färbte. Jetzt zeigte sich nach sehr langer Durchströmung ganz unzweifelhaft eine sehr beschränkte, aber schöne Bläuung bei *b*, und eine ebensolche Röthung bei *c*. Es ist also auch auf diesem Wege nachgewiesen, daß an der Grenze von Salzlösungen und Wasser der Strom Alkali und Säure abscheiden kann. Ob diese Abscheidung in der Zersetzung reinen Wassers (neben dem in der Wasserschicht unzweifelhaft enthaltenen Salze) im Sinne des obigen Schema's, oder in anderen Umständen, wie Fort-

führung von Jonen, ihre Erklärung findet, müssen weitere Untersuchungen entscheiden.

Schließlich bemerke ich, daß bei weiteren Versuchen sowohl über den letzteren Gegenstand wie über die Polarisation zwischen Electrolyten auf die Anwendung völlig gasfreier Flüssigkeiten Rücksicht genommen werden müßte.

Bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Mai und Juni 1887.

Abhandlungen der Kön. Ak. d. Wiss. zu Berlin. 1886.
Sitzungsberichte der Kön. Ak. d. Wiss. zu Berlin. 1887. 1—18.
Die Venusdurchgänge 1874 u. 1882. Herausg. v. A. Auwers. 4. Bd. Berlin 1887.
Abhandlungen d. philol.-hist. Classe der K. sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig. Bd. X, 3. Possessio von M. Voigt. — 4. Handschriftl. Ueberlieferung d. Briefe Ciceros v. O. E. Schmidt. Leipzig 1887.
Abhandlungen d. mathem.-phys. Classe d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig. Bd. XIII, 8. Nematoden von Leuckart. 9. Arithmetisches Mittel. I. von C. Neumann. Leipzig 1887.
Berichte über die Verhandlungen d. K. S. Ges. d. Wiss. zu Leipzig. Philol.-Hist. Classe. 1886. II. Leipzig 1887.
Sitzungsberichte der philos.-philol. und histor. Classe d. K. B. Ak. der Wiss. zu München. 1886, IV. 1887, I.
Leopoldina. Halle. XXIII. 7—8. 9—10.
Schriften der physikalisch-oekonomischen Gesellschaft in Königsberg i. Pr. 27. Jahrg. 1886
Schriften der naturforschenden Gesellsch. in Danzig. N. F. VI, 4. Danzig, 1887.
Zeitschrift für Naturwissenschaften. Herausg. vom naturwiss. Verein f. Sachsen und Thüringen. Vierte Folge. V, 6.
Verhandlungen des Vereins für naturwiss. Unterhaltung zu Hamburg. 1883—1885. VI. Band. Hamburg 1887.
Abhandlungen herausg. vom naturwiss. Vereine zu Bremen. IX, 4. Bremen 1887.
Buchenau, Flora der ostfriesischen Inseln. Norden, 1881. (Geschenk des naturwiss. Vereins zu Bremen).
G. vom Rath, Worte der Erinnerung an Dr. M. Websky.
A. v. Kölliker, Der jetzige Stand der morphologischen Disciplinen mit Bezug auf allgemeine Fragen. Jena, 1887.
Meteorologische Zeitschrift. Redigirt von Hann und Köppen. 1887. Mai und Juni. Berlin, 1887.

Jahrbücher der K. K. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus. N. F. Bd. 22. Jahrg. 1885. Wien 1886.
Programm für d. 6. internationalen Congress für Hygiene und Demographie zu Wien. Wien, 1887.
Verhandlungen des naturforschenden Vereins in Brünn. XXIV, 1. 2. 1885. Brünn, 1886.
IV. Bericht der meteorologischen Commission des naturf. Vereines in Brünn. Ergebnisse im J. 1884. Brünn, 1886.

Dr. Rud. Wolf, Astronomische Mittheilungen. LXIX. Mai 1887.
Bibliotheque universelle. Troisième période. T. XVII. Nr. 5. Genève, 1887.
XVI. Jahresbericht d. historisch-antiq. Ges. v. Graubünden. Jahrg. 1886. Chur.

Everts, Nieuwe Naamlyst van Nederlandsche schildfleugeliche Insecten (coleoptera). Haarlem, 1887.
Annales de l'école polytechnique de Delft. T. 3. 1887. 1. Livr. Leide, 1887.

Bulletin de l'Acad. royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 56e année, 3e series. T. 13. Nr. 4. Bruxelles 1887. 8.

Nature. 36. 914—921. Wöchentlich abgeliefert.
Proceedings of the royal society. XLII. Nr. 253—255.
Proceedings of the mathematical society. 283—290.
Monthly notices of the Royal astronomical society. XLVII. 6. 7.
Journal of the Royal microscopical society. 1887. Part 3. June. London and Edinburgh.
Transactions of the zoological Society of London. XII, 4. 5. 6. London, 1886.
Proceedings of the scientific meetings of the zoological society of London, for the y. 1886. Part. IV.
Proceedings of the literary and philosophical society of Liverpool. 1884. 1885—1885/86. Nr. XXXIX. XL.
The Transactions of the royal Irish Academy. XXVII, Polite literature and antiquities. VI. VII. VIII. Dublin, 1885. 1886. — XXVIII. Science XIV—XXV. Dublin, 1883—1886.
Proceedings of the Royal Irish Academy. Ser. II. Vol. II. Polite literature and antiquities. 6. 7. — Ser. II. Vol. IV. Science 1—5. 1884—1886.
Royal Irish Academy. Todd lecture series. II, 1. Dublin 1885.
Royal Irish Academy. „Cunningham Memoirs." II. III. Dublin, 1886.
The scientific transactions of the Royal Dublin Society. Volume III. (Series II) XI. XII. XIII. Dublin, 1886. 1887.
The scientific proceedings of the Royal Dublin Society. Vol. V (N. S.) 3. 4. 5. 6. Dublin, 1886. 1887.

Bulletin de la société mathematique de France. XV, 3. 4.
Donnadieu, de la question phylloxérique. Paris, 1887.
Revue de l'histoire des religions. Sept. année. XIV, 2. 3. Paris 1886.
Annales du musée Guimet. T. XI. XII. Paris, 1886.

Atti della reale accademia dei Lincei. Serie quarta. Rendiconti. Vol. III, 7. 8. 9. Roma 1887.
Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Publicato da B. Buoncompagni. T. XIX. Luglio, 1886. Roma 1886.
Atti della r. accademia delle scienze di Torino. XXII, 10. 11. 12. 13. 1886—87.
Atti della società toscana di scienze naturali. Processi verbali. Vol. V. Adunanza del di 13. marzo 1887.
Annali della R. scuola normale superiore di Pisa. Della Serie VIII. Vol. IV. Pisa 1887.
Bollettino delle publicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. 1886 Indice. 1887. (N. 33—35.)
Bolletino delle opere moderne stranière acquistate dalle biblioteche pubbliche governative del regno d'Italia. Roma 1887. Vol. II. N. 1.

Memorias de la Real Academia de ciencias exactas, fisicas y naturales di Madrid. T. XI. Aves de España. Madrid 1887.
Revista de los progressos de las ciencias exactas, fis. y nat. T. 22, 2. 3. Madrid 1887.

Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas publicado pelo Dr. Texeira. VII, 5.ª Coimbra 1886.

Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Foshandlinger. 1886, 3. 1887, 1. Kjobenhavn.
Regesta diplomatica historiae danicae. Ser. II. Tom. 1. Kjobenhavn 1886.
Acta mathematica. Herausg. von G. Mittag-Leffler. 10, 1. Stockholm 1887.
Acta universitatis lundensis. T. XXII. 1885—86: Mathematik och Naturvetenscap. Lund 1886—89.
— — T. XXII. 1885—86: Philosophi, Språkvetenscap och Historia. Lund 1886—87.
Den Norske Nordhavs-Expedition. 1876—1878. XVII. Zoologi. Alcyonida. Christiania 1887.

Bulletin de l'Académie impériale des Sciences de St.-Pétersbourg. T. XXXI. Feuilles 28—$^{2}/_{4}$36.
Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de St. Pétersbourg. VII. Serie. T. XXXIV, 12. 13. T. XXXV, 1. (Zwei Exemplare, eins für die Ges. d. W., eines für die Universität.)
Meteorologische Beobachtungen ausgeführt am meteorologischen Observatorium . der Landwirthschaftlichen Akademie bei Moskau von Bachmetieff. 1884, 1. 2. 1885, 1.
Bulletin de la Société impériale des Naturalistes de Moscou. 1887. No. 2. Moscou 1887.
Weihrauch, Zwanzigjährige Mittelwerthe aus den meteorologischen Beobachtungen 1866—1885 für Dorpat. Dorpat 1887.

Bulletin of the U. St. geological and geographical survey of the territories. IV, 1. 2. V, 1. 2. 3. 4. VI, 1. 3. (für VI, 2 ist noch einmal V, 2 beigelegt). Washington 1878—1882.
The geological and natural history survey of Minnesota. The thirteenth annual report, for the year 1884. St. Paul, 1885. — The fourtenth for the year 1885. St. Paul 1886.
Mineral resources of the U. St. Calendar-Year 1885. Division of Mining statistics and technology. Washington 1886.
Transactions of the astronomical observatory of Yale University. I, 1. New-Haven 1887.
Bulletin of the American Geographical society. 3. 4. 5. New-York, 1886.
Ninth annual Report of the President of the Johns Hopkins University. 1884. Baltimore 1884.
Tenth annual Report of the President of the Johns Hopkins University. 1885. Baltimore 1885.
Johns Hopkins Univ. Studies in Historical and political science. Fifth Series. V. VI: Bourinot, Local government in Canada. Baltimore 1887.
Journal. The Trenton natural history society. 2. January 1887. Trenton, N. J. 1887.
Verzeichniss der Doubletten in der öff. Bibliothek zu S. Francisco, mit Tauschanerbieten.
Anales de la oficina meteorological argentina por su director G. G. Davis. T. V. Buenos Aires 1887.
Anales de la sociedad cientifica argentina. Enero de 1887. Entrega I. T. XXIII. — Febrero de 1887. Entrega II. T. XXIII. Buenos Aires 1887.
Informe de la direccion general de estadistica 1886. Guatemala.
Archivos do museu nacional do Rio de Janeiro. Vol. VI. Rio de Janeiro 1885.

Bibliotheca indica; a Collection of Oriental Works, published by the asiatic society of Bengal. — Old series. 256—259. — New series. 596—607. Calcutta 1886. 1887.
Records of the geological survey of India. XX, 2. Calcutta 1887.
Journal of the college of science, Imperial university, Japan. Tōkyō, Japan 1887. Vol. I. Part. II.

Nachträglich.

Sveriges offentliga Bibliotek Stockholm. Upsala. Lund. Accessions-Katalog I. 1886. Stockholm 1887.

Ungarische Revue. Herausg. von P. Hunfalvy und G. Heinrich. 7. Jahrg. VI. VII. Budapest 1887.

Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Redigirt von J. Fröhlich. 4. Bd. Budapest 1887.

Medicinisch-naturwiss. Mittheilungen. IX, 1. 2. 1887. Klausenburg.

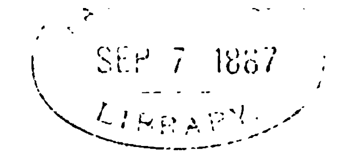
Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. 31, 3. 4. Zürich 1886.

Bulletin de l'Académia royale des Sciences, des lettres et des beauxarts de Belgique. 56. 3. Serie, t. 13. No. 5. Bruxelles 1887.

Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles-redigées par J. Bosscha. XXI, 5. Harlem 1887.

Mémoires de l'Acad. Royale de Copenhague. 6. Sér. Classe des Sciences. Vol. IV. N. 3.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).



Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

3. August. **№ 12.** 1887.

Universität.

Verzeichniß der Vorlesungen auf der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen während des Winterhalbjahrs 18⁸⁷/₈₈.

Die Vorlesungen beginnen den 15. October und enden den 15. März.

Theologie.

Religionsgeschichte: Prof. *Duhm* vierstündig um 4 Uhr.

Erklärung der Genesis: *Derselbe* fünfstündig um 10 Uhr.

Erklärung der Genesis nach einer den ganzen Hexateuch besprechenden Einleitung: Prof. *de Lagarde* viermal um 11 Uhr.

Ueber die Kritik des Genesistextes: *Derselbe* Mittwoch 11 Uhr publice.

Erklärung des Buches Hiob: Prof. *Bertheau* vierstündig um 10 Uhr.

Erklärung der chaldäischen Abschnitte des Buches Daniel: *Derselbe* Dienstags und Freitags um 2 Uhr.

Erklärung des Propheten Jesaia: Prof. *Schultz* fünfstündig um 10 Uhr.

Neutestamentliche Theologie: Prof. *Wiesinger* viermal um 3 Uhr.

Erklärung des Römerbriefes: *Derselbe* fünfmal um 9 Uhr.

Erklärung der Briefe an die Korinther: Prof. *Lünemann* fünfstündig um 9 Uhr.

Erklärung der kathol. Briefe: Prof. *Ritschl* viermal um 11 Uhr.

Leben, Schriften und Lehre des Apostels Paulus: Prof. *Knoke* dreimal um 9 Uhr, Montag, Dienstag u. Donnerstag.

Kirchengeschichte, Theil II: Prof. *Wagenmann* fünfmal um 8 Uhr.

Kirchengeschichte der neueren Zeit seit der Reformation unter Benutzung der Kirchengeschichte von C. Hase: Prof. *Reuter* fünfmal um 8, Sonnabend um 9 Uhr.

Kirchengeschichte des neunzehnten Jahrhunderts: Prof. *Wagenmann* viermal um 4 Uhr, Montag, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag.

Comparative Symbolik: Prof. *Reuter* fünfmal um 9 Uhr.

Dogmatik Theil I: Prof. *Schultz* fünfstündig um 11 Uhr.

Theologische Ethik: Prof. *Ritschl* fünfstündig um 12 Uhr.

Praktische Theologie: Prof. *Knoke* fünfstündig um 5 Uhr.

Kirchenrecht siehe unter *Rechtswissenschaft* S. 351.

Die alttestamentlichen Uebungen der wissenschaftlichen Abtheilung des theologischen Seminars leitet Prof. *Bertheau* Dienstags um 6 Uhr; die neutestamentlichen Prof. *Wiesinger* Montags um 6 Uhr; die kirchen- und dogmenhistorischen Prof. *Wagenmann* Freitags um 6 Uhr; die dogmatischen Prof. *Schultz* Donnerstags um 6 Uhr.

Die Uebungen des königl. homiletischen Seminars leiten Prof. *Schultz* und Prof. *Knoke* Sonnabends von 9—11 Uhr öffentlich; die Uebungen des liturgischen Seminars leitet Prof. *Knoke* Sonnabends um 9 und um 11 Uhr; die Uebungen des katechetischen Seminars Prof. *Wiesinger* Mittwochs von 2—3 Uhr, Prof. *Knoke* Sonnabends von 2—3 Uhr öffentlich.

Rechtswissenschaft.

Institutionen des Römischen Rechts: fünfstündig von 10—11 Uhr Prof. *Merkel*.

Römische Rechtsgeschichte: Montag, Dienstag, Donnerstag von 9—10 Uhr Prof. *Regelsberger*.

Erklärung der Commentarien des Gajus: zweimal wöchentlich von 8—9 Uhr Prof. *Wolff* öffentlich.

Römischer Civilproceß: Mittwoch und Sonnabend von 12—1 Uhr Dr. *Goldschmidt*.

Pandekten, allgemeiner Theil: Montag, Dienstag, Donnerstag von 8—9 Uhr Prof. *Regelsberger*.

Pandekten, zweiter Theil (Sachen- und Obligationsrecht): Montag. Dienstag, Donnerstag. Freitag von 11—1 Uhr Prof. *v. Jhering*.

Pandekten (Erbrecht und Familienrecht): Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 9—10 Uhr Prof. *Merkel*.

Gemeines Pfandrecht unter besonderer Berücksichtigung der neueren Gesetzgebung: Sonnabend von 11—12 Uhr Dr. *Goldschmidt* öffentlich.

Vergleichendes Erbrecht: Mittwoch von 11—12 Uhr Prof. *Ziebarth* öffentlich.

Exegetische Uebungen in den Digesten: Montag von 5—7 Uhr Prof. *Regelsberger*.

Pandekten-Practicum: Donnerstag von 4—6 Uhr Prof. *Merkel*.

Conversatorium über Pandekten: Dienstag, Mittwoch, Donnerstag und Freitag von 6—7 Uhr Dr. *Goldschmidt*.

Deutsche Rechtsgeschichte: fünfmal von 4—5 Uhr Prof. *Schröder*.

Deutsches Privatrecht: fünfmal wöchentlich von 11—12 Uhr Prof. *Frensdorff*.

Handels-, See- und Wechselrecht: fünfmal wöchentlich von 3—4 Uhr Prof. *Schröder*.

Preußisches Privatrecht: vierstündig von 11—12 Uhr Prof. *Ziebarth*.

Strafrecht: fünfstündig von 10—11 Uhr Prof. *Ziebarth*.

Deutsches Reichs- und Landesstaatsrecht: fünfmal wöchentlich von 9—10 Uhr Prof. *Dove*.

Deutsches Verwaltungsrecht: Dienstag, Donnerstag und Freitag von 12—1 Uhr Prof. *Frensdorff*.

Völkerrecht: Mittwoch und Sonnabend von 12—1 Uhr Prof. *v. Bar*.

Kirchenrecht einschließlich des Eherechts: täglich von 8—9 Uhr Prof. *Dove*.

Civilproceß: Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 11—12 Uhr Prof. *von Bar*.

Strafproceß: Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 10—11 Uhr Prof. *John*.

Civilproceß-Practicum: Dienstag von 4—6 Uhr Prof. *John*.

Medicin.

Zoologie, vergleichende Anatomie, Botanik, Chemie, siehe unter *Naturwissenschaften*.

Knochen- und Bänderlehre: Prof. *Fr. Merkel* Montag, Mittwoch, Sonnabend von 11—12 Uhr.

Systematische Anatomie I. Theil: Prof. *Fr. Merkel* tägl. von 12—1 Uhr.

Anatomie des Gehirns: Prof. *Fr. Merkel* Montag von 2—3 Uhr, öffentlich.

Topographische Anatomie: Prof. *Fr. Merkel* Dienstag, Donnerstag, Freitag von 2—3 Uhr.

Präparirübungen: Prof. *Fr. Merkel* täglich von 9—4 Uhr.

Specielle Histologie des Nervensystems trägt Prof. *Krause* Mittwoch von 2—3 Uhr vor, öffentlich.

Mikroskopische Uebungen für Anfänger: Dr. *Schiefferdecker* Dienstag, Donnerstag, Freitag von 11—12, Mittwoch von 5—6 Uhr.

Mikroskopische Uebungen für Geübtere: Dr. *Schiefferdecker* Dienstag und Freitag von 5—7 Uhr.

Mikroskopische Uebungen in der speciellen Histologie hält Prof. *Krause* viermal wöchentlich um zwei Uhr oder zu anderen passenden Stunden.

Allgemeine und besondere Physiologie mit Erläuterungen durch Experimente und mikroskopische Demonstrationen Prof. *Herbst* in sechs Stunden wöchentlich um 10 Uhr.

Experimentalphysiologie II. Theil (Physiologie des Nervensystems und der Sinnesorgane): Prof. *Meissner* täglich von 10—11 Uhr.

Arbeiten im physiologischen Institut leitet Prof. *Meissner* täglich in passenden Stunden.

Allgemeine Aetiologie trägt Prof. *Orth* Montag von 6—7 Uhr öffentlich vor.

Ueber allgemeine Pathologie trägt Prof. *Orth* Dienstag bis Freitag von 12—1 Uhr vor.

Pathologisch-anatomische Demonstrationen hält Prof. *Orth* privatissime Mittwoch und Sonnabend von 2—4 Uhr.

Mikroskopische Uebungen in der pathologischen Histologie hält Prof. *Orth* Dienstag und Freitag von 6—8 Uhr.

Physikalische Diagnostik verbunden mit Uebungen lehrt Prof. *Damsch* Montag, Mittwoch, Donnerstag von 5—6 Uhr.

Laryngoskopische Uebungen hält Prof. *Damsch* Sonn. von 12—1 Uhr.

Physikalische Heilmethoden mit besonderer Berücksichtigung der Elektrotherapie mit Uebungen am Krankenbett lehrt Prof. *Damsch* dreimal wöchentlich in passenden Stunden.

Arzneimittellehre und Receptirkunde verbunden mit Experimenten und praktischen Uebungen im Receptiren und Dispensiren lehrt Prof. *Marmé* dreimal wöchentlich Mont., Dienst., Donn. von 6—7 Uhr.

Die gesammte Arzneimittellehre trägt Prof. *Husemann* Montag, Dienstag, Mittwoch und Donnerstag von 3—4 Uhr vor.

Specielle Toxikologie II. Theil verbunden mit Experimenten: Prof. *Marmé* für ältere Mediciner Montag und Donnerstag von 3—4 Uhr.

Arzneiverordnungslehre trägt Prof. *Husemann* Freitag von 3—4 Uhr öffentlich vor.

Ausgewählte Kapitel aus der Toxikologie demonstrirt Prof. *Marmé* Freitag von 6—7 Uhr öffentlich.

Arbeiten im pharmakologischen Institut leitet Prof. *Marmé* täglich in passenden Stunden.

Pharmakognosie lehrt Prof. *Marmé* viermal wöchentlich Montag bis Donnerstag von 8—9 Uhr.

Pharmakognostisch-mikroskopische Uebungen hält Prof. *Marmé* Sonnabend von 9—11 und von 11—1 Uhr.

Specielle Pathologie und Therapie 2. Hälfte: Prof. *Ebstein* Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 4—5 Uhr.

Die medicinische Klinik und Poliklinik leitet Prof. *Ebstein* fünfmal wöchentlich von $10^1/_2$—12 Uhr, Sonnabend von $9^1/_4$—$10^3/_4$ Uhr.

Kinderheilkunde, II. Theil, lehrt Dienstag und Freitag von 5—6 Uhr Prof. *Damsch.*

Poliklinische Referatsstunde hält Prof. *Damsch* einmal wöchentl.

Die Untersuchung des Harns und Sputums mit praktischen Uebungen leiten Prof. *Ebstein* und Dr. *Nicolaier* einmal wöchentlich in zu verabredender Stunde.

Specielle Chirurgie I. Theil lehrt Prof. *König.*

Dasselbe Prof. *Lohmeyer* fünfmal wöchentlich von 8—9 Uhr.

Ein Examinatorium über Chirurgie hält Prof. *König* einmal in der Woche öffentlich.

Einen chirurgisch-diagnostischen Cursus hält Prof. *Rosenbach* Dienstag und Freitag von 4—5 Uhr.

Die Lehre von den chirurgischen Operationen trägt Prof. *Rosenbach* viermal wöchentlich in passenden Stunden vor.

Die chirurgische Klinik leitet Prof. *König* von $9^1/_2$—$10^3/_4$ Uhr täglich außer Sonnabend.

Chirurgische Poliklinik wird öffentlich Sonnabend von $10^3/_4$—12 Uhr von Prof. *König* und Prof. *Rosenbach* gemeinschaftlich gehalten.

Ueber Luxationen und Fracturen liest zweimal wöchentlich von 4—5 Uhr Dr. *W. Müller.*

Einen Verbandcursus hält Dr. *W. Müller* zweimal wöchentlich in passenden Stunden.

Instrumentenlehre behandelt einmal öffentlich Dr. *W. Müller.*

Klinik der Augenkrankheiten hält Prof. *Leber* Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 12—1 Uhr.

Augenspiegelcursus hält Prof. *Leber* Mittwoch und Sonnabend von 12—1 Uhr.

Ueber die practisch wichtigen Abschnitte der Ohrenheilkunde mit Uebungen im Ohrenspiegeln trägt Prof. *Bürkner* Dienstag und Freitag von 3—4 Uhr oder zu besser passender Zeit vor.

Poliklinik für Ohrenkranke hält Prof. *Bürkner* (für Geübtere) Mittwoch und Sonnabend von 12—1 Uhr.

Geburtskunde trägt Dr. *Droysen* Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag um 3 Uhr vor.

Geburtshülflichen Operationscursus am Phantom hält Dr. *Droysen* Mittwoch und Sonnabend um 8 Uhr.

Pathologie des Wochenbetts lehrt Prof. *Schwartz* wöchentlich einmal zu gelegener Zeit.

Gynaekologische Klinik leitet Prof. *Schwartz* Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag um 8 Uhr.

Psychiatrische Klinik in Verbindung mit systematischen Vorträgen über Geisteskrankheiten hält Prof. *Meyer* Montag und Donnerstag von 3—5 Uhr.

Forensische Psychiatrie mit casuistischen Demonstrationen an Geisteskranken lehrt (für Juristen) Prof. *Meyer* in wöchentlich zwei zu verabredenden Stunden.

Experimentelle Hygiene I. Theil: Prof. *Wolffhügel* Dienstag und Freitag von 5—6 Uhr sowie Mittwoch von 5—7 Uhr.

Hygienische Colloquien hält Prof. *Wolffhügel* Sonnabend von 5—6 Uhr öffentlich.

Arbeiten im Institut für medicinische Chemie und Hygiene leitet täglich zu passenden Stunden Prof. *Wolffhügel*.

Anatomie und Physiologie der Hausthiere, so wie Seuchenlehre trägt Prof. *Esser* fünfmal wöchentlich von 8—9 Uhr vor.

Klinische Demonstrationen im Thierhospitale hält Prof. *Esser* in zu verabredenden Stunden.

Philosophie.

Allgemeine Geschichte der Philosophie: Prof. *Baumann*, Montag, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag 5 Uhr.

Ueber die Philosophie Platons: Prof. *Peipers*, Mittw. 4 Uhr, öffentlich.

Logik: Prof. *Baumann*, Mont., Dienst., Donn., Freit. 9 Uhr.

Logik: Prof. *Rehnisch*, 4 St. 12 Uhr.

Erkenntnißtheorie und Metaphysik: Prof. *Peipers*, Mont., Dienst., Donn., Freit. 10 Uhr.

Psychologie: Prof. *G. E. Müller*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 4 Uhr.

Experimentelle Psychologie und Psychophysik: Prof. *G. E. Müller*, Mittw. u. Sonnabend 11 Uhr, öffentlich, aber nur für Fortgeschrittene.

Experimentelle Untersuchungen aus dem Gebiete der Psychologie und Psychophysik leitet Prof. *G. E. Müller* in zu verabredenden Stunden.

Philosophische Uebungen: Prof. *Rehnisch*, öffentlich.

Die Uebungen des K. pädagogischen Seminars leitet Prof. *Sauppe*, Montag und Donnerstag 11 Uhr, öffentlich.

Mathematik und Astronomie.

Allgemeine Einleitung in die höhere Mathematik: Dr. *Schönflies*, Dienst., Mittw., Donn., Freit. 6 Uhr.

Aufgaben des Maximums und Minimums, in geometrischer Behandlungsweise: Prof. *Schwarz*, Donnerst. 11 Uhr, öffentlich.

Elemente der Lehre von den algebraischen Gleichungen: Dr. *Hölder*, Dienst., Mittw., Donn., Freit. 8 Uhr.

Integralrechnung, zweiter Theil, und Einleitung in die Theorie der analytischen Functionen complexer Argumente: Prof. *Schering*, Mont., Dienst., Donn., Freit. 4 Uhr.

Einleitung in die Theorie der analytischen Functionen: Prof. *Schwarz*, Mont.—Freit. 9 Uhr.

Algebraische Curven, besonders die dritter und vierter Ordnung, Dr. *Schönflies*, Dienst., Freit. 10 Uhr.

Ueber Flächen, deren mittlere Krümmung in jedem ihrer Punkte gleich Null ist: Prof. *Schwarz*, Mont., Dienst., Freit. 11 Uhr.

Transformation der hyperelliptischen Functionen: Prof. *Klein*, Mittwoch 11—1 Uhr.

Methode der kleinsten Quadrate: Prof. *Schur*, Mittw. u. Sonnabend, 11 Uhr, öffentlich.

Einleitung in die theoretische Physik: Prof. *Voigt*, Mont., Dienst., Donn., Freit. 10 Uhr.

Potential: Prof. *Klein*, Mont., Dienst.. Donn., Freit. 12 Uhr.

Theorie des Magnetismus; Prof. *Voigt*, Sonnabend 10—12 Uhr.

Mathematische Theorie der Electrodynamik: Dr. *Hugo Meyer*. Dienstag und Freitag, 11 Uhr.

Ueber die Verbesserung der Bahnelemente mit Berücksichtigung specieller Störungen: Prof. *Schur*, Mont., Dienst., Donn., Freit. 11 Uhr.

Mathematische Colloquien wird Prof. *Schwarz* privatissime, unentgeltlich, wie bisher veranstalten.

Praktische Uebungen an den Instrumenten der Kön. Sternwarte: Prof. *Schur*.

In dem mathematisch-physikalischen Seminar behandelt Prof. *Riecke* Ausgewählte Kapitel der mathematischen und Experimentalphysik, Donnerstag 2 Uhr, leiten Mathematische Uebungen Prof. *Schering*, Mittw. 6 Uhr, und Prof. *Schwarz*, Sonnabend 9 Uhr, wird Prof. *Voigt* Ausgewählte Capitel der theoretischen Optik, Mittwoch 10 Uhr, und Prof. *Klein* Ausgewählte Kapitel der hyperelliptischen Functionen, Sonnabend 11—1 Uhr behandeln; Prof. *Schur* wird Freitag Abend 8—9 Uhr Astronomische Uebungen veranstalten. Vgl. *Naturwiss.* S. 356.

Erdmagnetische Beobachtungen im Gauss-Observatorium wird Prof. *Schering* privatissime, unentgeltl., in Gemeinschaft mit dem Assistenten Herrn Dr. *Holborn* leiten.

Numerisches Rechnen und Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate: Prof. *Schur*, Mittw. 3—6 auf der Sternwarte.

Naturwissenschaften.

Ueber die Existenzbedingungen der Thiere: Dr. *Hamann*, Freitag 4 Uhr, unentgeltlich.

Vergleichende Anatomie, besonders der Wirbelthiere, unter Bezugnahme auf die Entwicklungsgeschichte: Prof. *Ehlers*, Montag bis Freitag, 4 Uhr.

Naturgeschichte der Wirbelthiere mit besonderer Berücksichtigung der mitteleuropäischen Fauna, zugleich mit Demonstrationen im Kgl. zoologischen Museum Dr. *Brock*, dreimal 12 Uhr an zu bestimmenden Tagen.

Medicinische Zoologie: Dr. *Henking*, 3 Stunden 9 Uhr.

Die Parasiten des Menschen und der Hausthiere: Dr. *Hamann*, Donnerstag und Freitag 6 Uhr.

Descendenztheorie und Darwinismus: Dr. *Brock*, Donnerstag 6 Uhr, unentgeltlich.

Zootomischer Kurs: Prof. *Ehlers*, Dienst. und Mittw. 11—1 Uhr.

Zoologische Uebungen wird Prof. *Ehlers* täglich mit Ausnahme des Sonnabend von 10—1 Uhr anstellen.

Zoologische Societät für Vorgeschrittenere: Prof. *Ehlers*.

Anatomie der Pflanzen: Prof. *Berthold*, Dienst. u. Freit. 12 Uhr.

Ueber die Vegetation des Meeres: Prof. *Berthold*, Donnerstag 12 Uhr, öffentlich.

Ueber die Thallophyten: Prof. *Graf zu Solms*, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag 4 Uhr.

Ueber wichtigere, zumal exotische, Nutz- und Arzneigewächse: Prof. *Graf zu Solms*, Freitag 4 Uhr, öffentl.

Mikroskopisch-botanischer Kursus: Prof. *Berthold*, Sonnabend von 9—1 Uhr (für Pharmaceuten zweistündig).

Tägliche Arbeiten im pflanzenphysiologischen Institut: Prof. *Berthold*.

Anleitung zu selbstständigen Arbeiten im Laboratorium des botanischen Gartens, wesentlich für Vorgeschrittene: Prof. *Graf zu Solms*.

Mineralogie: Prof. *Liebisch*, Mont. Dienst. Donn. Freit. 12 Uhr.

Krystallographie: Prof. *Liebisch*, Mittw. und Sonnabend, 12 Uhr.

Ueber krystallinische Schiefer: Dr. *Rinne*, 1 St., unentgeltlich.

Geologie: Prof. *von Koenen*, Montag bis Freitag, 8 Uhr.

Ueber einzelne Klassen von Versteinerungen: Prof. *von Koenen*, eine Stunde öffentlich.

Mineralogische Uebungen: Prof. *Liebisch*, Sonnabend 11 Uhr, öffentlich.

Krystallographisches Practicum: Prof. *Liebisch*, täglich, privatissime, aber unentgeltlich, in zu bestimmenden Stunden.

Uebungen im Bestimmen: Prof. *von Koenen*, zwei Stunden, öffentlich.

Palaeontologische Uebungen: Prof. *von Koenen*, täglich, privatissime, aber unentgeltlich.

Experimentalphysik, zweiter Theil: Magnetismus, Elektricität und Wärme: Prof. *Riecke*, Mont., Dienst, Donnerst., Freit., 5 Uhr.

Die Uebungen im physikalischen Institute leiten die Prof. *Riecke* und *Voigt*, in Gemeinschaft mit den Assistenten Dr. *Hugo Meyer*, Dr. *Krüger* und cand. *Drude*, Dienstag, Freitag 2—4 Uhr und Sonnabend 9—1 Uhr, privatissime. Für Mathematiker: Dienstag, Freitag 2—4 Uhr; für Pharmaceuten und Chemiker: Sonnabend 9—1 Uhr.

Ueber die Uebungen im mathematisch-physikalischen Seminar vgl. *Mathematik* und *Astronomie* S. 355.

Allgemeine Chemie, unorganischer Theil (unorganische Experimentalchemie): Prof. *V. Meyer*, sechs Stunden, 9 Uhr.

Chemie der Benzolderivate, I. Theil: Dr. *Leuckart*, Dienstag, Mittwoch und Donnerstag, 8 Uhr.

Organische Chemie für Mediciner: Prof. *von Uslar*, 4 St., 9 Uhr.

Constitutionslehre der organischen Verbindungen: Dr. *Jacobson*, Mont. 6 Uhr und Mittw. 4 Uhr.

Allgemeine Reaktionen der organischen Chemie: Dr. *Gattermann*, 2 Stunden.

Colloquium über organische Chemie: Dr. *Gattermann*, Montag 2 St., privatissime.

Analytische Chemie (I. Theil): Dr. *Buchka*, Dienstag und Donnerstag 11 Uhr.

Experimentelle Gasanalyse: Prof. *Jannasch*, Mont. 8 Uhr und Donnerstag 11 Uhr.

Pharmaceutische Chemie (organischer Theil): Prof. *Polstorff*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 4 Uhr.

Ueber die Verunreinigungen und Verfälschungen der Nahrungs- und Genußmittel und deren Erkennung: Prof. *Polstorff*, Freit. und Sonnabend 8 Uhr.

Pharmacie: Prof. *von Uslar*, viermal, 3 Uhr.

Technische Chemie für Landwirthe (Zuckerfabrikation, Gährungsindustrien, Molkerei etc.): Prof. *Tollens*, Mont., Dienst., Mittw., 10 Uhr.

Grundzüge der Chemie für Landwirthe, II. Theil: Dr. *Pfeiffer*, Donnerstag und Freitag, 10 Uhr.

Ueber Zuckerbestimmungen, besonders durch Polarisation: Prof. *Tollens*, Donnerstag 6 Uhr, öffentlich.

Die chemischen Uebungen und wissenschaftlichen Arbeiten im akadem. Laboratorium leitet Prof. *V. Meyer* in Gemeinschaft mit Prof. *Polstorff* und den Assistenten Prof. *Jannasch*, Dr. *Buchka*, Dr. *Leuckart*, Dr. *Gattermann*, Dr. *Demuth* und Dr. *Auwers*; und zwar: 1) Vollpracticum, Mont. bis Freit., von 8 bis 12 und von 3 bis 6 Uhr; 2) Halbpracticum, je Vor- oder Nachmittags, täglich außer Sonnabends; 3) Chemisches Anfängerpracticum für Mediciner, täglich, mit Ausschluß des Sonnabends.

Prof. *Tollens* leitet die praktisch-chemischen Uebungen im agriculturchemischen Laboratorium in Gemeinschaft mit Dr. *Rischbiet*, Montag bis Freitag von 8—12 und von 2—4 Uhr.

Historische Wissenschaften.

Lehre von den deutschen Kaiserurkunden: Prof. *Steindorff*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 12 Uhr.

Paläographische Uebungen: Prof. *Steindorff*, Mittwoch 11—1 Uhr, privatissime, unentgeltlich.

Allgemeine Geschichte vom deutschen Interregnum bis zum Ausgang des Mittelalters: Dr. *von Kap-herr*, Sonnabend, 9—11 Uhr.

Deutsche Geschichte bis 1806: Prof. *Weiland*, fünfstündig, 9 Uhr.

Quellenkunde der neueren Geschichte, insbesondere der deutschen: Prof. *Kluckhohn*, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 10 Uhr.

Geschichte des Zeitalters der Revolution 1789—1815: Prof. *Kluckhohn*, Mont., Dienst., Donn., Freit. 5 Uhr.

Englische Geschichte des 16. und 17. Jahrhunderts: Dr. *Friedensburg*, Mittw. und Sonnabend, 8 Uhr.

Geschichte Italiens im Mittelalter: Prof. Dr. *Theod. Wüstenfeld*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 10 Uhr, öffentlich in seiner Wohnung.

Historische Uebungen leitet Prof. *Volquardsen*, Dienstag, 6 Uhr, öffentlich.

Historische Uebungen: Prof. *Weiland*, Freit., 6 Uhr, privatissime, aber unentgeltlich.

Historische Uebungen: Prof. *Kluckhohn*, Mont., 6 Uhr, privatissime, aber unentgeltlich.

Historische Uebungen (insbesondere für Anfänger): Dr. *Friedensburg*, Donnerst. 6 Uhr, privatissime aber unentgeltlich.

Kirchengeschichte: s. unter *Theologie* S. 350.

Erd- und Völkerkunde.

Geographie von Amerika, mit besonderer Berücksichtigung der Entdeckungsgeschichte: Prof. *Herm. Wagner*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 11 Uhr.

Geographische Uebungen: Prof. *Wagner*, Sonnabend 10—12 Uhr, privatissime.

Staatswissenschaft.

Nationalökonomie, grundlegender Theil, als Einleitung in das Studium der Staatswissenschaften: Prof. *Cohn*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 4 Uhr.

Specielle Nationalökonomie: Prof. *Lexis*, Dienst., Mittw., Donn., Freit.

Finanzwissenschaft, mit besonderer Rücksicht auf die deutsche und preußische Steuergesetzgebung: Prof. *Cohn*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 5 Uhr.

Einleitung in die Statistik: Prof. *Lexis*, 1 St., Mittw.

Staatswissenschaftliches Seminar: Prof. *Cohn*, Mittwoch 5—7 Uhr, privatissime, unentgeltlich.

Staatswissenschaftliche Uebungen: Prof. *Lexis*, öffentlich, 2 Stunden.

Landwirthschaft.

Einleitung in das landwirthschaftliche Studium: Prof. *Drechsler*, 1 Stunde, öffentlich.

Die Ackerbausysteme (Felderwirthschaft, Feldgraswirthschaft, Fruchtwechselwirthschaft u. s. w.): Prof. *Griepenkerl*, Donnerst. und Freitag, 11 Uhr.

Die allgemeine und specielle landwirthschaftliche Thierproductionslehre (Lehre von den Nutzungen, der Züchtung, Ernährung und Pflege des Pferdes, Rindes, Schafes, Schweines u. s. w.): Prof. *Griepenkerl*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 5 Uhr.

Die landwirthschaftliche Rassenkunde: Prof. *Griepenkerl*, Mittwoch 5—7 Uhr, unentgeltlich.

Im Anschluß an diese Vorlesungen werden Excursionen nach benachbarten Landgütern und Fabriken veranstaltet werden.

Landwirthschaftl. Betriebslehre: Prof. *Drechsler*, sechs St., 12 Uhr.

Die Lehre von der Futterverwerthung (II. Theil der landwirthschaftlichen Fütterungslehre): Prof. *Henneberg*, Mont. u. Dienst. 11 Uhr.

Uebungen in Futterberechnungen: Prof. *Henneberg*, Mittwoch 11 Uhr, öffentlich.

Landwirthschaftliches Praktikum: Prof. *Drechsler* und Dr. *Edler*. (Uebungen im landw. Laboratorium, Freit. und Sonnab. 9—1 Uhr. Uebungen in landw. Berechnungen, 2 Stunden, Montag 6 Uhr); Excursionen und Demonstrationen, Mittw. Nachmittag.

Chemie und praktisch-chemische Uebungen für Landwirthe vgl. *Naturwissenschaften* S. 358.

Anatomie, Physiologie und Pathologie der Hausthiere vgl. *Medicin* S. 354.

Literär- und Kunstgeschichte.

Buchwesen des Mittelalters: Prof. *Dziatzko*, Dienst., Freit. 6 Uhr.

Bibliographische Uebungen: Prof. *Dziatzko*, Mittw. 3 Uhr, privatissime, unentgeltlich.

Geschichte der Poesie und Künste im Zeitalter Alexander d. Gr. und seiner Nachfolger: Prof. *Dilthey*, vier Stunden, 10 Uhr.

Geschichte der römischen Dichtung: Prof. *Wilh. Meyer*, Mont., Dienst., Donn., Freit. 5 Uhr.

Geschichte der lyrischen und Spruchpoesie im deutschen Mittelalter: Prof. *Heyne*, 3 Stunden, 12 Uhr.

Geschichte der deutschen Literatur von Klopstock bis zu Schillers Tod: Dr. *Roethe*, Montag, Mittwoch, Freitag, 3 Uhr.

Geschichte der Universität Göttingen: Prof. *von Leutsch*, Mittw. und Sonnabend, 12 Uhr.

Encyklopädie der bildenden Künste (Technik, Aesthetik u. s. w.): Prof. *Lange*, Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag 11 Uhr.

Die modernen Strömungen in der bildenden Kunst: Prof. *Lange*, Montag 6 Uhr, öffentlich.

Kunstgeschichtliche Uebungen. Erklärung des christlichen Bilderkreises: Prof. *Lange*, Donnerstag 6 Uhr, privatissime, aber unentgeltlich

Alterthumskunde.

Griechische Alterthümer: Prof. *Volquardsen*, Mont., Dienst., Donn., Freit. 8 Uhr.

Die gottesdienstlichen und Privatalterthümer der Griechen wird Prof. *Wieseler* durch Bildwerke erläutert vortragen, dreistündig, 12 Uhr.

Im K. archäologischen Seminar wird Prof. *Wieseler* ausgewählte Kunstwerke zur Erklärung vorlegen, Sonnabend 12 Uhr, öffentlich.

Die schriftlichen Arbeiten der Mitglieder des K. archäologischen Seminars wird er privatissime beurtheilen.

Archäologische Uebungen: Prof. *Dilthey*, Sonnabend 11 Uhr.

Orientalische Sprachen.

Die Vorlesungen über das A. Testament s. unter *Theologie* S. 349.

Arabische Grammatik: Prof. *Wüstenfeld*, privatissime.

Fortsetzung der Sanskrit-Grammatik und Erklärung des Hitopadeça und Manu nach Lanman's „Sanskrit Reader“: Prof. *Kielhorn*, Montag, Mittwoch und Sonnabend, 8 Uhr.

Erklärung von Bhavabhûtis Mâlatîmâdhava oder eines anderen schwierigen Textes: Prof. *Kielhorn*, Mittwoch, Sonnabend 9 Uhr.

Erklärung der Laghukaumudî: Prof. *Kielhorn*, in zwei passenden Stunden.

Uebungen in der Erklärung Indischer Inschriften: Prof. *Kielhorn*, Montag 9 Uhr, privatissime, aber unentgeltlich.

Griechische und lateinische Sprache.

Ueber die Dialekte der griechischen Sprache: Prof. *Fick*, 2 Stunden, 9 Uhr.

Syntax der griechischen Sprache: Prof. *Sauppe*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit. 9 Uhr.

Homers Ilias: Prof. *von Wilamowitz-Moellendorff*, 4 Stunden, 12 Uhr.

Ueber die homerische Ilias: Prof. *Fick*, 4 Stunden, 9 Uhr.

Uebungen im Lesen griechischer Handschriften: Prof. *Wilh. Meyer*, privatissime.

Plautus Pseudolus: Prof. *Sauppe*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 4 Uhr.

Im K. philologischen Seminar leiten die schriftlichen Arbeiten und Disputationen Prof. *Sauppe* und Prof. *von Wilamowitz-Moellendorff*, Mittwoch 11 Uhr; läßt Thukydides B. 1 erklären Prof. *von Wilamowitz-Moellendorff*, Mont. und Donn., 11 Uhr; läßt Lucretius B. 5 erklären Prof. *Sauppe*, Dienst. u. Freit., 11 Uhr, alles öffentlich.

Im K. philologischen Proseminar wird Prof. *Wilh. Meyer* Quintilian XII interpretiren lassen, sowie die Disputationen über die Arbeiten der Mitglieder leiten, Mittwoch 9—11 Uhr, öffentlich.

Deutsche Sprache.

Angelsächsische Grammatik: Prof. *Bechtel*, Mittw. und Sonnabend, 9 Uhr.

Altnordische Grammatik: Prof. *Bechtel*, Mont. und Donnerstag 6 Uhr.

Formenlehre des Neuhochdeutschen auf historischer Grundlage: Prof. *Heyne*, viermal wöchentlich, 5 Uhr.

Erklärung der Gudrun (nach Martins kleinerer Ausgabe): Dr. *Roethe*, Dienstag und Donnerstag, 3 Uhr.

Altsächsische Uebungen für Anfänger: Dr. *Roethe*, Mittw. 8 Uhr, unentgeltlich.

Altdeutsche Uebungen: Prof. *Heyne*, 1 St., öffentlich.

Althochdeutsche Uebungen: Dr. *Roethe*, Dienst. und Donnerstag 8 Uhr, unentgeltlich.

Geschichte der deutschen Literatur: s. *Literärgeschichte* S. 360.

Gotische Uebungen: Prof. *Bechtel*. Privatissime, unentgeltlich, Mittwoch 6 Uhr.

Neuere Sprachen.

Einführung in das Studium der romanischen Sprachen: Prof. *Vollmöller*, Mont., Dienst., Mittw., Donnerstag, 12 Uhr.

Die Gedichte Bertrans de Born, nebst einer Einleitung über dessen Leben: Dr. *Andresen*, Mont. und Dienst. 10 Uhr.

Uebungen in der französischen Sprache: Prof. *Vollmöller* mit Dr. *Cloetta*, Montag und Mittwoch 10—11 Uhr.

Historische Grammatik der englischen Sprache: Prof. *Albr. Wagner*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 9 Uhr.

Im Seminar für neuere Sprachen hält Prof. *Vollmöller* Uebungen, Mittw. 6—8 Uhr, und erklärt die Sophonisbe von Jean de Mairet mit Dr. *Cloetta* in französischer Sprache, Dienst. 10—11 Uhr; ebenso erklärt er Dantes Commedia mit Dr. *Cloetta*, Dienstag 6 Uhr;

französische Uebungen leitet Dr. *Andresen*, Freitag 6 Uhr; englische Uebungen leitet Prof. *Albr. Wagner*, Montag Abends 6 Uhr, und giebt Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten Donnerstag 6 Uhr.

Schöne Künste. — Fertigkeiten.

Harmonie- und Kompositionslehre, verbunden mit praktischen Uebungen: Prof. *Hille*, in passenden Stunden.

Zur Theilnahme an den Uebungen der Singakademie und des Orchesterspielvereins ladet Prof. *Hille* ein.

Harmonielehre: Prof. *Freiberg*, wöch. 2 Stunden, öffentlich. — Auch hält er Uebungen im Ensemblespiel.

Unterricht im Zeichnen ertheilt Zeichenlehrer *Peters*, Sonnabend 2—4 Uhr, unentgeltlich.

Unterricht im Malen *Derselbe* in zu verabredenden Stunden.

Reitunterricht ertheilt in der K. Universitäts-Reitbahn der Univ. Stallmeister, Rittmeister a. D. *Schweppe*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, Sonnabend, Vormittags v. 8—12 u. Nachm. (außer Sonnab.) v. 3—4 Uhr.

Fechtkunst lehrt der Universitätsfechtmeister *Grüneklee*, Tanzkunst der Universitätstanzmeister *Hölzke*.

Oeffentliche Sammlungen.

In der *Universitätsbibliothek* ist das Ausleihezimmer an den Wochentagen von 12—1 und von 2—3 Uhr, der Lesesaal von 10—4 Uhr geöffnet. Verliehen werden Bücher nach Abgabe einer Semesterkarte mit der Bürgschaft eines Professors.

Die *Gemäldesammlung* ist (Aula, 1 Treppe hoch links) Sonntags von 11—1 Uhr geöffnet.

Der *botanische Garten* ist, die Sonn- und Festtage ausgenommen, täglich von 7—12 und von 2—6 Uhr geöffnet.

Die *mineralogische* und die *geologisch-paläontologische Schausammlung* sind im Winterhalbjahr bis zum 1. December Sonnabends von 1 bis 3 Uhr dem Publikum geöffnet.

Ueber den Besuch und die Benutzung der *theologischen Seminarbibliothek*, des *Theatrum anatomicum*, des *physiologischen Instituts*, der *pathologischen Sammlung*, der *Sammlung mathematischer Instrumente und Modelle*, des *zoologischen und ethnographischen Museums*, des *botanischen Gartens* und des *pflanzenphysiologischen Instituts*, der *Sternwarte*, des *physikalischen Kabinets* und *Laboratoriums*, der *mineralogischen* und der *geognostisch-paläontologischen Sammlung*, der *chemischen Laboratorien*, des *archäologischen Museums*, der *Gemäldesammlung*, der *Bibliothek des K. philologischen Seminars*, der *Bibliothek* und des *Lesezimmers des*

K. mathematisch-physikalischen Seminars, des *diplomatischen Apparats*, der *Sammlungen des landwirthschaftlichen Instituts* bestimmen besondere Reglements das Nähere.

Bei dem Logiscommissar, Pedell *Bartels* (Kleperweg 2), können die, welche Wohnungen suchen, sowohl über die Preise, als andere Umstände Auskunft erhalten und auch im voraus Bestellungen machen.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

10. August. № 13. 1887.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 7. Mai.

Beobachtungen über Metallreflexion.

Von R. Hennig.

Einleitung.

In den Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen von 1884 entwickelt Herr Voigt eine Theorie der absorbirenden isotropen Medien und giebt insbesondere eine quantitative Bestimmung der bei der Reflexion polarisirten Lichtes an ebenen Metallflächen auftretenden Erscheinungen [1]). Die hierzu in Betracht kommenden Formeln sind seitdem wesentlich gekürzt und für die Rechnung bequemer gemacht worden [2]) und lauten in einer vereinfachten Gestalt folgendermaßen:

Bezeichnet n_1 den Brechungsexponenten, $\varkappa_1$ den Absorptionscoefficienten des reflectirenden Mediums, α den Sinus, γ den Cosinus des Einfallswinkels, $\alpha_1 = \alpha/n_1$ den Sinus des Brechungswinkels, so ist die relative Phasenverzögerung der beiden Componenten (senkrecht und parallel zur Einfallsebene) des reflectirten Lichtes gegeben durch:

1) W. Voigt, Göttinger Nachrichten 1884, pag. 137 pp.

2) Die bequemste, Wied. Ann. Bd. XXXI p. 242, 1887, mitgetheilte Form war mir bei Durchführung der Berechnung noch nicht bekannt; die oben citirte findet sich am angegebenen Orte p. 241.

$$1^a) \qquad tg\ \Delta = tg\ \frac{2\pi(\vartheta_s - \vartheta_p)}{T} = \frac{2\,\alpha\gamma\alpha_1\,\zeta_1 \sin 2\,\varepsilon_1}{\gamma_2^2\,\zeta_1^2 - \alpha^2\,\alpha_1^2},$$

und das Amplitudenverhältniß dieser Componenten gegeben durch

$$1^b) \qquad \rho = \frac{R_s}{R_p} = \frac{E_s}{E_p}\left(\frac{\gamma^2\,\zeta_1^2 + \varkappa^2\,\alpha_1^2 - 2\,\alpha\gamma\alpha_1\,\zeta_1 \cos 2\,\varepsilon_1}{\gamma^2\,\zeta_1^2 + \alpha^2\,\alpha_1^2 + 2\,\alpha\gamma\alpha_1\,\zeta_1 \cos 2\,\varepsilon_1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

E_s und E_p bedeuten dabei die Amplituden der einfallenden Componenten (senkrecht und parallel zur Einfallsebene), ζ_1 und ε_1 sind Hülfsgrößen, welche definirt sind durch die Gleichungen:

$$\zeta_1^4 = 4\,\varkappa_1^2 + (1 - \alpha_1^2 - \varkappa_1^2)^2,$$

$$tg\ 4\,\varepsilon_1 = \frac{2\,\varkappa_1}{1 - \alpha_1^2 - \varkappa_1^2}$$

Die Größen Δ und ρ lassen sich bequem mit Hülfe eines Babinet'schen Compensators und eines analysirenden Nikol's bestimmen. Beobachtet man diese Größen für irgend einen gegebenen Einfallswinkel bei gegebenem Azimuthe des einfallenden Lichtes, so lassen sich hieraus vermittelst der obigen Gleichungen die Constanten n_1 und $\varkappa_1$ des reflectirenden Mediums berechnen. In der Regel beobachtet man den sogenannten Polarisationswinkel des Mediums, d. h. denjenigen Einfallswinkel, für welchen $\Delta = \pi/2$ ist, — und das Hauptazimuth, d. h. dasjenige Azimuth, unter welchem das im Polarisationswinkel und unter dem Azimuth $\pi/4$ einfallende Licht reflectirt wird. Die trigonometrische Tangente dieses Hauptazimuths giebt das Amplitudenverhältniß der reflectirten Componenten.

Kennt man den Polarisationswinkel φ und das Hauptazimuth ψ des Mediums, und setzt man zur Abkürzung

$$\frac{\sin 4\,\psi}{\operatorname{cotg}^2 \varphi + \cos 4\,\psi} = tg\,\chi$$

so hat man für die Constanten n_1 und $\varkappa_1$ des Mediums die Gleichungen:

$$2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varkappa_1 &= tg\,\frac{\chi}{2} \\ n_1 &= \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi}\sqrt{\frac{\sin 4\psi}{2\,\varkappa_1}} \end{aligned} \right.$$

Etwas complicirter werden die Formeln, wenn es sich darum handelt, die absoluten Phasenverzögerungen und die Amplituden der einzelnen Componenten zu bestimmen. In der erst citirten

Abhandlung gewinnt Herr Voigt für diese Größen die folgenden Ausdrücke:

Es mögen n_1, $\varkappa_1$, α, γ und α_1 dieselbe Bedeutung haben wie oben, ferner möge folgendes System von Hülfsgrößen eingeführt sein:

$$2\gamma_1^2 = \sqrt{4\varkappa_1^2 + (1-\alpha_1^2-\varkappa_1^2)^2} + (1-\alpha_1^2-\varkappa_1^2)$$

$$2\beta_1^2 = \sqrt{4\varkappa_1^2 + (1-\alpha_1^2-\varkappa_1^2)^2} - (1-\alpha_1^2-\varkappa_1^2),$$

$$\sigma_s = \frac{\gamma_1(1-\varkappa_1^2) + 2\varkappa_1^2}{\gamma_1^2(1+\varkappa_1^2)^2}, \qquad \sigma_p = \frac{\gamma_1^2}{\beta_1^2+\gamma_1^2},$$

$$\delta_s = \frac{\varkappa_1(2\gamma_1^2+\varkappa_1^2-1)}{\gamma_1^2(1+\varkappa_1^2)^2}, \qquad \delta_p = \frac{\varkappa_1}{\beta_1^2+\gamma_1^2},$$

$$tg\,\mu_s = \frac{\alpha_1\gamma_1\delta_s}{\alpha\gamma+\alpha_1\gamma_1\sigma_s}, \qquad tg\,\mu_p = \frac{\alpha_1\gamma\delta_p}{\alpha\gamma_1+\alpha_1\gamma\sigma_p},$$

$$tg\,\nu_s = \frac{\alpha_1\gamma_1\delta_s}{\alpha\gamma-\alpha_1\gamma_1\sigma_s}, \qquad tg\,\nu_p = \frac{\alpha_1\gamma\delta_p}{\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma\sigma_p}.$$

Dann sind die Amplituden der reflectirten Componenten gegeben durch:

$$\left.\begin{aligned} R_s &= E_s \cdot \frac{\sin\mu_s}{\sin\nu_s}, \\ R_p &= E_p \cdot \frac{\sin\mu_p}{\sin\nu_p} \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

und die Phasenverzögerungen dieser Componenten gegen die einfallende Welle gegeben durch:

$$\left.\begin{aligned} tg\,\frac{2\pi\vartheta_s}{T} &= tg\,(\mu_s+\nu_s), \\ tg\,\frac{2\pi\vartheta_p}{T} &= tg\,(\mu_p+\nu_p). \end{aligned}\right\} \qquad 4)$$

Die absoluten Amplituden und Phasenverzögerungen der beiden Componenten sind weit schwieriger genau zu bestimmen als ihre relative Phasenverzögerung und das Amplitudenverhältniß. Für die Amplituden sind photometrische Messungen ausgeführt von Jamin; Herr Voigt hat die betreffenden Beobachtungen mit seiner Theorie verglichen und eine befriedigende Uebereinstimmung gefunden. Für die Bestimmung der absoluten Phasenverzögerung hat man ein Mittel in der Beobachtung der durch die Combination einer Glaslinse mit einer Metallplatte erzeugten Newton'schen Ringe. Messungen der Durchmesser solcher Ringe sind u. A. von

Herrn Quinke[1]) ausgeführt worden, der dann seine Beobachtungen mit von Cauchy aufgestellten Formeln vergleicht; es zeigt sich dabei eine sehr geringe Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung, die sich nur zum Theil aus Beobachtungsfehlern erklärt.

Herr Voigt hat in einer späteren Arbeit[2]) seine Theorie direkt auf den erwähnten Fall der Newton'schen Ringe angewendet. Er findet hierbei für die Intensität des reflectirten Lichtes den Ausdruck:

$$R^2 = E^2 \cdot \frac{(r \sin \nu - \sin \mu)^2 + 4r \sin \mu \sin \nu \cos^2 \frac{1}{2}(2h + \mu + \nu)}{(\sin \nu - r \sin \mu)^2 + 4r \sin \mu \sin \nu \cos^2 \frac{1}{2}(2h + \mu + \nu)}.$$

Je nachdem man die Componente senkrecht oder parallel zur Reflexionsebene ins Auge faßt, hat man den Größen R, E, r, μ und ν den Index s oder p anzufügen. Die Größen μ und ν haben dabei dieselbe Bedeutung wie oben; die Hülfsgrößen r und h sind Abkürzungen für folgende Ausdrücke:

$$r_s = \frac{\alpha\gamma - \alpha_1\gamma_1}{\alpha\gamma + \alpha_1\gamma_1}, \qquad r_p = \frac{\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma}{\alpha\gamma_1 + \alpha_1\gamma}, \qquad h = \frac{2\pi l \gamma_1}{\lambda_1}.$$

Hierin sind α und γ der Sinus und Cosinus des Einfallswinkels im ersten Medium (der Glaslinse), α_1 und γ_1 haben dieselbe Bedeutung für das zweite Medium. Ist dieses zweite Medium Luft, so sind α_1 und γ_1 zugleich Sinus und Cosinus des Einfallswinkels in der umgebenden Luft. Endlich bedeutet l die Dicke des zweiten Mediums an der betrachteten Stelle, λ_1 die Lichtwellenlänge in diesem Medium.

r_s ist negativ für Einfallswinkel, welche kleiner sind als der Polarisationswinkel des ersten Mediums; für größere Einfallswinkel ist es positiv. r_p ist dagegen immer negativ. Läßt man daher Licht auffallen, welches senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist, so sind die Intensitätsminima im reflectirten Lichte gegeben durch die Gleichungen:

a) für Einfallswinkel kleiner als der Polarisationswinkel der Linse:

$$5^a) \qquad 2h + \mu_s + \nu_s = 2i\pi$$

1) Quinke, Wiedemanns Annalen 142, pag. 380; 1871.

2) Voigt, Göttinger Nachrichten 1886, pag. 560. Dort steht im Zähler und Nenner statt des Cosinusquadrats das Sinusquadrat und beziehen sich μ und ν auf die Reflexion innerhalb des absorbirenden Mediums. Daß diese Formel mit unserer identisch ist, erweist sich durch das in Wied. Ann. Bd. 31, p. 239, 1887, Gesagte.

b) für Einfallswinkel größer als der Polarisationswinkel der Linse:

$$2h + \mu_s + \nu_s = (2i + 1)\pi. \quad 5^b)$$

Ist das auffallende Licht parallel zur Einfallsebene polarisirt, so sind die Intensitätsminima im reflectirten Lichte bei allen Einfallswinkeln gegeben durch die Gleichung:

$$2h + \mu_p + \nu_p = 2i\pi. \quad 5^c)$$

Die folgenden Beobachtungen zerfallen in zwei Gruppen: die erste Gruppe enthält Messungen über die relative Phasenverzögerung und das Amplitudenverhältniß der beiden Componenten des an Stahlspiegeln reflectirten Lichtes; die zweite Gruppe bestimmt die absoluten Phasenverzögerungen dieser Componenten durch Messung der Durchmesser Newton'scher Ringe, die durch Combination der erwähnten Stahlspiegel mit Glaslinsen erzeugt wurden.

Die Beobachtungen sind auf Anregung des Herrn Prof. Voigt im physikalischen Institute der Universität Göttingen ausgeführt worden, und bin ich Herrn Voigt, meinem hochverehrten Lehrer, für die mannigfaltige Beihülfe, die er mir bei den Untersuchungen leistete, zu großem Danke verpflichtet.

---

1. Theil:

Messung der relativen Phasenverzögerung und des Amplitudenverhältnisses der reflectirten Componenten.

Zu den sämmtlichen Beobachtungen wurden Stahlspiegel verwendet, die in vorzüglicher Ausführung von der Firma Reinfelder und Hertel in München geliefert worden waren. Diese Spiegel wurden vor jeder Beachtungsreihe durch wiederholtes Abwaschen mit Akohol und Abtrocknen mit weicher Leinwand gereinigt; die Resultate des Herrn Wernicke[1]) über das Reinigen von Metallflächen durch Gelatine waren mir bei Ausführung der Beobachtungen noch nicht bekannt, kommen aber auch nicht in Betracht, da für die vorliegenden Zwecke keine absoluten Constantenwerthe erforderlich sind.

Für die Beobachtungen der ersten Gruppe wurde der Spiegel in bekannter Weise derart auf dem Tischchen eines Spektrometers aufgestellt, daß seine spiegelnde Fläche der Drehaxe des Instrumentes parallel war, darauf durch das mit drehbarem Nikol ver-

---

1) Wernicke, Wied. Ann. Bd. XXX, pg. 461, 1887.

sehene Collimatorrohr Licht auf den Spiegel geworfen, welches unter dem Azimuth 45° gegen die Einfallsebene polarisirt war, und das reflectirte Licht durch das mit Nikol und Babinet'schen Compensator versehene Beobachtungsfernrohr in bekannter Weise analysirt.

Beleuchtung des Spaltes. Um eine scharfe Einstellung des Babinets und des Nikols zu ermöglichen, ist es nothwendig, den Spalt des Collimatorrohres möglichst intensiv zu beleuchten. Die gewöhnliche mittelst eines Bunsenbrenners hergestellte Natriumflamme scheint hierzu nicht ausreichend; es wurde daher der Bunsenbrenner durch einen Knallgasbrenner ersetzt und die Flamme eines Gemisches von Leuchtgas und Sauerstoff verwendet. Wird in diese Flamme eine Natronperle eingebracht, so erhält man ein intensives gelbes Licht, dem allerdings leicht durch den mitglühenden Platindraht einige weiße Strahlen beigemischt werden; doch zeigten sich diese für die Beobachtung nicht störend.

Da es schwierig war, mittelst der erwähnten Flamme den Spalt in seiner ganzen Ausdehnung gleichmäßig zu beleuchten, so wurde derselbe durch eine kreisrunde Oeffnung von etwa ½ mm. Durchmesser ersetzt. Auf das Bild einer solchen Oeffnung läßt sich eben so scharf und bequem einstellen wie auf ein Spaltbild; außerdem bietet die runde Oeffnung den Vortheil, daß jede zufällige Neigung des Spiegels sich sofort durch eine Verschiebung des Bildes verrät.

Auswerthung der Nikols. Um das Azimuth des einfallenden und reflectirten Lichtes gegen die Einfallsebene bestimmen zu können, muß man zunächst ermitteln, bei welchen Stellungen der mit den Nikols verbundenen Theilkreise die Polarisationsebenen der Nikols parallel oder senkrecht zur Einfallsebene liegen. Man verfährt dazu bekanntlich so, daß man auf einen Glasspiegel, etwa die Fläche eines Prismas, Licht unter dem Polarisationswinkel auffallen läßt; dann ist das reflectirte Licht vollständig in der Einfallsebene polarisirt. Dreht man also den Analysator so, daß das Spaltbild im Fernrohr verschwindet, so steht die Hauptebene (Polarisationsebene) des Analysators senkrecht auf der Einfallsebene. Nun richtet man das Fernrohr direkt auf den Spalt und dreht den Polarisator so, daß wieder Dunkelheit eintritt; dann steht die Hauptebene des Polarisators parallel zur Einfallsebene.

Als Mittel aus einer großen Anzahl von Beobachtungen fanden sich folgende Stellungen der beiden Theilkreise, bei welchen die Hauptebene des Polarisators parallel, die des Analysators senkrecht zur Einfallsebene lag:

Polarisator 132,9°
Analysator 48,4°.

Der wahrscheinliche Fehler dieser Einstellungen dürfte ein Zehntelgrad nicht übersteigen.

Auswerthung des Babinets. Das Fernrohr wurde direkt auf den Spalt, beziehentlich auf die denselben vertretende Oeffnung gerichtet, und nun diejenigen Einstellungen des Compensators aufgesucht, für welche bei gekreuzten Nikols das Spaltbild verschwand. Je nachdem man die positiven Richtungen der Amplituden festsetzt, kann man sagen, daß diese Einstellungen der Phasendifferenz $2n\pi$ oder der Phasendifferenz $(2n+1)\pi$ der einfallenden Componenten entsprechen; um die Beobachtungen mit der Theorie in Einklang zu bringen, muß man die letztere Festsetzung treffen.

Als Mittel aus einer größeren Anzahl von Beobachtungen ergaben sich folgende Einstellungen des Compensators:

18,22 36,05 53,82.

Da die Intervalle zwischen den drei Einstellungen gleich sein müssen, so ergeben sich aus diesen Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate die folgenden wahrscheinlichsten Werthe:

18,23 36,03 53,83.

Hierbei bedeuten die ganzen Zahlen volle Umdrehungen der Schraube, die Decimalstellen Trommeltheile derselben, von denen 100 auf eine volle Umdrehung gingen. Der wahrscheinliche Fehler der obigen Einstellungen mag etwa 2 bis 3 Trommeltheile betragen.

Spätere Controlauswerthungen sowohl der Nikols als des Babinets ergaben keine wesentlichen Abweichungen von den obigen Zahlen.

Beobachtungen.

Die folgende Tabelle giebt in der zweiten und dritten Colonne diejenigen Einstellungen des Babinets und des analysirenden Nikols, welche für die in der ersten Colonne verzeichneten Einfallswinkel das am Stahlspiegel I reflectirte Spaltbild zum Verschwinden brachten. Das einfallende Licht war dabei unter dem Azimuth 45° gegen die Einfallsebene polarisirt. Colonne 4 und 5 enthalten die aus diesen Einstellungen abgeleiteten Werthe der relativen Phasenverzörung Δ und des Amplitudenverhältnisses ρ der reflectirten Componenten. Die Werthe von Δ sind dabei in Theilen von π ausgedrückt, so daß also $\Delta = 1$ einem Gangunterschiede von einer halben Wellenlänge entspricht.

Tabelle (1).

1. Einfallswinkel	2. Babinet	3. Nikol	4. Δ beob.	5. ρ beob.	6. Δ berech.	7. ρ berech.
85°	34,34	82,75	0,810	0,683	0,807	0,676
80°	32,59	76,6	0,613	0,536	0,610	0,534
78°	31,96	75,8	0,542	0,518	0,538	0,518
76°	31,35	75,7	0,474	0,516	0,472	0,516
74°	30,82	75,95	0,415	0,522	0,415	0,526
72°	30,38	76,55	0,365	0,535	0,366	0,541
70°	30,03	77,3	0,326	0,552	0,325	0,562
65°	29,31	79,85	0,245	0,611	0,245	0,619
60°	28,80	81,9	0,188	0,662	0,188	0,675
55°	28,42	83,9	0,145	0,713	0,146	0,729
50°	28,14	85,7	0,113	0,762	0,114	0,778
45°	27,90	87,1	0,087	0,801	0,088	0,822
40°	27,70	88,8	0,064	0,836	0,067	0,859
35°	27,55	89,3	0,047	0,866	0,050	0,893
30°	27,42	90,1	0,033	0,891	0,035	0,920

Aus den Werthen der Colonne (4) bestimmt sich der Polarisationswinkel, also derjenige Einfallswinkel, für welchen $\Delta = 0{,}5$ ist, durch Interpolation zu $\varphi = 76{,}8^\circ$; das zugehörige Amplitudenverhältniß findet sich gleichfalls durch Interpolation zu $\rho = 0{,}515$. Vermittelst dieser Werthe berechnen sich aus den Gleichungen (2) die Constanten n_1 und $\varkappa_1$ der Platte zu:

$$\varkappa_1 = 1{,}33 \qquad n_1 = 2{,}49.$$

Diese Constanten sind dann in die Gleichungen 1) eingesetzt und aus diesen die Werthe von Δ und ρ für die verschiedenen Einfallswinkel berechnet; die betreffenden Zahlen bilden die Colonnen (6) und (7) der obigen Tabelle.

Vergleicht man die berechneten Werthe mit den beobachteten, so findet sich zwar für die Phasenverzögerungen gute Uebereinstimmung, dagegen weichen die berechneten Amplitudenverhältnisse von den beobachteten mit abnehmenden Einfallswinkeln mehr und mehr ab, und zwar immer in demselben Sinne. Eine Erklärung aus zufälligen Beobachtungsfehlern erscheint deßhalb ausgeschlossen, zumal sich ganz dieselben Abweichungen auch bei den am zweiten Spiegel angestellten Beobachtungen ergaben. Es muß also, wenn anders die Voigt'sche Theorie den Beobachtungen entsprechen soll, in letzteren eine constante Fehlerquelle enthalten sein. In der That ergab sich bei einer sorgfältigen Revision des Beobachtungsapparates, daß eine solche Fehlerquelle wirklich vorhanden war und daß sie in einer ungenauen Orientirung des Babinet'schen Compensators bestand.

Für den gewöhnlichen Gebrauch des Compensators wird vorausgesetzt, daß die Hauptebenen desselben mit den Schwingungs-

ebenen der beiden Componenten zusammenfallen, deren Phasenunterschied man bestimmen will. Das für die vorliegenden Beobachtungen verwendete Instrument wurde nun mittelst einer an seinem Gehäuse befestigten Hülse auf den Kopf des Beobachtungsfernrohrs aufgeschoben; die Orientirung geschah einfach nach einer vom Mechaniker angebrachten Marke. Leider hatte ich versäumt, mich vorher von der Richtigkeit dieser Orientirung zu überzeugen. Durch die gefundenen Abweichungen sah ich mich veranlaßt, diese Prüfung nachträglich auszuführen (die Stellung des Compensators war während der ganzen Dauer der Beobachtungen ungeändert geblieben), und zwar geschah dies auf folgende Weise:

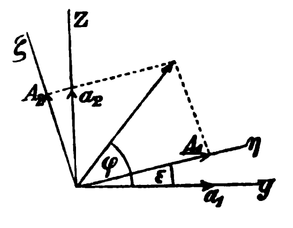
Das Fernrohr wurde direkt auf den Spalt gerichtet, der Polarisator auf das Azimuth 45° gestellt und diejenigen Einstellungen des Compensators fixirt, die bei gekreuzten Nikols Dunkelkeit hervorbrachten. Stellt man nun den Babinet auf die Mitte zwischen zwei solchen Einstellungen, so muß jetzt bei parallelen Nikols, also bei der Einstellung 3,4° des Analysators Dunkelheit eintreten. Es zeigte sich aber, daß dies nicht der Fall war, sondern daß die zweite Verdunkelung bei der Einstellung 2,6° des Analysators stattfand. Eine einfache Ueberlegung ergiebt hieraus, daß die Hauptebenen des Compensators, anstatt parallel und senkrecht zur Einfallsebene zu liegen, in Wirklichkeit einen Winkel von 0,4° mit diesen Richtungen bildeten.

Die folgende Betrachtung wird zeigen, daß dieser kleine Fehler in der Orientirung des Compensators vollständig ausreicht, um die gefundenen Abweichungen der Beobachtungen von der Theorie zu erklären.

Einschaltung: Ueber den Einfluß einer ungenauen Orientirung des Babinet'schen Compensators auf die Bestimmung des Phasenunterschiedes und des Amplitudenverhältnisses der einfallenden Componenten.

Es bedeute:

z die Drehaxe des Spektrometers, y die Richtung der Einfallsebene, η und ζ die Richtungen der Hauptebenen des Compensators, ε den Orientirungsfehler. Die Gleichungen der einfallenden Componenten parallel und senkrecht zur Einfallsebene mögen lauten:



$$y = a_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \delta_1\right)$$

$$z = a_2 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \delta_2\right).$$

Die Gleichungen der in den Hauptebenen des Compensators fortgepflanzten Componenten sind dann:

$$\eta = a_1 \cos\varepsilon \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \delta_1\right) + a_2 \sin\varepsilon \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \delta_2\right) =$$

$$= A_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \Delta_1\right)$$

$$\zeta = -a_1 \sin\varepsilon \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \delta_1\right) + a_2 \cos\varepsilon \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \delta_2\right) =$$

$$= A_2 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \Delta_2\right)$$

wobei: $A_1^2 = a_1^2 \cos^2\varepsilon + a_2^2 \sin^2\varepsilon + 2a_1 a_2 \cos\varepsilon \sin\varepsilon \cos 2\pi(\delta_1 - \delta_2)$

$$A_2^2 = a_1^2 \sin^2\varepsilon + a_2^2 \cos^2\varepsilon - 2a_1 a_2 \sin\varepsilon \cos\varepsilon \cos 2\pi(\delta_1 - \delta_2)$$

$$tg\, 2\pi\Delta_1 = \frac{a_1 \cos\varepsilon \sin 2\pi\delta_1 + a_2 \sin\varepsilon \sin 2\pi\delta_2}{a_1 \cos\varepsilon \cos 2\pi\delta_1 + a_2 \sin\varepsilon \cos 2\pi\delta_2}$$

$$tg\, 2\pi\Delta_2 = \frac{-a_1 \sin\varepsilon \sin 2\pi\delta_1 + a_2 \cos\varepsilon \sin 2\pi\delta_2}{-a_1 \sin\varepsilon \cos 2\pi\delta_1 + a_2 \cos\varepsilon \cos 2\pi\delta_2}.$$

Hieraus bestimmt sich:

$$tg\, 2\pi(\Delta_1 - \Delta_2) = \frac{a_1 a_2 \sin 2\pi(\delta_1 - \delta_2)}{\frac{a_2^2 - a_1^2}{2} \sin 2\varepsilon + a_1 a_2 \cos 2\varepsilon \cos 2\pi(\delta_1 - \delta_2)}.$$

Für kleines ε können wir setzen:

$$tg\, 2\pi(\Delta_1 - \Delta_2) = \frac{\sin 2\pi(\delta_1 - \delta_2)}{\cos 2\pi(\delta_1 - \delta_2) + \frac{a_2^2 - a_1^2}{2 a_1 a_2} \sin 2\varepsilon}.$$

Was mit dem Compensator gemessen wird, ist $\Delta_1 - \Delta_2$; gesucht wird dagegen $\delta_1 - \delta_2$, der Phasenunterschied der Componenten parallel und senkrecht zur Einfallsebene. Setzen wir zur Abkürzung:

$$2\pi(\Delta_1 - \Delta_2) = \alpha, \quad 2\pi(\delta_1 - \delta_2) = x, \quad \frac{a_2^2 - a_1^2}{2} \sin 2\varepsilon = c$$

so haben wir:

$$tg\, \alpha = \frac{\sin x}{\cos x + c}.$$

Setzen wir $x = \alpha + \tau$, wobei τ die dem gemessenen Phasen-

unterschiede α hinzuzufügende Correktion bedeutet, so haben wir:

$$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha\cos\tau + \cos\alpha\sin\tau}{\cos\alpha\cos\tau - \sin\alpha\sin\tau + c}.$$

Hieraus folgt:

$$\sin\tau = c\sin\alpha. \qquad 3)$$

Wenden wir uns nun zur Correction des Amplitudenverhältnisses. Wir messen mit dem Analysator den Winkel φ, während wir das Verhältniß $\frac{a_2}{a_1}$ haben wollen. Es ist nun:

$$tg\,\varphi = \frac{\frac{A_2}{A_1} + tg\,\varepsilon}{1 - \frac{A_2}{A_1}tg\,\varepsilon}.$$

Weiter haben wir:

$$\frac{A_2^2}{A_1^2} = \frac{a_1^2\sin^2\varepsilon + a_2^2\cos^2\varepsilon - 2a_1a_2\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos 2\pi(\delta_1-\delta_2)}{a_1^2\cos^2\varepsilon + a_2^2\sin^2\varepsilon + 2a_1a_2\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos 2\pi(\delta_1-\delta_2)}.$$

Für kleines ε können wir schreiben:

$$\frac{A_2^2}{A_1^2} = \frac{a_2^2 - 2a_1a_2\sin\varepsilon\cos 2\pi(\delta_1-\delta_2)}{a_1^2 + 2a_1a_2\sin\varepsilon\cos 2\pi(\delta_1-\delta_2)}$$

$$= \frac{a_2^2}{a_1^2}\cdot\frac{1 - 2\frac{a_1}{a_2}\sin\varepsilon\cos 2\pi(\delta_1-\delta_2)}{1 + 2\frac{a_2}{a_1}\sin\varepsilon\cos 2\pi(\delta_1-\delta_2)}$$

$$= \frac{a_2^2}{a_1^2}\left\{1 - 2\left(\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_1}{a_2}\right)\sin\varepsilon\cos 2\pi(\delta_1-\delta_2)\right\}$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{a_2}{a_1}\left\{1 - \left(\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_1}{a_2}\right)\sin\varepsilon\cos 2\pi(\delta_1-\delta_2)\right\}.$$

Demnach wird für kleines ε mit Vernachlässigungen 2. Ordnung:

$$\rho = \frac{\frac{a_2}{a_1}\left\{1 - \left(\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_1}{a_2}\right)\sin\varepsilon\cos 2\pi(\delta_1-\delta_2)\right\} + \sin\varepsilon}{1 - \frac{a_2}{a_1}\sin\varepsilon}.$$

Hieraus:

$$\frac{a_2}{a_1} = \rho\,.\,\frac{1 - \rho\sin\varepsilon}{1 - \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\sin\varepsilon\cos 2\pi(\delta_1-\delta_2) + \frac{1}{\rho}\sin\varepsilon}$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \rho \cdot \frac{1-\sin\varepsilon \,.\, \rho}{1+\sin\varepsilon\left\{\frac{1}{\rho}-\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos 2\pi(\delta_1-\delta_2)\right\}}$$

$$= \rho\left\{1-\sin\varepsilon\left[\rho+\frac{1}{\rho}-\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos 2\pi(\delta_1-\delta_2)\right]\right\}$$

$$4) \qquad \frac{a_2}{a_1} = \rho-\sin\varepsilon(\rho^2+1)\Big(1-\cos 2\pi(\delta_1-\delta_2)\Big).$$

Die Formeln (3) und (4) gestatten, die bei ungenauer Orientirung des Compensators erhaltenen Werthe der relativen Phasenverzögerung und des Amplitudenverhältnisses nachträglich zu corrigiren, sobald nur der Orientirungsfehler ε bekannt ist. Bei den obigen Beobachtungen sowie auch bei den nachfolgend mitgetheilten am Stahlspiegel II angestellten Beobachtungen ist für diesen Fehler der Werth $\varepsilon = -0{,}4^0$ einzusetzen.

Die nachfolgenden Tabellen enthalten die vollständigen Resultate der über die relative Phasenverzögerung und das Amplitudenverhältniß der reflectirten Componenten an den Stahlspiegeln I und II angestellten Beobachtungen. Colonne (2) und (3) enthalten wieder die direkten Einstellungen des Babinets und des analysirenden Nikols, welche für die in Colonne 1 verzeichneten Einfallswinkel das reflectirte Spaltbild zum Verschwinden brachten. Diese Einstellungen sind Mittelwerthe aus drei bis sechs einzelnen Beobachtungen; ihr wahrscheinlicher Fehler mag bei den Einstellungen des Compensators durchschnittlich 2 bis 3 Trommeltheile, bei denen des Nikols 1 bis 2 Decigrade betragen. Colonne (4) und (7) enthalten die aus diesen Einstellungen abgeleiteten, Colonne (5) und (8) die nach den obigen Correktionsformeln verbesserten Werthe der relativen Phasenverzögerung und des Amplitudenverhältnisses. Aus den verbesserten Werthen von Δ und ρ wurden durch Interpolation der Polarisationswinkel φ und das Hauptazimuth ψ, und hieraus nach den Gleichungen (2) die Constanten $\varkappa_1$ und n_1 der Platte berechnet; die betreffenden Werthe finden sich am Fuße jeder Tabelle. Mittelst der so erhaltenen Werthe von $\varkappa_1$ und n_1 wurden endlich die Werthe von Δ und ρ für die verschiedenen Einfallswinkel nach den Formeln (1) berechnet und in den Colonnen (6) und (9) niedergelegt.

Tabelle (2): Stahlspiegel I.

1. Einfalls-winkel	2. Babinet	3. Nikol	4. Δ beobach.	5. Δ corrig.	6. Δ berech.	7. ρ beobach.	8. ρ corrig.	9. ρ berechn.
85°	34,34	82,75	0,810	0,809	0,807	0,683	0,685	0,682
80°	32,59	76,6	0,613	0,610	0,610	0,536	0,542	0,544
78°	31,96	75,8	0,542	0,539	0,539	0,518	0,526	0,527
76°	31,35	75,7	0,474	0,471	0,474	0,516	0,526	0,526
74°	30,82	75,95	0,415	0,412	0,417	0,522	0,533	0,535
72°	30,38	76,55	0,365	0,363	0,369	0,535	0,547	0,550
70°	30,03	77,3	0,326	0,324	0,328	0,552	0,566	0,569
65°	29,31	79,85	0,245	0,243	0,247	0,611	0,627	0,625
60°	28,80	81,9	0,188	0,187	0,190	0,662	0,680	0,681
55°	28,42	83,9	0,145	0,145	0,148	0,713	0,733	0,734
50°	28,14	85,7	0,113	0,113	0,115	0,762	0,783	0,781
45°	27,90	87,1	0,087	0,087	0,089	0,801	0,824	0,824
40°	27,70	88,3	0,064	0,064	0,068	0,836	0,857	0,861
35°	27,55	89,3	0,047	0,047	0,050	0,866	0,890	0,893
30°	27,42	90,1	0,033	0,033	0,036	0,891	0,916	0,922

$\varphi = 76^0 50'$, $\psi = 27^0 40'$

$\varkappa_1 = 1,37$, $n_1 = 2,43$.

Tabelle (3): Stahlspiegel II.

1. Einfalls-winkel	2. Babinet	3. Nikol.	4. Δ beobach.	5. Δ corrig.	6. Δ berechn.	7. ρ beobach.	8. ρ corrig.	9. ρ berechn.
85°	34,28	82,1	0,803	0,802	0,803	0,667	0,669	0,669
80°	32,50	75,4	0,604	0,601	0,602	0,510	0,516	0,531
78°	31,84	75,2	0,529	0,526	0,528	0,505	0,513	0,516
76°	31,27	75,4	0,465	0,462	0,463	0,509	0,519	0,516
74°	30,74	75,7	0,406	0,403	0,406	0,516	0,527	0,528
72°	30,32	76,1	0,358	0,355	0,358	0,525	0,538	0,545
70°	29,98	77,2	0,320	0,318	0,318	0,550	0,564	0,565
65°	29,34	79,75	0,248	0,246	0,239	0,609	0,625	0,624
60°	28,80	82,0	0,188	0,187	0,184	0,664	0,682	0,681
55°	28,43	84,15	0,146	0,146	0,143	0,720	0,740	0,735
50°	28,15	85,7	0,115	0,115	0,112	0,762	0,783	0,782
45°	27,92	87,1	0,089	0,089	0,086	0,801	0,823	0,824
40°	27,72	88,2	0,066	0,066	0,065	0,833	0,856	0,862
35°	27,56	89,2	0,048	0,048	0,048	0,863	0,887	0,894
30°	27,42	90,2	0,033	0,033	0,035	0,894	0,919	0,923

$\varphi = 77^0 10'$, $\psi = 27^0 15'$

$\varkappa_1 = 1,33$, $n_1 = 2,55$.

Die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung ist nunmehr eine so vollkommene, wie man es bei der Schwierigkeit dieser Beobachtungen nur irgend erwarten kann; die Abweichungen liegen fast durchweg innerhalb des durchschnittlichen Beobachtungsfehlers. Daß die Abweichungen wenig Zeichenwechsel zeigen, kann hier nicht befremden, da die in die Rechnung eingehenden Constanten n_1 und $\varkappa_1$ für jede Tabelle aus einer einzigen

Beobachtung abgeleitet sind. Noch wesentlich bessere Uebereinstimmung würde man jedenfalls bekommen, wenn man diese Constanten durch ein Ausgleichungsverfahren aus sämmtlichen Beobachtungen berechnen wollte [1]).

---

2. Theil:

Messung der absoluten Phasenverzögerungen der reflectirten Componenten.

Die Beobachtungsmethode war, wie schon in der Einleitung bemerkt, die, daß auf die Stahlspiegel I und II dünne, planconvexe Glaslinsen aufgelegt und die Durchmesser der im reflectirten Lichte auftretenden Newton'schen Ringe gemessen wurden. Die Ausführung der Beobachtungen gestaltete sich folgendermaßen:

Der Fuß des schon zu den vorigen Messungen benutzten Spektrometers war mit einem Kniegelenk versehen, vermittelst dessen der Theilkreis des Instrumentes nebst Collimator- und Fernrohr in die Verticalebene umgelegt werden konnte. Das gewöhnliche Spektrometertischchen wurde dann durch ein anderes ersetzt, welches sich in der neuen Lage des Instrumentes horizontal stellen und durch Fußschrauben justiren ließ, so daß die Fläche des aufgelegten Spiegels genau in die Drehaxe gelegt werden konnte. Weiter wurde das Fernrohr durch ein Mikroscop mit Ocularmikrometer ersetzt; der Werth eines Trommeltheiles der Mikrometerschraube betrug bei der angewendeten Vergrößerung etwa 0,002 mm.

Das Collimatorrohr war, wie früher, mit einer kreisrunden Oeffnung statt eines Spaltes versehen; die Beleuchtung der Oeffnung geschah wieder mit Hülfe der Knallgasflamme. Mittelst des mit dem Collimatorrohr verbundenen Nikols wurde das einfallende Licht parallel oder senkrecht zur Einfallsebene polarisirt.

Stahlspiegel und Glaslinse wurden vor jeder Beobachtung sorgfältig mit Alkohol gereinigt, mit einem reinen Leinentuche oder weichem Leder abgerieben und mit einem reinen Pinsel von etwa noch anhaftenden Staubtheilchen befreit. Die Gewißheit einer wirklichen Berührung zwischen Linse und Platte erhält man dadurch freilich immer noch nicht, da schon die adhärirende Luftschicht diese Berührung hindern kann; deßhalb ist in der Auswer-

1) Die neuesten von H. Voigt veröffentlichten Formeln, welche sich in Wied. Ann. Bd. 31 p. 242 finden und die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate erlauben, waren mir bei Vollendung meiner Rechnungen noch nicht bekannt.

thung der folgenden Beobachtungen der etwaige Abstand zwischen Linse und Platte immer mit in Rechnung gezogen.

Krümmungsradien der Linsen. Diese sind durch direkte Beobachtung (mit dem Sphärometer oder durch Spiegelung) sehr schwer mit genügender Genauigkeit zu bestimmen. Deßhalb wurde im Folgenden so verfahren, daß in den Gleichungen (5), welche die Lage der dunklen Ringe bestimmen, der Krümmungsradius der betreffenden Linse ebenso wie der etwaige Abstand zwischen Linse und Platte als Unbekannte mit eingeführt wurde. Da nun für eine größere Anzahl von Neigungswinkeln immer mehrere, in der Regel sechs, Ringdurchmesser gemessen wurden, so lassen sich sämmtliche Unbekannte aus den Beobachtungen mit hinreichender Sicherheit bestimmen.

Bestimmung des Einfallswinkels. Um die Neigung der Mikroscopaxe gegen die Spiegelnormale zu bestimmen, wurde folgendes Verfahren eingeschlagen. Das Mikroscop wurde, nachdem es auf die richtige Entfernung, d. h. auf die Vorderfläche des Spiegels eingestellt worden war, durch eine vorgeschobene Concavlinse, die in einer genau auf das Rohr des Mikroscops passenden Hülse befestigt war, vorübergehend in ein Fernrohr verwandelt und das gewöhnliche Ocular durch ein Gauss'sches ersetzt, das die Beleuchtung des Fadenkreuzes gestattete. Nun wurde in bekannter Weise dieses Fernrohr senkrecht zur Spiegelfläche gerichtet und die Stellung des Theilkreises abgelesen. Ein etwa durch excentrische Stellung des Fadenkreuzes oder der Concavlinse verursachter Fehler wurde dadurch eliminirt, daß einmal das ganze Fernrohr, dann die Concavlinse allein um 180° gedreht wurden; aus den jedesmaligen Einstellungen des Theilkreises wurde schließlich das Mittel genommen. Die so bestimmte Stellung des Mikroscopes bildete den Ausgangspunkt der Winkelmessungen. Das Collimatorrohr wurde, wenn die Stellung des Mikroscops fixirt war, jedesmal so gerichtet, daß die Mitte des Gesichtsfeldes hell erleuchtet war.

Beobachtungen.

Die folgenden Tabellen enthalten für die in der ersten Colonne verzeichneten Einfallswinkel die Halbmesser der ersten Newton'schen Ringe, wie sie an Combinationen der beiden Stahlspiegel mit dünnen, planconvexen Glaslinsen beobachtet wurden. Als Maaßeinheit dient dabei ein Trommeltheil des Ocularmikrometers. Selbstverständlich wurden nicht die Halbmesser, sondern die Durchmesser direkt gemessen, und zwar ein jeder durch wie-

derholte Einstellung des Fadenkreuzes auf die Endpunkte der großen Axe des im Mikroscop elliptisch erscheinenden Ringes. Da trotz der geringen Dicke der Glaslinse das Bild des Ringsystems im Mikroscop sich ein wenig verschob, so wurde ein Fadenkreuz mit verticalem und horizontalem Faden, nicht mit schräggestellten Fäden angewendet. Außerdem wurde der ganze Beobachtungssatz wiederholt, nachdem vorher Platte und Linse auseinandergenommen und von neuem gereinigt worden waren.

Die den Einfallswinkeln beigesetzten Buchstaben *p* und *s* zeigen an, ob das einfallende Licht parallel oder senkrecht zur Einfallsebene polarisirt war.

Lag der Einfallswinkel in der Nähe des Polarisationswinkels des Glases (56°), so waren die Ringe bei senkrecht zur Einfallsebene polarisirtem Lichte sehr schwach, ihre Messung deßhalb unsicher; für den Einfallswinkel 56° verschwanden sie ganz. Bei sehr großem Einfallswinkel wurde die Erscheinung überhaupt undeutlich, unabhängig von der Richtung der Polarisationsebene; es durchschnitten sich hier immer mehrere Ringsysteme von verschiedener Intensität, außerdem erschienen gerade die Enden der großen Axe, auf welche das Fadenkreuz eingestellt werden mußte, in der Regel verwaschen. Hiernach besitzen die sehr großen Einfallswinkeln entsprechenden Beobachtungen nur geringe Nauigkeit.

Platte I, Linse I.

Tabelle (4a): Erste Beobachtungsreihe.

Einfallswinkel		ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5	ρ_6
20°	*p*	257	374	461	534	600	658
	s	256	373	461	533	598	658
30°	*p*	268	392	482	557	624	685
	s	268	389	480	557	622	684
40°	*p*	289	416	515	595	664	729
	s	286	413	513	594	662	728
50°	*p*	318	458	563	651	730	795
	s	307	453	558	643	725	793
60°	*p*	365	525	643	744	834	912
	s	217	438	578	685	786	870
70°	*p*	448	639	784	905	1012	1112
	s	252	524	691	881	944	1052
75°	*p*	528	755	925	1074	1201	
	s	262	600	806	970	1107	

Tabelle (4b): Zweite Beobachtungsreihe.

Einfalls-winkel		p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
30°	*p*	266	389	488	560	625	687
	s	264	388	480	558	624	687
40°	*p*	285	415	517	600	670	734
	s	284	415	513	593	668	731
50°	*p*	317	459	566	652	731	800
	s	307	450	558	645	726	793
56°	*p*	342	495	607	700	783	858
	s						
60°	*p*	365	525	646	747	833	
	s	212	439	577	689	779	
70°	*p*	445	634	776	896	1003	
	s	249	522	685	819	935	
80°	*p*	605	862	1055			
	s	271	669	905			

Platte II, Linse II.

Tabelle (5a): Erste Beobachtungsreihe.

Einfalls-winkel		p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
20°	*p*	323	483	599	696	781	859
	s	321	481	598	698	781	859
30°	*p*	346	503	626	727	816	898
	s	340	505	624	724	813	895
40°	*p*	371	538	666	774	872	955
	s	370	536	664	771	869	953
50°	*p*	410	595	734	855	958	
	s	393	582	722	847	947	
60°	*p*	469	678	838	976		
	s	279	573	758	904		
70°	*p*	586	840	1037			
	s	318	685	918			

Tabelle (5b): Zweite Beobachtungsreihe.

Einfalls-winkel		p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
20°	*p*	332	488	607	703	789	867
	s	331	489	607	703	787	866
30°	*p*	345	510	635	735	822	903
	s	342	507	633	733	821	901
40°	*p*	371	546	676	780	877	964
	s	364	543	673	775	878	959
50°	*p*	412	599	742	860	963	1057
	s	390	590	731	849	954	1049
60°	*p*	467	682	838	972	1092	
	s	296	586	759	901	1028	
70°	*p*	589	846	1041			
	s	325	690	918			

Verwerthung der Beobachtungen.

Um die in den vorstehenden Tabellen niedergelegten Beobachtungen mit der Theorie vergleichen zu können, sind im Folgenden die Radien der dunklen Ringe nach den Gleichungen (5) (pag. 352 und 353) berechnet worden. Aus diesen Gleichungen folgt, wenn wir mit r den Krümmungsradius der Linse, mit d den kleinsten Abstand zwischen Linse und Platte, mit γ_1 den Cosinus des Einfallswinkels, mit λ_1 die Lichtwellenlänge bezeichnen, für den Radius des iten dunklen Ringes die Formel:

a) wenn das Licht parallel der Einfallsebene polarisirt ist:

$$\rho_i = \sqrt{\frac{2i - \frac{\mu_2 + \nu_2}{\pi}}{2\gamma_1} r\lambda_1 - 2rd}$$

b) wenn das Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt und der Einfallswinkel kleiner als der Polarisationswinkel der Linse ist:

$$\rho_i = \sqrt{\frac{2i - \frac{\mu_1 + \nu_1}{\pi}}{2\gamma_1} r\lambda_1 - 2rd}$$

c) wenn das Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt und der Einfallswinkel größer als der Polarisationswinkel der Linse ist:

$$\rho_i = \sqrt{\frac{2i - 1 - \frac{\mu_1 + \nu_1}{\pi}}{2\gamma_1} r\lambda_1 - 2rd}$$

Wir wollen diese Formeln kurz so zusammenfassen:

$$\rho_i = \sqrt{a_i^2 x^2 - 2xy}$$

wobei:

$$a_i = \sqrt{\frac{2i - \begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix} - \frac{\mu + \nu}{\pi}}{2\gamma_1}}$$

$$x = \sqrt{r\lambda_1}$$

$$y = d \,.\, \sqrt{\frac{r}{\lambda_1}} = x\frac{d}{\lambda_1}$$

Unter der Voraussetzung, daß d gegen λ_1 nur klein ist, können wir y^2 gegen x^2 vernachlässigen und gewinnen dann für ρ den Ausdruck:

$$\rho = a_i x - \frac{1}{a_i} y$$

Die Werthe von a_i sind ohne Weiteres angebbar, sobald die Werthe von $(\mu+\nu)/\pi$ bekannt sind. Diese Größen, die nach den Gleichungen (4.) (pag. 351) die absoluten Verzögerungen der reflectirten Componenten in Theilen von π darstellen, sind für die in Betracht kommenden Einfallswinkel unter Zugrundelegung der früher bestimmten Plattenconstanten berechnet und in der folgenden Tabelle zusammengestellt werden.

Tabelle (6).

Einfallswinkel.	Platte I.		Platte II.	
	$\frac{\mu_p+\nu_p}{\pi}$	$\frac{\mu_s+\nu_s}{\pi}$	$\frac{\mu_p+\nu_p}{\pi}$	$\frac{\mu_s+\nu_s}{\pi}$
20°	0,118	0,133	0,114	0,131
30°	0,108	0,144	0,105	0,140
40°	0,096	0,163	0,093	0,158
50°	0,081	0,195	0,077	0,188
56°	0,070	0,224		
60°	0,063	0,252	0,060	0,244
70°	0,043	0,369	0,041	0,359
75°	0,032	0,476		
80°	0,022	0,631		

Demnach berechnen sich für die Halbmesser der ersten dunklen Ringe bei den verschiedenen Einfallswinkeln die folgenden Werthe, die noch die Unbekannten x und y enthalten:

Tabelle (7): Platte I.

Einfallswinkel.	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5	ρ_6
20° p	$1{,}000x-1{,}00y$	$1{,}437x-0{,}70y$	$1{,}769x-0{,}57y$	$2{,}048x-0{,}49y$	$2{,}293x-0{,}44y$	$2{,}515x-0{,}40y$
s	$0{,}996x-1{,}00y$	$1{,}434x-0{,}70y$	$1{,}767x-0{,}57y$	$2{,}046x-0{,}49y$	$2{,}292x-0{,}44y$	$2{,}513x-0{,}40y$
30° p	$1{,}045x-0{,}96y$	$1{,}499x-0{,}67y$	$1{,}844x-0{,}54y$	$2{,}135x-0{,}47y$	$2{,}390x-0{,}42y$	$2{,}620x-0{,}38y$
s	$1{,}035x-0{,}96y$	$1{,}492x-0{,}67y$	$1{,}839x-0{,}54y$	$2{,}130x-0{,}47y$	$2{,}385x-0{,}42y$	$2{,}617x-0{,}38y$
40° p	$1{,}115x-0{,}90y$	$1{,}596x-0{,}63y$	$1{,}963x-0{,}51y$	$2{,}271x-0{,}44y$	$2{,}543x-0{,}39y$	$2{,}787x-0{,}36y$
s	$1{,}095x-0{,}91y$	$1{,}583x-0{,}63y$	$1{,}952x-0{,}51y$	$2{,}262x-0{,}44y$	$2{,}534x-0{,}39y$	$2{,}780x-0{,}36y$
50° p	$1{,}222x-0{,}82y$	$1{,}744x-0{,}57y$	$2{,}144x-0{,}47y$	$2{,}480x-0{,}40y$	$2{,}776x-0{,}36y$	$3{,}044x-0{,}33y$
s	$1{,}185x-0{,}84y$	$1{,}720x-0{,}58y$	$2{,}125x-0{,}47y$	$2{,}464x-0{,}40y$	$2{,}761x-0{,}36y$	$3{,}031x-0{,}33y$
56° p	$1{,}316x-0{,}76y$	$1{,}877x-0{,}53y$	$2{,}307x-0{,}43y$	$2{,}667x-0{,}37y$	$2{,}984x-0{,}34y$	$3{,}271x-0{,}31y$
s						
60° p	$1{,}392x-0{,}72y$	$1{,}984x-0{,}50y$	$2{,}437x-0{,}41y$	$2{,}814x-0{,}36y$	$3{,}152x-0{,}32y$	$3{,}455x-0{,}29y$
s	$0{,}865x-1{,}16y$	$1{,}658x-0{,}60y$	$2{,}179x-0{,}46y$	$2{,}598x-0{,}39y$	$2{,}958x-0{,}34y$	$3{,}278x-0{,}30y$
70° p	$1{,}691x-0{,}59y$	$2{,}405x-0{,}42y$	$2{,}951x-0{,}34y$	$3{,}410x-0{,}29y$	$3{,}815x-0{,}26y$	$4{,}180x-0{,}24y$
s	$0{,}960x-1{,}04y$	$1{,}961x-0{,}51y$	$2{,}602x-0{,}38y$	$3{,}113x-0{,}32y$	$3{,}553x-0{,}28y$	$3{,}942x-0{,}25y$
75° p	$1{,}950x-0{,}51y$	$2{,}769x-0{,}36y$	$3{,}396x-0{,}29y$	$3{,}924x-0{,}25y$	$4{,}388x-0{,}23y$	
s	$1{,}006x-0{,}99y$	$2{,}208x-0{,}45y$	$2{,}957x-0{,}34y$	$3{,}550x-0{,}28y$	$4{,}058x-0{,}25y$	
80° p	$2{,}387x-0{,}42y$	$3{,}386x-0{,}30y$	$4{,}150x-0{,}24y$			
s	$1{,}031x-0{,}97y$	$2{,}612x-0{,}38y$	$3{,}547x-0{,}28y$			

Tabelle (8): Platte II:

Einfallswinkel.		ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5	ρ_6
20°	p	$1{,}002x-1{,}00y$	$1{,}438x-0{,}70y$	$1{,}769x-0{,}57y$	$2{,}048x-0{,}49y$	$2{,}294x-0{,}44y$	$2{,}514x-0{,}40y$
	s	$0{,}997x-1{,}00y$	$1{,}435x-0{,}70y$	$1{,}767x-0{,}57y$	$2{,}046x-0{,}49y$	$2{,}292x-0{,}44y$	$2{,}513x-0{,}40y$
30°	p	$1{,}046x-0{,}96y$	$1{,}500x-0{,}67y$	$1{,}845x-0{,}54y$	$2{,}135x-0{,}47y$	$2{,}390x-0{,}42y$	$2{,}620x-0{,}38y$
	s	$1{,}036x-0{,}96y$	$1{,}493x-0{,}67y$	$1{,}840x-0{,}54y$	$2{,}130x-0{,}47y$	$2{,}386x-0{,}42y$	$2{,}618x-0{,}38y$
40°	p	$1{,}116x-0{,}90y$	$1{,}597x-0{,}63y$	$1{,}963x-0{,}51y$	$2{,}272x-0{,}44y$	$2{,}543x-0{,}39y$	$2{,}788x-0{,}36y$
	s	$1{,}096x-0{,}91y$	$1{,}583x-0{,}63y$	$1{,}953x-0{,}51y$	$2{,}263x-0{,}44y$	$2{,}535x-0{,}39y$	$2{,}780x-0{,}36y$
50°	p	$1{,}223x-0{,}82y$	$1{,}747x-0{,}57y$	$2{,}146x-0{,}47y$	$2{,}482x-0{,}40y$	$2{,}778x-0{,}36y$	$3{,}045x-0{,}33y$
	s	$1{,}187x-0{,}84y$	$1{,}722x-0{,}58y$	$2{,}126x-0{,}47y$	$2{,}466x-0{,}40y$	$2{,}763x-0{,}36y$	$3{,}031x-0{,}33y$
60°	p	$1{,}393x-0{,}72y$	$1{,}985x-0{,}50y$	$2{,}437x-0{,}41y$	$2{,}818x-0{,}36y$	$3{,}153x-0{,}32y$	
	s	$0{,}869x-1{,}15y$	$1{,}660x-0{,}60y$	$2{,}180x-0{,}46y$	$2{,}599x-0{,}38y$	$2{,}960x-0{,}34y$	
70°	p	$1{,}692x-0{,}59y$	$2{,}406x-0{,}42y$	$2{,}951x-0{,}34y$			
	s	$0{,}968x-1{,}03y$	$1{,}965x-0{,}51y$	$2{,}604x-0{,}38y$			

Durch Vergleich dieser berechneten Werthe mit den Beobachtungen Tab. (4) und (5) wurden zunächst die Werthe der Unbekannten x und y nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt. Hierbei wurden nur die Einfallswinkel bis zu 60° benutzt, da für größere Einfallswinkel die Messungen unsicher waren. Der Werth von x ist für jede Linse eine Constante; ergaben sich also aus den beiden mit derselben Linse angestellten Beobachtungsreihen verschiedene Werthe von x, so wurde das arithmetische Mittel derselben genommen. Der Werth von y dagegen, der den Abstand zwischen Linse und Platte enthällt, kann für jede Beobachtungsreihe ein anderer sein.

Es ergab sich durch Vergleich von Tab. (7) mit Tab. (4a):

$$x = 263{,}6, \quad y = 6{,}5.$$

Durch Vergleich von Tab. (7) mit Tab. (4b):

$$x = 264{,}6, \quad y = 9{,}3.$$

Als wahrscheinlichster Werth von x ist also $x = 264{,}1$ zu nehmen. Setzt man diesen Werth ein, so ergiebt sich y aus Tab. (4a) und (4b) annähernd gleich $y_a = y_b = 7{,}5$.

Ferner ergab sich durch Vergleich von Tab. (8) mit Tab. (5a):

$$x = 346{,}0, \quad y = 19{,}6.$$

Durch Vergleich von Tab. (8) mit Tab. (5b):

$$x = 347{,}7, \quad y = 15{,}6.$$

Hieraus:

$$x = 346{,}9, \quad y_a = 22{,}3, \quad y_b = 13{,}3.$$

Die folgenden Tabellen enthalten die definitiv berechneten Größen der Ringhalbmesser, d. h. diejenigen Größen, die sich aus

den Tabellen (7) und (8) ergeben, wenn für die Unbekannten x und y ihre respectiven Werthe eingesetzt werden. Diese Tabellen sind nun direkt mit den Beobachtungstabellen (4) und (5) vergleichbar.

Tabelle (9): $x = 264,1$, $y = 7,5$.

Einfalls-winkel		ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5	ρ_6
20°	p	257	374	463	537	602	661
	s	256	373	462	536	602	661
30°	p	269	391	483	560	628	689
	s	266	389	481	559	627	688
40°	p	288	417	515	596	668	733
	s	282	413	512	594	666	731
50°	p	317	456	563	652	730	801
	s	307	450	557	648	726	797
60°	p	362	520	640	740	830	910
	s	220	433	572	683	778	863
70°	p	442	632	777	898	1005	1102
	s	246	514	684	820	936	1039
75°	p	511	728	894	1034	1156	
	s	258	579	778	935	1069	

Einfalls-winkel		ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5	ρ_6
30°	p	269	391	483	560	628	689
	s	266	389	481	559	627	688
40°	p	288	417	515	596	668	733
	s	282	413	512	594	666	731
50°	p	317	456	563	652	730	801
	s	307	450	557	648	726	797
56°	p	342	492	606	701	785	860
	s						
60°	p	362	520	640	740	830	
	s	220	433	572	683	778	
70°	p	442	632	777	898	1005	
	s	246	514	684	820	936	
80°	p	627	892	1094			
	s	265	687	934			

Tabelle (10a): $x = 346,9$, $y = 22,3$.

Einfalls-winkel		ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5	ρ_6
20°	p	325	483	601	700	786	863
	s	323	482	600	699	785	863
30°	p	341	505	628	730	820	900
	s	338	503	626	728	818	899
40°	p	367	540	670	778	873	959
	s	360	535	666	775	870	956
50°	p	406	593	734	852	956	
	s	393	584	727	847	950	
60°	p	467	678	336	979		
	s	276	563	746	893		
70°	p	574	825	1017			
	s	313	670	895			

Tabelle (10b): $x = 346{,}9$, $y = 13{,}3$.

Einfalls-winkel.		ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5	ρ_6
20°	p	334	490	606	704	790	867
	s	332	488	605	703	789	866
30°	p	350	511	633	734	823	904
	s	347	509	631	733	822	903
40°	p	375	546	675	782	877	962
	s	368	541	671	779	874	959
50°	p	413	598	738	856	959	1052
	s	400	590	731	850	954	1047
60°	p	474	682	840	973	1090	
	s	286	568	750	897	1023	
70°	p	579	829	1020			
	s	322	675	898			

Zur bequemeren Uebersicht der Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung sind die Differenzen zwischen den berechneten und den beobachteten Werthen der Ringhalbmesser in folgenden Tabellen zusammengestellt.

Tabelle (11a).

Einfalls-winkel.		δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	δ_6
20°	p	0	0	— 2	— 3	— 2	— 8
	s	0	0	— 1	— 3	— 4	— 3
30°	p	— 1	+ 1	— 1	— 3	— 4	— 4
	s	+ 2	0	— 1	— 2	— 5	— 4
40°	p	+ 1	— 1	0	— 1	— 4	— 4
	s	+ 4	0	+ 1	0	— 4	— 3
50°	p	+ 1	+ 2	0	— 1	0	— 6
	s	0	+ 3	+ 1	— 5	— 1	— 4
60°	p	+ 3	+ 5	+ 3	+ 4	+ 4	+ 2
	s	— 3	+ 5	+ 6	+ 2	+ 8	+ 7
70°	p	+ 6	+ 7	+ 7	+ 7	+ 7	+10
	s	+ 6	+10	+ 7	+11	+ 8	+13
75°	p	+17	+27	+31	+40	+45	
	s	+ 4	+21	+28	+35	+38	

Tabelle (11b).

Einfalls-winkel.		δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	δ_6
30°	p	— 3	— 2	0	0	—3	—2
	s	— 2	— 1	— 1	—1	—3	—1
40°	p	— 3	— 2	+ 2	+4	+2	+1
	s	+ 2	+ 2	+ 1	—1	+2	0
50°	p	0	+ 3	+ 3	0	+1	—1
	s	0	0	+ 1	—3	0	—4
56°	p	0	+ 3	+ 1	—1	—2	—2
	s						
60°	p	+ 3	+ 5	+ 6	+7	+3	
	s	— 8	+ 6	+ 5	+6	+1	
70°	p	+ 3	+ 2	— 1	—2	—2	
	s	+ 3	+ 8	+ 1	—1	—1	
80°	p	—22	—30	—39			
	s	+ 6	—18	—29			

Tabelle (12a).

Einfallswinkel.		δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	δ_6
20°	p	−2	0	−2	−4	−5	−4
	s	−2	−1	−2	−1	−4	−4
30°	p	+5	−2	−2	−3	−4	−2
	s	+2	+2	−2	−4	−5	−5
40°	p	+4	−2	−4	−4	−1	−4
	s	+10	+1	−2	−4	−1	−3
50°	p	+4	+2	0	+3	+2	
	s	0	−2	−5	0	−3	
60°	p	+2	0	+2	−3		
	s	+3	+10	+12	+11		
70°	p	+12	+15	+20			
	s	+5	+15	+23			

Tabelle (12b).

Einfallswinkel.		δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	δ_6
20°	p	−2	−2	+1	−1	−1	0
	s	−1	+1	+2	0	−2	0
30°	p	−5	−1	+2	+1	−1	−1
	s	−5	−2	+2	0	−1	−2
40°	p	−4	0	+1	−2	0	+2
	s	−4	+2	+2	−4	−1	0
50°	p	−1	+1	+4	+4	+4	+5
	s	−10	0	0	−1	0	+2
60°	p	−7	0	−2	−1	+2	
	s	+10	+18	+9	+4	+5	
70°	p	+10	+17	+21			
	s	+3	+15	+20			

Die Differenzen bleiben für mittlere Einfallswinkel (bis zu 50°) fast durchweg kleiner als 5 Trommeltheile der Mikrometerschraube oder etwa 0,01 mm.; diese Abweichung liegt durchaus im Bereiche der Beobachtungsfehler. Erheblicher werden die Abweichungen wie zu erwarten für größere Einfallswinkel, ohne doch einen regelmässigen Gang zu zeigen; es dürfte sich das mit daraus erklären, daß in diesem Falle die gewöhnliche Formel für die Newton'schen Ringe einmal durch die Krümmung der unteren Linsenfläche, dann aber auch durch eine etwaige Neigung der oberen planen Fläche gegen den Spiegel merklich modificirt wird.

Im Folgenden sind die Messungen der Ringhalbmesser noch in der Weise ausgewerthet worden, daß aus ihnen direkt die Phasenverzögerungen der reflectirten Wellen bestimmt und mit den theoretisch berechneten Werthen der Tabelle (6) verglichen wurden.

Die Formel für den Radius des $i$ten dunklen Ringes lautete:

$$\rho_i^2 = a_i^2 x^2 - 2xy.$$

Setzt man hierin für x und y ihre früher bestimmten Werthe, für ρ_i den beobachteten Werth ein, so ergiebt sich a_i^2 und hieraus die Größe $\mu + \nu/\pi$, welche die Phasenverzögerung mißt.

Die folgenden Tabellen enthalten in der zweiten Colonne die theoretisch berechneten Werthe dieser Größe (s. Tab. 6), in der dritten und vierten Colonne die aus den beiden Beobachtungsreihen für jede Platte abgeleiteten Werthe. Dabei ist jedoch immer nur der Radius des ersten dunklen Ringes verwendet worden, da bei den übrigen Ringen schon ein kleiner Messungsfehler einen sehr bedeutenden Einfluß auf die gesuchte Größe ausübt.

Tabelle 13: Platte I.

Einfallswinkel.		Aus der Formel.	Aus der 1. Beobachtungsreihe.	Aus der 2. Beobachtungsreihe.
20°	p	0,12	0,11	...
	s	0,13	0,13	...
30°	p	0,11	0,12	0,14
	s	0,14	0,12	0,17
40°	p	0,10	0,08	0,13
	s	0,16	0,12	0,14
50°	p	0,08	0,06	0,07
	s	0,19	0,19	0,19
56°	p	0,07	...	0,06
	s	0,22	...	...
60°	p	0,06	0,03	0,03
	s	0,25	0,28	0,30
70°	p	0,04	—0,01	0,02
	s	0,37	0,34	0,35
75°	p	0,03	—0,10	...
	s	0,48	0,46	...
80°	p	0,02	...	0,16
	s	0,63	...	0,61

Tabelle 14: Platte II.

Einfallswinkel.		Aus der Formel.	Aus der 1. Beobachtungsreihe.	Aus der 2. Beobachtungsreihe.
20°	p	0,11	0,13	0,13
	s	0,13	0,15	0,14
30°	p	0,10	0,06	0.15
	s	0,14	0,11	0.18
40°	p	0,09	0,05	0,13
	s	0,16	0,06	0,20
50°	p	0,08	0,04	0,09
	s	0,19	0,18	0,28
60°	p	0,06	0,04	0,11
	s	0,24	0,22	0,20
70°	p	0,04	—0,04	—0,02
	s	0,36	0,34	0,35

Die Abweichungen zwischen Theorie und Beobachtung erscheinen hier ziemlich bedeutend; speciell ergeben sich für die Einfallswinkel 75° und 80° zwischen den berechneten und den aus der Beobachtung abgeleiteten Phasenverzögerungen Unterschiede von circa $\pm 0{,}14\pi$, was einem Gangunterschiede von $\pm 0{,}07\lambda$ entspricht. Wie aber hier das entgegengesetzte Vorzeichen der beiden Abweichungen auf Beobachtungsfehler deutet, so zeigt allgemein sowohl der Vergleich der aus beiden Beobachtungsreihen abgeleiteten Werthe, als auch insbesondere die Betrachtung der Tabellen (11) und (12), daß diese Abweichungen wenigstens für mittlere Einfallswinkel innerhalb des Bereichs der zufälligen Beobachtungsfehler liegen. Die Messung der Newton'schen Ringe erweist sich daher zur Bestimmung der absoluten Phasenverzögerung wenig geeignet; jedenfalls würde man sehr ausgedehnte Beobachtungsreihen brauchen, um einigermaßen zuverlässige Resultate zu erhalten.

Göttingen, Winter 1886/87.

Ueber einen Satz aus der Determinantentheorie.

Briefliche Mittheilung von Herrn **R. Baltzer**.

(Mitgetheilt von W. Voigt.)

„Es hat mich gereizt, die einfacheren Gründe des hübschen Satzes aufzusuchen: ich finde dieselben in den Betrachtungen, welche Sie in meinen Determinanten § 4, 3 und in meiner analytischen Geometrie § 36, 1 nachsehen können. Das beiliegende Blatt enthält meines Erachtens alles Erforderliche, auch die kleine Correctur wegen des Vorzeichens der fraglichen Determinante.“

Ein Quadrat von Elementen bestehe aus n Zeilenpaaren der Art

$$\begin{matrix} a & b & c & d & .. \\ -b & a & -d & c & .. \end{matrix}$$

und ebensoviel Colonnenpaaren. Bei geraden n können die zweiten Zeilen der Paare auch die conträren Zeichen haben. Mit der ersten Zeile eines Paares wird die zweite verbunden, und die zweite mit $2i$ multiplicirt; so erhält man das Paar

$$\begin{matrix} a+ib & b-ia & c+id & d-ic & .. \\ -2ib & 2ia & -2id & 2ic & \end{matrix}$$

und nach Addition der ersten Zeile

$$\begin{matrix} a+ib & b-ia & c+id & d-ic & .. \\ a-ib & b+ia & c-id & d+ic & .. \end{matrix}$$

Wenn man dann zu der Colonne 2, 4, . . die mit i multiplicirte vorhergehende Colonne addirt und $i^2 = -1$ setzt, so erhält man das Paar

$$\begin{matrix} a+ib & 0 & c+id & 0 & .. \\ a-ib & 2i(a-ib) & c-id & 2i(c-id) & .. \end{matrix}$$

und nach Division der Colonnen 2, 4, . . durch $2i$

$$\begin{matrix} a+ib & 0 & c+id & 0 & .. \\ a-ib & a-ib & c-id & c-id & .. \end{matrix}$$

Demgemäß ist

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & . \\ -b & a & -d & c & . \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & . \\ -b_1 & a_1 & -d_1 & c_1 & . \\ . & . & . & . & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+ib & 0 & c+id & 0 & . \\ a-ib & a-ib & c-id & c-id & . \\ a_1+ib_1 & 0 & c_1+id_1 & 0 & . \\ a_1-ib_1 & a_1-ib_1 & c_1-id_1 & c_1-id_1 & . \\ . & . & . & . & \end{vmatrix}$$

also für $n = 2, 3, \ldots$ nach Umstellung der Zeilen wie der Colonnen

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ -b_1 & a_1 & -d_1 & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+ib & c+id & 0 & 0 \\ a_1+ib_1 & c_1+id_1 & 0 & 0 \\ a-ib & c-id & a-ib & c-id \\ a_1-ib_1 & c_1-id_1 & a_1-ib_1 & c_1-id_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a+ib & c+id \\ a_1+ib_1 & c_1+id_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a-ib & c-id \\ a_1-ib_1 & c_1-id_1 \end{vmatrix} = (\overline{ac}-\overline{bd})^2 + (\overline{ad}+\overline{bc})^2$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f \\ -b & a & -d & c & -f & e \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ -b_1 & a_1 & -d_1 & c_1 & -f_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ -b_2 & a_2 & -d_2 & c_2 & -f_2 & e_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a+ib & c+id & e+if & 0 & 0 & 0 \\ a_1+ib_1 & c_1+id_1 & e_1+if_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2+ib_2 & c_2+id_2 & e_2+if_2 & 0 & 0 & 0 \\ a-ib & c-id & e-if & a-ib & c-id & e-if \\ a_1-ib_1 & c_1-id_1 & e_1-if_1 & a_1-ib_1 & c_1-id_1 & e_1-if_1 \\ a_2-ib_2 & c_2-id_2 & e_1-if_1 & a_2-ib_2 & c_2-id_2 & e_2-if_2 \end{vmatrix}$$

$$= (a+ib,\ c+id,\ e+if)\,(a-ib,\ c-id,\ e-if)$$

$$= (\overline{ace}-\overline{adf}-\overline{bcf}-\overline{bde})^2+(\overline{acf}+\overline{ade}+\overline{bce}-\overline{bdf})^2.$$

Diese Determinanten sind Producte von zusammengehörigen Determinanten *n*ten Grades, Summen von 2 Quadraten; bei realen Elementen sind sie Normen, positiv.

Giessen, 20 Mai 1887.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner



Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

31. August. 913 № 14. 1887.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 2. Juli.

Ehlers: Dr. Hamann, Vorläufige Mittheilungen zur Morphologie der Ophiuren.

Merkel legt vor:

1. A. Henle: „das plasmatische Canalsystem des Stratum mucosum geschichteter Epithelien."
2. H. Berkenbusch: „die Blutversorgung der Beugesehnen der Finger." (Nachrichten.)

Schering legt

1. seine Abhdlg. vor: „C. F. Gauss und die Erforschung des Erdmagnetismus."
2. Holborn: Beobachtungen magnetischer Declination in Klausthal 1844—86.

Schwarz legt

1. seine Abhdlg. vor: „über specielle zweifach zusammenhängende Flächenstücke, welche kleineren Elächeninhalt besitzen, als alle benachbarten, von denselben Randlinien begrenzten Flächenstücke."
2. von General E. Neovius in Helsingfors: „über eine specielle geometrische Aufgabe des Minimums." (Nachrichten.)
3. Schönflies: „über einige ebene Configurationen und die zugehörigen Gruppen von Substitutionen." (Nachrichten.)

Voigt legt

1. seine Abhdlg. vor: „Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle."
2. Baltzer: „über einen Satz der Determinantentheorie." Aus einem Briefe.

F. Klein wünscht die Aufnahme in die Nachrichten für:

1. Bolza: „Darstellung der Invarianten der Binärform 6. Grades durch die zugehörigen ϑ-Functionen."
2. Maschke: „über das Formensystem einer gewissen endlichen Gruppe quaternerer linearer Substitutionen." (Nachrichten.)
3. Prof. Dr. Voigt in München: „Ueber bilineare Formen." Auf Antrag von Schwarz wird die Aufnahme beschlossen.

Philol.-histor. Klasse. Wüstenfeld legt vor: „die Mitarbeiter an den Göttinger Gelehrten Anzeigen 1801—1830." (Nachrichten, Ergänzungsheft.)

Wieseler legt eine Abhdlg. vor: „Archäologische Beiträge."

Vorläufige Mittheilungen zur Morphologie der Ophiuren.

Von

Dr. Otto Hamann.

(Vorgelegt von Ehlers.)

1. Das centrale und periphere Nervensystem.

Das centrale Nervensystem dieser Gruppe besteht, wie wir schon lange wissen, aus den fünf radialen Nervenstämmen und dem oralen Nervenring. Während diese Bildungen aber bei den Asteriden dauernd am Ort ihrer Entstehung, dem Ektoderm, gelagert bleiben, sind sie bei den Ophiuren aus demselben ausgeschieden und in das Mesoderm zu liegen gekommen. Gehirnring sowie Nervenstämme liegen in Holräumen der Bindesubstanz, in Schizocoelräumen in derselben Weise wie ich es bei Echiniden beschrieben habe. Auch hier stehen diese Schizocoelräume in keinerlei Verbindung mit dem Coelom.

Ueber die feinere Struktion des Central-Nervensystems ist bekannt, daß Gehirnring wie Nervenstämme aus feinsten Fasern sich zusammensetzen, denen Zellen auf einer Seite peripher aufliegen.

Untersucht man einen Nervenstamm auf Schnittserien, so erkennt man bald, daß dessen Zellbelag nicht an allen Stellen der Oberfläche ein gleicher ist, sondern bald aus einer Schicht, bald aus mehreren besteht. An denjenigen Stellen des radiären Nervenstammes, von denen parweis Nervenäste zu den Füßchen abgehen — zu jedem Füßchen je ein Nervenzug — wird derselbe von nur einer Schicht neben einander liegender epithelial angeordneter Zellen überkleidet. Diese Zellen sind sehr klein; ihre Zellsubstanz ist kaum warnehmbar und umhüllt den kugelichen Kern. Ob sich von diesen Zellen aus feine Fortsätze zwischen die Nervenfasermasse erstrecken lasse ich dahingestellt.

Die Strecken des Nervenstammes jedoch, welche zwischen den in bestimmten Intervallen abgehenden parigen seitlichen Füßchennervenzügen liegen, besitzen einen mehrschichtigen Zellenbelag. Alle diese peripher gelagerten Zellen haben keine als Stützfasern zu deutenden Gebilde ausgeschieden, und wenn man sie als Ganglienzellen deuten will, so steht dem nichts im Wege. Es zeigen dann die Ophiuren unter den Echinodermen die höchste Entwicklung, indem man in den Nervenstämmen eine Gliederung erkennen kann.

Es wechseln in bestimmten Zwischenräumen Regionen mit mehrschichtigen Ganglienzellenbelag mit solchen, wo nur eine Schicht vorhanden ist. Bei den übrigen Echinodermen fand ich den Zellbelag stets gleichmäßig ausgebildet und nirgends konnte man bestimmte Metameren erkennen.

Eine weitere eigentümliche Bildung zeigen die Ophiuren in ihren Nervenstämmen. Centralwärts, der Leibeshöle zugekehrt, liegt in der Mittellinie des Nervenstammes ihm aufgelagert eine auf dem Querschnitt annähernd kreisrunde Blutlakune, welche meist prall mit der geronnenen Blutflüssigkeit angefüllt ist. Dieselbe setzt sich bis an den Schlund fort und hier kommt es zu einem cirkulären Blutlakunenring, der dem Nervenring innen aufliegt. Es ziehen nun von dieser Blutlakune aus quer durch die Nervenfaserschicht dicke Stränge bis zu den Ganglienzellenbelag und es hat oft den Anschein, als ob es sich hier um feinste Capillaren handelte, welche von der Lakune aus in die Nervenfaserschicht eintreten. Es ist sehr schwierig über die Natur dieser Stränge ins Reine zu kommen.

Was die Herkunft des Zellbelages der Nervenfasern anlangt, so habe ich schon an anderer Stelle[1]) eine Erklärung gegeben. Ontogenetisch entsteht das Centralnervensystem im Ektoblast und rückt zu gewisser Zeit in die Bindesubstanz. Solange dasselbe noch im Ektoblast liegt — wie es dauernd nur bei den Asteriden sich findet — verläuft die Nervenfasermasse zwischen den Stützfasern von Epithelzellen, wie schon Ludwig[2]) bei letzteren gezeigt hat. Sobald nun die Lageveränderung vor sich geht, verläßt nicht nur die Nervenfasermasse das Ektoderm, sondern auch ein Theil des gesammten Körperepithels, zwischen dessen Zellfortsätzen die Fasern verlaufen, also jene Zellmasse, welche bei Asteriden in der Ambulacralrinne sich findet. —

Von größtem Interesse ist weiterhin der Austritt der Nervenzüge aus den fünf Radial-Nervenstämmen. Wie schon gesagt, liegen die Füßchen parweis in den Armen, durch bestimmte Zwischenräume getrennt. Zu jedem Füßchen, von denen je eins an der rechten eins an der linken Seite des Armes heraustritt, geht ein Nervenzug, aus einem Bündel feinster Nervenfasern und dazwischen zerstreut liegenden Ganglienzellen bestehend, um in die Wandung desselben einzutreten, die N. pedales. In den Zwischenräumen aber zwischen diesen parigen Nervenzügen treten folgende

1) Hamann, Die Echiniden, ihre Anatomie und Histologie mit 13 Tafeln 1887: Heft 3 der Beitr. z. Histologie d. Echinodermen. Jena, Fischer.

2) Ludwig, Morphologische Studien an Echinodermen, Bd. 1. 1877—79.

weitere Nerven aus: Zunächst zwei Nervenzüge, welche senkrecht in die Höhe steigen, der Rückenseite zugewendet, nachdem sie den Schizocoelkanal durchsetzt haben, in welchem der Nervenstamm liegt. Diese N. costales, wie ich sie zu nennen vorschlage, durchsetzen die in der Leibeshöle liegenden Wirbel, verzweigen sich hier und treten zu den Muscul. intercostal.

Weiter sehen wir unmittelbar hinter letzteren an beiden Seiten des Nervenstammes je einen großen Nervenzug austreten, die ich N. epitheliales nenne, da sie unmittelbar nach ihrem Ursprung sich baumförmig nach allen Seiten verzweigen. Die einzelnen Aeste teilen sich immer von neuem und durchsetzen die Bindesubstanz des Wirbels und die der Seitenplatten und lassen sich bis zum Körperepithel verfolgen. Unterhalb der Epidermis liegt ein Nervenplexus, welcher sowol in den Armen als auch an der Scheibe überall deutlich sich verfolgen läßt. Bei gewissen Conservationsflüssigkeiten und Färbungen treten die feinsten Nervenfasern mit allen ihren Ganglienzellen, bipolaren und multipolaren, sehr schön hervor. Die Nervenendigungen in der Haut, sowie das Vorkommen von Epithelsinneszellen, schildere ich später. Nur soviel sei hier noch bemerkt, daß in keiner anderen Gruppe der Echinodermen ein so exquisit ausgebildetes peripheres Nervensystem vorhanden ist. Die Unzal der Hautnerven, die Ausbreitung des subepithelialen Nervenplexus hängt eng zusammen mit der großen Beweglichkeit und Fertigkeit dieser Tiere. Die stilleren und langsam ihren Aufenthaltsort wechselnden Echiniden besitzen weit weniger Hautnerven, wärend bei den Asteriden, welche zwischen letzteren und den Ophiuren die Mitte halten, auch das Hautnervensystem reicher entwickelt erscheint, wärend die beweglichen Crinoiden, wie ich finde, sich den Ophiuren nähern. Ziehen wir diese reiche Nervenentwicklung, über welche ich baldigst ausführlich zu berichten hoffe, in Betracht, so erscheinen uns jene eigentümlichen Abwehrbewegungen, wie sie uns Preyer[1]) beschreibt, um Vieles begreiflicher, ja selbstverständlich. Dasselbe gilt von den complicirten Bewegungen, sowie der Fähigkeit dieser Tiere ganz neuen, bisher „noch niemals erlebten Situationen sich schnell anzupassen,“ welche derselbe Forscher in überraschender Weise aufgefunden hat.

1) Preyer, Ueber die Bewegungen der Seesterne, eine vergleichend psychologische Untersuchung, in: Mitteil. d. zool. Station zu Neapel. 1886. Bd. 7. p. 27—127 und p. 191—233; auch separat erschienen bei Friedländer, Berlin.

2. Die wandernden Keimzellen und ihre Reifungsstätten.

Der Bau der Geschlechtsorgane ist bei den Ophiuren wenig bekannt. Ueber ihre Lage sowie ihr Verhältnis zu den sogenannten „Bursä" sind wir durch Ludwig aufgeklärt worden. Nach ihm stellen die Bursä sackförmige auf der Ventralfläche der Körperscheibe gelegene Einstülpungen der Körperwand dar. Sie bleiben blind geschlossen an ihrem Ende und münden durch eine spaltförmige Oeffnung nach außen. Die Wandung dieser Taschen besteht aus dem Körperepithel, der Cutis, Bindesubstanzschicht. Auf ihrer in die Leibeshöle hineinragenden Fläche werden sie von dem Enterocoel-Epithel überzogen.

An bestimmten Teilen der Genitaltaschen finden sich die Genitalsäckchen, welche eine birnförmige Gestalt besitzen. Sie enthalten entweder die reifenden Eizellen oder aber die reifenden Spermazellen. Wärend man nun bisher annahm, daß die Geschlechtsprodukte aus Zellen eines die Holräume der Genitalsäckchen auskleidenden Epithels entständen, so haben mich meine Untersuchungen zu abweichenden Anschauungen gefürt, die, für alle Echinodermengruppen geltend, anderswo ausführlich niedergelegt werden sollen.

Bei den Ophiuren entstehen Ei- wie Samenzellen aus Urkeimzellen, welche in die sich entwickelnden Genitalsäckchen einwandern und sich hier differenziren und zwar durch Wachstum zu Eizellen, durch Teilungsvorgänge zu Spermazellen sich umwandeln.

Wir haben somit eine gleiche Art der Entstehung wie bei den Crinoiden. Bei diesen Formen finden sich in den Armen sogenannte Genitalkanäle, welche mit großen Zellen, welche einen blasigen hellen kuglichen Kern einschließen, erfüllt sind. Diese Zellen sind, wie ich fand, amöboid. Sie reifen in den eigentümlichen Anhangsorganen der Arme, den Pinnulis in der Weise, daß sich der Kanal in diese Organe hineinerstrekt und erweitert. In diese Erweiterungen rücken die Urkeimzellen, welche die gleiche Gestalt besitzen wie die der Ophiuren, und reifen.

Bei letzteren habe ich nun ebensfalls eine Genitalröre aufgefunden, welche teils in der Rückenwand der Scheibe, teils in der Wandung der Genitaltaschen verläuft. Diese Genitalröre ist in einem Bindesubstanz-Strang gelagert und wird von Blutflüssigkeit umspült, welche in Lücken und Spalten des Stranges fließt. Letzterer selbst liegt in einem Holraum, einem Schizocoelraum oder Perihämalraum im Sinne Ludwigs. Der Bau dieser Genitalröre

und Blutlakunen, welche in dem Perihämalraum liegen, gleicht in allen Stücken den gleichen Gebilden der Crinoiden, wie sie genauer erst durch Ludwigs Untersuchungen bekannt geworden sind.

Somit stehen Ophiuren und Crinoiden in naher Beziehung mit einander, was die Wanderung der Urkeimzellen anlangt, sowie ihre Reifung an bestimmten Stellen im Verlaufe der Genitalrören.

Früher habe ich in dem dorsalen Blutlakunenring mit seinen Verzweigungen bei den Asteriden einen Kanal beschrieben, welcher bisher allen Untersuchern unbekannt geblieben war. Ich zeigte wie derselbe mit großen amöboid beweglichen Zellen erfüllt sei, welche einen unverhältnismäßig großen kuglichen Kern einschließen. Da ich nicht wußte, was mit diesem bis zu den Geschlechtsorganen fürenden Kanälen anzufangen sei, sprach ich die Vermutung aus, daß hier vielleicht ein excretorisches Canalsystem vorliegen möge.

Carl Vogt und Yung haben nun in ihren soeben erschienenen Lehrbuch der mikroskopischen Anatomie (Lieferung 10) diese Angaben bestätigt, meine Deutung aber bezweifelt. Dieser von mir beschriebene Kanal mit seinen Zellen sei warscheinlich homolog der Genitalröre der Crinoiden. Dahin sprechen sich beide Forscher aus. Ich kann dieser Ansicht nur voll zustimmen und den Beweis für die Richtigkeit derselben bringen, indem ich in letzter Zeit eine große Menge von jungen Asteriden zur Untersuchung erhielt.

An jungen Seesternen findet sich da, wo beim erwachsenen Tiere später der Blutlakunenring mit seinen zu den Geschlechtsorganen fürenden Zweigen liegt, welcher auch unseren Kanal umschließt, der letztere allein in einem Bindesubstanzstrange verlaufend welcher in einem Schizocoelraum verläuft. Da wo später die Geschlechtsschläuche liegen, bilden sich an den Genitalkanälen, wie ich unsere Kanäle nun gleich nennen will, Aussackungen, in welche die großen Urkeimzellen einwandern. Diese sind die ersten Anlagen der Geschlechtsorgane und stehen noch lange in Zusammenhang mit den Genitalrören oder Genitalkanälen. Somit sind die Geschlechtsschläuche selbst nur die Reifungsstätten für die Urkeimzellen, welche in sie einwandern.

Die erste Anlage dieser Genitalschläuche habe ich schon früher beschrieben, ihr Zusammenhang mit den Genitalkanälen erschloß sich mir aber erst auf Horizontalschnitten durch kleinere Tiere. Dieselben Verhältnisse fand ich bei den Echiniden wieder, welche die gleichen merkwürdigen Urkeimzellen besitzen, welche ebenfalls in die ersten sackartigen Anlagen der Geschlechtsschläuche einwandern.

---

3. Der Rückenporus.

Wenn man die Ophiuren mit den Asteriden zu eiuer Gruppe zusammenstellt, so geschieht dies hauptsächlich auf Grund ihrer äußeren Aehnlichkeit. Denn sonst haben sie nichts mit denselben gemein. Weit eher gehören sie in die Nähe der Crinoiden, zu denen sie in der Organisation mancherlei Anklänge zeigen.

Bei der erwachsenen Ophiolepis albida ist es mir gelungen einen Rückenporus, welcher excentrisch liegt, aufzufinden. Die Körperwand wird von einem Schornstein durchsetzt, welcher eine Communication der Leibeshöle mit dem Meerwasser herstellt. Die innere Wandung ist vollkommen platt; ihre Auskleidung wird von Wimperzellen gebildet, welche einerseits in das äußere Körperepithel, andererseits in das Enterocoelepithel übergehen. Diesem Rückenporus, welcher nichts mit dem Steinkanal zu tun hat, ist nur die Bildung der Kelchporen der Crinoiden, an die Seite zu stellen, welche ja ebenfalls eine Verbindung der Leibeshöle mit dem Meerwasser herstellen sollen. Sonst findet sich im großen Kreise der Echinodermen keine ähnliche Bildung vor; wenigstens ist bisjetzt noch nichts Aenliches beschrieben worden.

---

4. Schizocoelräume und Blutlakunensystem.

Schon mehrfach habe ich auf diese Bildungen kommen müssen und will, soweit meine vornehmlich an Ophiolepis albida angestellten Untersuchungen dies gestatten, die Hauptresultate wiedergeben.

Es findet sich ein Schizocoelring vor, welcher teils in der Dorsalwand der Körperscheibe — und zwar in den Radien gelegen — verläuft, teils aber in der Wandung der Genitaltaschen seinen Verlauf nimmt.

In diesem Schizocoelraum liegt in einem Bindegewebsseptum, das in sein Lumen hervorragt, der Blutlakunenring, welcher den gleichen Verlauf hat. Die Blutflüssigkeit verläuft in peripheren Lücken dieses Septums, wärend im Centrum desselben die Genitalröre liegt. Am stärksten sind diese Blutlakunen in der Rückenwand ausgebildet und von hier aus, in einem Radius gelegen, tritt ein Zweig von Lakunen aus dem Schizocoelraum heraus in die Leibeshöle, zieht zum Darm, und hier verschmilzt die Wandung der Lakunen mit der des Darmes und die Blutflüssigkeit treffen wir jetzt in wandungslosen Spalten in der Bindegewebsschicht des Darmes an.

Weiter existiren Schizocoelräume in den Armen, welche um den Schlund zu einem oralen Schizocoelsinus verschmelzen. In diesen Räumen ist einmal das Centralnervensystem suspendirt in Gestalt von fünf (oder mehr) Nervenstämmen und einem circumoralen Gehirnring. Weiter liegt diesen letzteren Gebilden ein Blutgefäß auf, welches in einem Bindegewebsseptum von sehr geringer Ausbildung gelagert ist: Diese radiären Blutlakunen bilden ebenfalls einen circumoralen Ring, von denen aus eine Communication der Blutflüssigkeit mit dem sog. Herzen (drüsigen Organ) sich konstatiren läßt.

Das plasmatische Canalsystem des Stratum mucosum geschichteter Epithelien.

Von

Adolf Henle, Cand. med.

(Aus dem anatomischen Institut zu Göttingen.)

(Vorgelegt in der Sitzung vom 2. Juli 1887 von Fr. Merkel.)

Die Zellen des Stratum mucosum der geschichteten Plattenepithelien sind unter sich durch feinste radiäre Streifen verbunden. Ueber die Entstehung dieses bekannten Bildes wurden drei verschiedene Ansichten aufgestellt. Schrön, der Entdecker der Streifen hielt sie für den optischen Ausdruck von Porenkanälchen, die eine Membran durchsetzen, welche nach seiner Meinung die Zelle umgibt. Später wiesen M. Schultze und Bizzozero durch Isolation der Zellen in macerirenden Flüssigkeiten nach, daß die Streifung durch stachelartige Fortsätze hervorgerufen werden, welche die Zelloberfläche regelmäßig in großer Zahl besetzen und zu der Benennung „Stachelzellen" Anlaß gaben. Bizzozero deutete die Stacheln als Brücken, welche ein die Zellen umgebendes Kanalsystem überspannen, während nach M. Schultze die Stacheln benachbarter Zellen, wie die Borsten zweier auf einander gedrückter Bürsten in einander greifen sollten, nur zu dem Zwecke einer festeren Verbindung der Zellen.

Es mußte bei einer solchen Divergenz in den Angaben so ausgezeichneter Forscher, wie es die genannten sind, wünschenswerth erscheinen, durch nochmalige genaue Nachuntersuchung mit den neueren, im Laufe der Jahre so sehr verbesserten Hilfsmitteln ein

eigenes Urtheil über das Verhalten der Stachelzellen zu gewinnen. Vor Allem wurden Versuche darüber angestellt, ob die in Frage stehenden Structuren sehr empfindlich sind, oder nicht. Es wurden Stücke frischer Haut mit Alkohol absol., Pikrinsäure, Pikrinschwefelsäure, Ueberosmiumsäure, Platinchromsäure, Flemming'scher Lösung und verdünntem Alkohol behandelt. Auch wurden Stücke längere Zeit nach dem Tode liegen gelassen und dann erst in die Härtungsflüssigkeiten gebracht. Immer war das Bild im Wesentlichen das gleiche, so daß es also erlaubt schien, auch noch Präparate zu benutzen, welche nicht ganz lebenswarm, sondern bereits kurze Zeit abgestorben waren. Zur Färbung wurde meist die Heidenhain'sche Methode (Hämatoxylin $^1/_3$% und einfach chroms. Kali 1%) angewandt, welche ausgezeichnet scharfe Bilder lieferte. —

Die erhaltenen Resultate schließen sich am nächsten an die von Bizzozero an. Vor Allem erwiesen sich die Zwischenräume zwischen den Zellen als zweifellos vorhanden; die Stacheln zeigten sich niemals nach Art zweier ineinander gedrückter Bürsten angeordnet, sondern erschienen als unmeßbar feine Linien zwischen den Zellen ausgespannt, welche von einander durch relativ breite Zwischenräume getrennt waren. Ich fand nur Stacheln, von der Existenz von Riffen im Sinne M. Schultzes konnte ich mich nicht überzeugen, obgleich ich Bilder, welche solche vortäuschen können, zu Gesicht bekommen habe. Es werden riffartige Linien durch lange Stacheln hervorgerufen, welche eine Strecke weit quer über die Oberfläche von benachbarten Zellen hinweggehen.

Die Stacheln nach ihrer Zugehörigkeit zu den beiden Zellen, welche sie verbinden, in zwei Theile mit einer deutlich sichtbaren Löthstelle in der Mitte zu zerlegen, wie dies Bizzozero will, gelang mir nicht; vielmehr muß ich glanben, daß die nicht eben häufig zu beobachtenden Punkte, welche dieser Forschor für Löthstellen hält, nur optische Erscheinungen sind. Sie konnten immer als der Ausdruck schief oder quer sich kreuzender Stachelreihen, welche in etwas verschiedenen Ebenen liegen, erkannt werden. Ein Versuch eine etwa vorhandene Kittsubstanz durch Behandlung frischer, mit dem Gefriermikrotom angefertigter Schnitte, mittelst Höllenstein sichtbar zu machen, mißlang vollständig und es liegt somit der Gedanke nahe, daß die Zellen durch die Stacheln, in unmittelbarem Zusammenhang stehen.

Nachdem so die Anwesenheit und die Natur der Zwischenräume zwischen den Zellen des Stratum mucosum erwiesen war, galt es nun, noch den Versuch zu machen, ob nicht über den Verlauf des Saftstromes in denselben einiger Aufschluß zu erlangen

war. Es wurden schon von früheren Untersuchern Injectionen gewöhnlicher Art mit verschiedenen Injectionsmassen angestellt, dieselben hatten auch eine Füllung der Zelleninterstitien geliefert, es ließ sich aber gegen sie der Einwand erheben, daß der angewandte Druck vielleicht abnorm hoch gewesen sei, und dadurch der Flüssigkeit Bahnen eröffnet habe, die unter normalen Verhältnissen gar nicht vorhanden sind. Um einem solchen Einwand zu begegnen, bediente ich mich des Verfahrens, welches von Altmann für seine Corrosionen benützt war. Frische Hautstücke wurden in eine Mischung gleicher Theile Olivenöl und starken Alkohols mit Zusatz von soviel Aether, als nöthig ist, um eine klare Lösung zu erhalten, eingelegt. Darin blieben die Stücke mehrere Tage liegen, worauf das eingedrungene Fett mit Ueberosmiumsäure geschwärzt wurde. Nun aber wurden die Stücke nicht corrodirt (Altmann), sondern geschnitten und in Glycerin betrachtet. Mit Alkohol kommen die imbibirten Stücke am besten nicht in Berührung, da derselbe die schwarze Farbe auszieht, sie müssen daher in Müller'scher Lösung und dergl. aufbewahrt werden. Noch vollkommener werden die Bilder, wenn man statt frischer Hautstücke solche benutzt, welche vorgängig in Müller'scher Lösung und Alkohol erhärtet sind.

Es zeigte sich nun die bemerkenswerthe Thatsache, daß sich das geschichtete Plattenepithel der Schleimhäute anders verhält, als dasjenige der äußeren Haut. Beim Epithel des Oesophagus fanden sich schon nach relativ sehr kurzer Zeit alle Zelleninterstitien mit Oel erfüllt und zwar war dasselbe überall gleichmäßig von der Cutis her eingedrungen. Glans penis, clitoris u. s. w. verhielten sich ganz ebenso. An der äußeren Haut — es wurde besonders an derjenigen des Schweinerüssels experimentirt — zeigte sich das Bindegewebe der Cutis um die Papillen mit sehr reichlichen, schwarzen Streifen durchzogen, augenscheinlich den gefüllten Blut- und Lymphgefäßen, in das Stratum mucosum aber war das Oel nur von den Spitzen der Papillen her eingedrungen. Die sehr zierlichen schwarzen Linien, welche die Zellen umgaben, verbanden oft die Spitzen benachbarter Papillen, wurden aber in den Thälern zwischen denselben immer schwächer und schwächer, und fehlten in den tiefsten Epidermisschichten gänzlich. In diese drang das Oel niemals ein, wenn die Stücke auch noch so lange in demselben verweilt hatten. An nicht mit Oel imprägnirten Schnitten konnte man denn auch sehen, daß hier die Stacheln und mit ihnen die Interstitien immer unbedeutender werden.

Allenthalben, im weniger verhornten Epithel, wie in der

stark verhornten Epidermis, in den höheren und den tiefsten Schichten des Stratum mucosum zeigten sich endlich auch die Zellkerne schwarz gefärbt. Es läßt sich dies nur so erklären, daß das Oel durch die Zellsubstanz in feinster Vertheilung durchdringen und die Stelle des Kernes einnehmen kann.

Die unerwartete Thatsache, daß sich das Stratum mucosum der zarteren Epithelien und der derberen Epidermis verschieden verhält, fordert dazu auf, eine Erklärung zu suchen. Man wird geneigt sein zu glauben, daß diejenigen Zellen, welche von einem steten Saftstrom umspült werden, einen besonders regen Stoffwechsel haben und mit besonders guter Ernährung versehen sind. Die weichen Epithelien des Oesophagus und ähnlicher Stellen sind einer starken Abnutzung ausgesetzt und müssen sich daher in ihren tiefen Schichten stets in reger Reproductionsthätigkeit befinden, wozu sie aber eines lebhaften Säftestromes bedürfen. Bei der Epidermis, wo die stärkere Verhornung an sich eine so starke Abnutzung verhindert, wie an den Epithelien, wo ferner die der Oberfläche am nächsten liegenden Zellen um die Papillenspitzen vor Allem den Ausfall werden zu decken haben, genügt offenbar die geringe Durchfeuchtung von der Cutis her, um die in der Tiefe liegenden Zellen zu ernähren und zu einer, wenn auch trägeren Proliferation anzuregen.

Die Richtigkeit vorstehender Erklärung kann nur durch eine größere Untersuchungsreihe, welche sich bereits in Vorbereitung befindet, über jeden Zweifel erhoben werden.

Die Blutversorgung der Beugesehnen der Finger.

Von

H. Berkenbusch, Cand. med.

(Aus dem anatomischen Institut zu Göttingen.)

(Vorgelegt in der Sitzung vom 2. Juli 1887 von Fr. Merkel.)

Die in den Ligamenta vaginalia der Finger eingeschlossenen Beugesehnen sind dadurch besonders ausgezeichnet, daß sie auf eine Strecke von 6—9 cm. isolirt in ihrer Röhre verlaufen und mit der Umgebung nur durch die wenigen faden- oder plattenförmigen Vincula tendinum verbunden sind. Diese letzteren wurden von einigen Autoren (Weber-Hildebrandt, Rüdinger) als Apparate

zum Festhalten der Sehnen angesehen, worauf ja auch schon der Name hinweist, während weitaus die meisten Schriftsteller sie für die Bahnen halten, auf welchen die isolirten Sehnen ihr Blut beziehen (Sömmering, Theile, Henle, Sappey, Langer, W. Krause, Gegenbaur, Toldt). Erstere Ansicht hat nicht viel für sich, die ganze Lage und der Verlauf der Vincula deutet nicht darauf hin, daß sie eine Haftfunction zu versehen haben. Aber auch die letztere Ansicht trifft nur in beschränktem Maaße das richtige, wie es schon vor Jahren Herrn Prof. Merkel gelegentlich der Injection eines Fußes erschienen war. Er beauftragte mich deshalb mit einer erneuten Untersuchung der einschlägigen Verhältnisse.

Es wurde eine große Anzahl ganz frischer und schon länger liegender Hände und Füße eingespritzt und zwar mit blauer und rother Leimmasse, mit Asphalt in Chloroform gelöst und mit wässeriger Lösung von Berliner Blau. Theils wurden die Injectionen mit der Spritze, theils mit constantem Druck ausgeführt. Wir blieben schließlich dabei stehen, die Extremitäten schon ein oder mehrere Tage verstorbener Personen zu benutzen und dieselben unter Anwendung der Spritze mit wässeriger Lösung von Berliner Blau zu injiciren, da bei Anwendung lebensfrischer Objecte und Benutzung anderer Methoden nicht selten Zweifel darüber entstanden, ob auch die sehr schwer zu füllenden Sehnen vollständig injicirt waren. Aber auch bei der gelungensten Injection wurde jedesmal bei der Untersuchung sorgfältig darauf geachtet, ob nicht etwa doch irgend welche Stellen leere Gefäße enthielten.

Um nun die Sehnen mikroskopisch und im Ganzen zu untersuchen, wurden sie in 96procentigem Alkohol entwässert und in Terpentinöl aufgehellt. Man kann solche Präparate sehr gut unter Terpentin in Probierröhrchen aufheben. An ihnen zeigten sich stets Stellen in einer Ausdehnung von etwa 1 cm. ohne Injection. In der Sehne des Flexor sublimis lag diese Stelle proximal von dem Punkt, an welchem sie in ihre beiden Zipfel zerfällt, im Flexor profundus etwas weiter nach der Fingerspitze zu, also etwa ebensoweit von der Insertion an die Phalanx entfernt, wie beim Fl. subl. Die übrigen Theile der Sehnen waren mit Gefäßen versehen, welche von der Insertionsstelle am Knochen, von der Palma her und durch die Vincula tendinum herantraten. Die meisten dieser Gefäße, besonders soweit sie aus den Vincula tendinum stammten, blieben auf der Oberfläche der Sehnen, eine Anzahl ging auch in die Substanz der Sehnen hinein. Alle aber endigten in Schlingen, ohne ein capillares Netz zu bilden. Die feinsten

Arterien zeigten dabei die von mehreren Seiten (Ranvier, Peremeschko u. a.) beschriebenen spindelförmigen Erweiterungen, wie sie in den Muskeln und im Nackenbande beobachtet worden sind. Die Vinc. tendinum führen also wohl, wie es die Autoren wollen, Gefäße zur Sehne hin, dieselben sind aber des Mangels an Capillaren wegen, kaum geeignet, als eigentliche Ernährungsgefäße angesehen zu werden, und es ist die Ernährung eine um so schlechtere, als die beiden beschriebenen Stellen ganz ohne alle Blutversorgung sind.

Die beiden gefäßlosen Stellen bedurften nun aber einer besonderen, sorgfältigen Untersuchung, um gegen jeden Verdacht schlecht gelungener Injection gesichert zu sein. Sie wurden daher auf Querschnitten mit starken mikroskopischen Vergrößerungen untersucht. Die Präparate wurden dabei in 96%igen Alkohol gehärtet und die Schnitte in verschiedener Weise gefärbt (Methylgrün; Cerise; Blauholz; Eosin-Blauholz). Die beste Färbung erhielten wir durch Einlegen in eine Mischung von gleichen Theilen Orange und Müller'scher Flüssigkeit. Sie verweilten darin 1—2 Minuten und wurden nach dem Abspülen mit Cerise nachgefärbt. Die Sehnenbündel wurden bei dieser Behandlung goldgelb, die Zellkerne dunkelroth und das interfasciculäre Bindegewebe hell rosa. Es fanden sich nun an einer Anzahl von Präparaten eigenthümliche Gebilde zwischen den Sehnenbündeln, welche man nur für obliterirte Gefäße halten konnte. Sie hatten ein schwartiges Ansehen und ließen sich nicht immer ganz leicht von kleinsten Sehnenfascikeln unterscheiden. Es gelang an einer größeren Reihe von Objecten den Uebergang von den Gefäßen zu den in Rede stehenden Gebilden nachzuweisen. Die erste Veränderung der noch mit Injectionsmasse gefüllten Gefäße an der kritischen Stelle bestand darin, daß dieselben anstatt der gewöhnlichen Adventitia jenes schwartige mehr homogen erscheinende Gewebe, welches sich in Orange-Cerise gelblichroth färbt, zeigten. An anderen Gefäßen war ein eng zusammengefallenes Lumen zu finden, ohne jedoch Injectionsmasse zu enthalten. Wieder an anderen fand sich kein Lumen mehr, doch zeigten sich die Querschnitte der in der Intima des ehemaligen Gefäßes befindlichen elastischen Fasern noch ganz characteristisch in einen Kreis gestellt und die letzte Stufe ließ nur das schwartige mit sehr wenigen Kernen versehene Gewebe allein erkennen.

Endlich sei auch noch erwähnt, daß manche Sehnen reichlicher, andere wieder sehr spärlich mit den in Rede stehenden Gebilden versehen waren. Längsschnitte, welche bei günstiger Schnitt-

richtung den Uebergang vom gefüllten zum obliterirten Gefäß zeigen müssen, wollten uns bis jetzt noch nicht so gelingen, daß wir in einem Schnitte den ganzen Proceß hätten verfolgen können, doch gelang es auch hier die auf einander folgenden Stadien zu finden.

Darnach stehe ich nicht an, zu behaupten, daß an den gefäßlosen Stellen der volaren Fingersehnen eine Obliteration vorhandener Gefäße stattgefunden hat.

Es liegt der Gedanke sehr nahe, daß die Blutversorgung in der Jugend eine andere und zwar reichlichere sei, wie in späteren Jahren und in der That zeigten die Fingersehnen eines etwa 4 monatlichen Embryo keine Stelle, welche nicht mit blutkörperchen-haltigen Capillargefäßen reichlich durchzogen gewesen wäre. Da uns kindliche Präparate nicht zur Verfügung standen, so untersuchten wir Sehnen von jungen Thieren (Kalb und Schwein). Die Injection derselben gelang leicht und vollständig. Gefäßschlingen waren auch hier vorhanden, jedoch gingen von denselben Capillarnetze aus, welche den leitersprossenähnlichen Typus der im Muskel vorhandenen zeigten. Es war keine größere Stelle zu bemerken, die nicht Gefäße enthalten hätte, wenn auch die Blutversorgung einigermaßen unregelmäßig genannt werden mußte. Bei kleineren Thieren, Mäusen, Ratten, Kaninchen, enthalten die Fingersehnen im Inneren überhaupt keine Gefäße, sondern zeigen nur auf der Oberfläche verlaufende Netze und Schlingen.

Nach Vorstehendem scheint es also, als sei die Versorgung der volaren Fingersehnen abhängig von der Größe der Sehne und vom Alter des Trägers derselben. In späteren Lebensjahren verlieren sie (speciell beim Menschen) ihre Capillarnetze und büßen sogar an zwei Stellen die Schlingen gröberer Gefäße ein. Es ist klar, daß demnach eine jugendliche Fingersehne pathologischen Insulten einen weit erfolgreicheren Widerstand wird entgegensetzen können, als die eines älteren Menschen.

Ueber eine specielle geometrische Aufgabe des Minimums.

Von

Eduard Neovius in Helsingfors.

Die Aufgabe: Durch einen gegebenen Punkt M Fig. 1 eine Gerade zu legen, auf welcher die Schenkel eines gegebenen Winkels CAB eine möglichst kurze Strecke EF abschneiden, ist schon im vorigen Jahrhunderte, namentlich von L'Huilier behandelt worden. Es scheint jedoch bisher nicht bemerkt worden zu sein, daß die cubische Gleichung, auf welche die Lösung dieser Aufgabe führt, unter Umständen drei reelle Wurzeln besitzt, wobei aber nur zwei Wurzeln ein Minimum, der dritten dagegen ein Maximum der Länge der Strecke EF entspricht. Dies soll im Folgenden kurz dargethan werden.

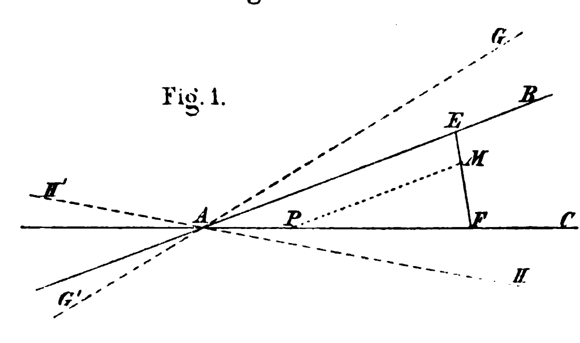


Fig. 1.

Vom Punkte M aus ziehe man MP parallel zu AB und setze $AP = a$, $PM = b$, $PF = x$, $EF = u$, $CAB = \alpha$, $\cos\beta = \frac{1}{3}\cos\alpha = c$.

Es ist alsdann

$$u = \left(1 + \frac{a}{x}\right)\sqrt{b^2 - 6bcx + x^2},$$

woraus sich zur Bestimmung der unbekannten Größe x die cubische Gleichung

$$x^3 - 3bcx^2 + 3abcx - ab^2 = 0$$

ergibt, oder, wenn $x = y + bc$ gesetzt wird,

$$y^3 + py + q = 0, \text{ wo}$$

$$p = -\ 3bc(bc - a) \text{ und } q = -\ b^2(2bc^3 - 3ac^2 + a).$$

Für die Größe $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, deren Vorzeichen darüber entscheidet,

ob die cubische Gleichung eine oder drei reelle Wurzeln hat, ergibt sich der Ausdruck

$$a^3 b^3 c^3 \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{1 - 6c^2 - 3c^4}{4c^3} \cdot \frac{b}{a} + 1\right),$$

oder, wenn

$$m = \frac{1}{2} \frac{1 - 6c^2 - 3c^4}{4c^3},$$

und n gleich der reellen Größe $m - \sqrt{m^2 - 1}$ gesetzt wird,

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = a^3 b^3 c^3 \left(\frac{b}{a} + n\right)\left(\frac{b}{a} + \frac{1}{n}\right).$$

Wenn man nun a und b als Variable ansieht und erst $\frac{b}{a} = -n$, dann $\frac{b}{a} = -\frac{1}{n}$ annimmt, so werden dadurch zwei Gerade GG' und HH' bestimmt, welche mit den gegebenen Geraden AB und AC gleich große Winkel BAG und CAH $(= \gamma)$ einschließen.

Jenachdem der Punkt M sich innerhalb eines von diesen beiden Winkeln befindet oder nicht, hat die cubische Gleichung drei reelle Lösungen oder nur eine.

Der Winkel γ ist durch die Gleichung

$$\frac{\sin \gamma}{\sin(\alpha + \gamma)} = m - \sqrt{m^2 - 1}$$

bestimmt, woraus

$$\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\alpha + \gamma) \operatorname{cotg}(\tfrac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\frac{m+1}{m-1}} = \sqrt{\frac{1+3c}{1-3c}} \left(\frac{1-c}{1+c}\right)^{\frac{3}{2}} = \operatorname{cotg}(\tfrac{1}{2}\alpha) . \operatorname{tg}^3(\tfrac{1}{2}\beta),$$

oder

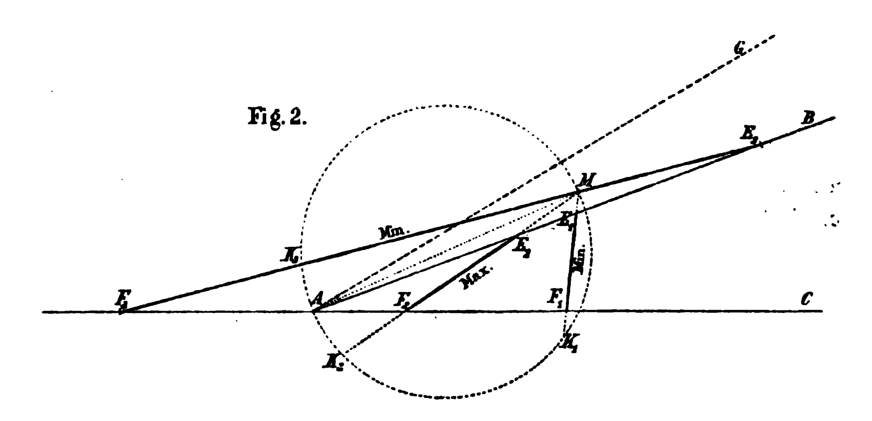
$$\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\alpha + \gamma) = \operatorname{tg}^3(\tfrac{1}{2}\beta)$$

sich ergibt.

In der folgenden Tabelle sind einige zusammengehörige Werthe der Größen α und γ zusammengestellt.

α	γ		
Grade.	Grade.	Min.	Sec.
0	19	28	16
10	14	46	50
20	10	42	57
30	7	17	54
40	4	33	14
50	2	29	54
60	1	7	7
70		20	50
80		2	41
90			0

Wenn für kleinere Werthe von α (z. B. $\alpha = 20^0$) der Punkt M annähernd auf der Halbirungslinie des Winkels γ angenommen



wird, so treten die drei Lagen der Strecke EF, nämlich E_1F_1, E_2F_2, E_3F_3, welche den drei reellen Wurzeln der cubischen Gleichung entsprechen, recht deutlich hervor, wie Fig. 2 zeigt.

Eine von L'Huilier gefundene Bedingung für den Eintritt des Minimums (beziehungsweise Maximums) (Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris, Tubingae 1795, pag. 270) führt zu der Bemerkung, daß, wenn die Fußpunkte der vom Punkte A auf die Geraden MF_1, MF_2, MF_3 gefällten Perpendikel mit K_1, K_2 und K_3 bezeichnet werden, die Strecken ME_1 und F_1K_1, ME_2 und F_2K_2, ME_3 und F_3K_3 beziehlich gleiche Länge haben müssen. In Folge dessen liegen die Punkte F_1, F_2, F_3 auf einer durch den Punkt M gehenden cirkulären Curve dritter Ordnung, welche sich mit Hülfe des über AM als Durchmesser beschriebenen Kreises construiren läßt. Ferner kann bemerkt werden, daß die Punkte M, K_1, K_2, K_3 auf einer Hyperbel liegen, deren Asymptoten die beiden Schenkel des gegebenen Winkels sind.

Aus einer anderen Interpretation der Bedingungsgleichung für den Eintritt des Maximums oder Minimums (Vergl. Sturm, Cours d'Analyse I. pag. 189) ergibt sich, daß die durch M senkrecht zu $ME_\lambda F_\lambda$, durch E_λ senkrecht zu AB, durch F_λ senkrecht zu AC gezogenen Geraden einander (für $\lambda = 1, 2, 3$) jedesmal in demselben Punkte schneiden.

Die beiden letzten Bemerkungen verdanke ich einer von befreundeter Seite mir gemachten Mittheilung.

Ueber einige ebene Configurationen und die zugehörigen Gruppen von Substitutionen.

Von

A. Schoenflies.

Eine Gruppe von n Punkten und n Geraden von der Eigenschaft, daß je drei Punkte auf einer Geraden liegen und je drei Geraden durch einen Punkt gehen, soll eine Configuration n_3 genannt werden[1]). Die Configurationen n_3 sind in letzterer Zeit bereits mehrfach Gegenstand der Untersuchung gewesen, besonders von Seiten der Herren S. Kantor[2]) und Martinetti[3]). Eine soeben erschienene Abhandlung von Herrn Martinetti[4]), welche sich gleichfalls mit den Configurationen n_3 beschäftigt, enthält unter anderem auch einige Sätze, die ich selbst kürzlich gefunden habe; dies veranlaßt mich, die Resultate meiner eigenen Untersuchungen hier in Kürze mitzuteilen. Eine ausführliche Ableitung derselben gedenke ich bald folgen zu lassen.

1. Sind $1, 2 \ldots . n$ die n Punkte einer Configuration n_3 so kann es Substitutionen der Zahlen $1, 2 \ldots n$ geben, welche nicht allein jeden Configurationspunkt in einen Configurationspunkt, sondern auch jede der n Geraden wieder in eine Gerade überführen. Die Gesammtheit dieser Substitutionen soll die Gruppe der Configuration genannt werden. Jede derselben führt die Configuration in sich über.

Wenn die Configuration sich in Bezug auf alle Punkte und Geraden gleichartig verhält, so soll sie regelmäßig heißen. Alsdann ist es gestattet, für einen beliebigen Configurationspunkt je-

1) Reye, Acta mathematica, Bd. 1. S. 93.
2) Sitzungsberichte der Wiener Akademie. Bd. 102.
3) Annali di Mat. Serie II, Bd. 15, S. 1.
4) Ebenda, Bd. 15, S. 1.

den andern zu substituiren, die zugehörige Gruppe ist daher transitiv und zwar im Allgemeinen einfach transitiv.

Seien 1, 2, 3 drei beliebige Punkte der Configuration, so brauchen die Geraden 23, 31, 12 keine Configurationsgeraden zu sein. Ist dies aber der Fall, so soll 1 2 3 ein Configurationsdreieck heißen. Wie Herr Martinetti bemerkt hat, giebt es Configurationen n_3, welche keine solchen Dreiecke enthalten. Ich werde mich jedoch im Folgenden nur mit denjenigen Configurationen beschäftigen, welche wirklich Configurationsdreiecke enthalten, und zwar soll die Aufgabe behandelt werden, alle derartigen regelmäßigen Configurationen zu finden, und die zugehörigen Gruppen aufzustellen.

Jede dieser Configurationen ist sich selbst reciprok. Sie lassen sich danach einteilen, in wie vielen Dreiecken jeder ihrer Punkte, resp. jede ihrer Geraden vorkommt. Es findet sich, daß die Anzahl dieser Dreiecke nur 9, 6, 4, 3 oder 2 sein kann.

Es sollen noch zwei Punkte verbunden oder getrennt[1]) genannt werden, je nachdem ihre Verbindungslinie eine Configurationsgerade ist oder nicht, ebenso zwei Geraden verbunden, wenn ihr Schnittpunkt der Configuration angehört, getrennt, wenn dies nicht der Fall ist.

2. Sei nun 1 ein beliebiger Punkt der Configuration und a_0, a_1, a_2 die drei durch ihn gehenden Geraden. Die auf ihnen außer 1 liegenden Punkte seien resp. $2_0 3_0$, $2_1 3_1$, $2_2 3_2$. Wenn der Punkt 1 in neun Dreiecken vorkommen soll, so müssen die Punkte $2_0 2_1 2_2$ und $3_0 3_1 3_2$ je eine Gerade bilden; außerdem existiren die Geraden $2_1 3_2$, $2_2 3_0$ und $2_0 3_1$, und diese drei Geraden schneiden sich überdies in einem Configurationspunkt 1_1. Wird eine Gerade, deren drei Punkte mit demselben vierten Punkt verbunden sind, conjugirt zu diesem Punkt genannt, so läßt sich die Configuration dahin characterisiren, daß jeder Punkt zu zwei Geraden und jede Gerade zu zwei Punkten conjugirt ist. Es giebt nur eine regelmäßige Configuration dieser Art, nämlich die bekannte imaginäre Configuration 8_3. Sie läßt sich auch als ein Achteck auffassen, welches sich selbst so ein- und umschrieben ist, daß für jeden Wert von i die Punkte

$$i,\ i+1,\ i+3$$ [2])

auf einer Geraden liegen. Die Configuration enthält 24 Dreiecke.

1) Herr Martinetti gebraucht die Ausdrücke conjunto und estraneo.

2) Die Zahlen kommen nur in Bezug auf den *mod n* in Frage. Dies gilt auch für das Folgende.

Die zu dieser Configuration gehörige Gruppe enthält 48 Substitutionen. Sie ist definirt durch eine cyclische Substitution, welche je zwei auf einander folgende Punkte des Achtecks in einander überführt, sowie durch die sechs Substitutionen welche 1 unverändert lassen. Drei derselben führen jede der beiden zu 1 conjugirten Geraden in sich selbst über, die anderen drei führen beide Geraden in einander über.

3. Wenn der Punkt 1 in 6 Dreiecken vorkommen soll, so liegen auf den Geraden a_0, a_1, a_2 6 Paare verbundener Punkte. Dies ist auf drei verschiedene Arten möglich.

Erstens nämlich können die Punkte

$$2_0\ 3_1\ 2_2\ 3_0\ 2_1\ 3_2$$

ein geschlossenes Sechseck bilden, welches den Geraden a_0, a_1, a_2 eingeschrieben ist; *es giebt wieder nur eine derartige Configuration*, nämlich die bekannte Configuration 9_3, welche aus drei Dreiecken besteht, von denen je zwei dreifach perspectivisch liegen. Wenn der achte und neunte Configurationspunkt durch 1_1 und 1_2 bezeichnet werden, so sind diese Dreiecke $1\,1_1\,1_2$, $2_0\,2_1\,2_2$ und $3_0\,3_1\,3_2$. Die Configuration enthält 18 Dreiecke, die eben genannten gehören bekanntlich nicht zu ihnen.

Es giebt 6 Substitutionen, welche jeden Punkt des Dreiecks $1\,1_1\,1_2$ unverändert lassen, und 6 Substitionen, welche 1 ungeändert lassen, aber 1_1 und 1_2 vertauschen. *Die Gruppe besteht daher im Ganzen aus 108 Substitutionen.*

4. Im zweiten Fall bilden die Punkte $2_0\,2_1\,2_2$, $3_0\,3_1\,3_2$ je ein Configurationsdreieck. *Es giebt ebenfalls nur eine derartige Configuration*, nämlich die bekannte Configuration 10_3, welche aus zwei perspectivischen Dreiecken, ihrer Collineationsaxe und dem Collineationscentrum besteht. Die Configuration enthält 20 Dreiecke.

Die Gruppe derselben ergiebt sich einfach wie folgt. Die Configuration kann bekanntlich als ebener Schnitt eines vollständigen räumlichen Fünfecks betrachtet werden, und daraus folgt unmittelbar, daß die gesuchte Gruppe der Gruppe aller Vertauschungen von 5 Dingen holoedrisch isomorph ist. *Sie besteht daher aus 120 Substitutionen.*

5. Die dritte Gattung von Configurationen, welche an jedem Punkt sechs Dreiecke enthält, ist dadurch characterisirt, daß die Punkte $2_0\,2_1\,2_2$ auf einer Geraden liegen, die Punkte $3_0\,3_1\,3_2$ aber nicht. Jedem Punkte ist daher in dem oben (2) angegebenen Sinn *eine* Gerade conjugirt und umgekehrt. Die noch fehlenden Paare

verbundener Punkte sind $2_0\,3_1$, $2_1\,3_2$ und $3_0\,3_1$. Die Configuration besteht für jeden Wert von $n > 8$, und läßt sich als ein Polygon $12 \ldots . n$ betrachten, welches sich selbst so ein- und umschrieben ist, daß für jeden Wert von i die Punkte

$$i,\ i+1,\ i+3$$

auf einer Geraden liegen. Die Configuration enthält $2n$ Dreiecke.

Die Gruppe der Configuration ist leicht zu finden. Irgend zwei der mit 1 verbundenen Punkte verhalten sich nämlich in Bezug auf die Configuration verschieden gegen den Punkt 1; die Gruppe ist daher genau einfach transitiv[1]) und besteht aus den n Potenzen der cyclischen Substitution

$$S = (12 \ldots . n),$$

wenn $1\,2 \ldots n$ die Ecken des Polygons in der eben fixirten Reihen folge bedeuten.

6. Regelmäßige Configurationen, von welchen jeder Punkt in vier Dreiecken vorkommt, existiren nur, wenn n ein Vielfaches von 3, also $n = 3m$ ist. Die Punkte, welche auf den drei Geraden $a_0\,a_1\,a_2$ liegen, liefern vier Paare verbundener Punkte, nämlich

$$2_1\,3_2,\ 2_2\,3_0,\ 2_0\,3_1 \text{ und}$$
$$2_0\,3_2$$

Die Configuration besteht aus einem Cyclus von m Dreiecken

$$P_1,\ P_2,\ \ldots .\ P_m$$

von der Art, daß für jeden Wert von i das Dreieck P dem Dreieck P_{i-1} eingeschrieben und dem Dreieck P_{i+1} umgeschrieben ist. Die Configuration enthält $4m$ Dreiecke. Eigentliche Configurationen dieser Art existiren nur für $m > 3$; die zum Wert $m = 3$ gehörige Configuration 9_3 fällt mit derjenigen Configuration zusammen, welche der eben genannten Classe (5) angehört.

7. Diese Configurationen können auch als eine besondere Abart derjenigen Classe von Configurationen betrachtet werden, von denen jeder Punkt in drei Dreiecken vorkommt. Die Configurationen dieser Gattung verhalten sich symmetrisch in Bezug auf

1) Unter einer genau einfach transitiven Gruppe soll eine solche Gruppe verstanden werden, deren Grad gleich ihrer Ordnung ist.

die drei durch jeden Punkt gehenden Geraden. Die drei Paare verbundener Punkte auf den Geraden a_0, a_1, a_2 sind

$$2_1\,3_2,\ 2_2\,3_0,\ 2_0\,3_1$$

und daraus läßt sich leicht schließen, daß die Configuration aus einem Cyclus von q Polygonen

$$P_1,\ P_2\ \ldots\ldots\ P_q$$

von je p Seiten besteht von der Art, daß für jeden Wert von i das Polygon P_i dem Polygon P_{i-1} eingeschrieben und dem Polygon P_{i+1} umschrieben ist, und daß je zwei auf einander folgende Punkte des Polygons P_i auf zwei auf einander folgenden Seiten von P_{i-1} liegen. Die Configuration enthält im Ganzen n Dreiecke.

Derartige Configurationen existiren nur, wenn n mindestens den Wert 12 hat, im übrigen für beliebige Werte von p und q, mit alleiniger Ausnahme von $p = 3$. In diesem Fall geht die Configuration in die vorstehend (6) erwähnte über und zu den drei Paaren verbundener Punkte $2_1\,3_2$, $2_2\,3_0$, $2_0\,3_1$ tritt noch ein viertes Paar, nämlich das Paar $2_0\,3_2$. Dagegen ist der Wert von q ganz unbeschränkt und kann im speciellen auch 1 oder 2 sein.

8. Die Frage nach den zugehörigen Gruppen kann für die beiden letzten Classen von Configurationen gemeinsam behandelt werden, und zwar auf folgende Weise.

Die Bezeichnung der n Configurationspunkte möge von nun an so getroffen werden, daß die Polygone P_1, $P_2\ \ldots\ P_q$ der Reihe nach die Punkte

$$\begin{array}{l} 1_1\,2_1\,3_1\ \ldots\ldots\ p_1 \\ 1_2\,2_2\,3_2\ \ldots\ldots\ p_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1_q\,2_q\,3_q\ \ldots\ldots\ p_q \end{array}$$

enthalten; ferner soll für

$$i = 1,\ 2,\ \ldots\ldots\ q-1$$

die Seite $h_i\ (h+1)_i$ des Polygons P_i durch den Punkt $(h+2)_{i+1}$ des Polygons P_{i+1} hindurchgehen; d. h. die Punkte $h_i\ (h+1)_i\ (h+2)_{i+1}$ liegen auf einer Geraden. Die Lage des Polygons P_q zum Polygon P_1 kann alsdann noch willkürlich angenommen werden; sie sei so, daß die Seite $h_q\ (h+1)_q$ des Polygons P_q den Punkt $(h+2+r)_1$ von P_1 enthält; so daß für jeden Wert von h und einen festen Wert von r

$$h_q,\ (h+1)_q,\ (h+2+r)_1$$

auf einer Geraden liegen. Dabei kann r alle Werte von 1 bis p annehmen.

Gemäß dieser Festsetzung enthalten die drei durch den Punkt 1_1 gehenden Geraden resp. die Punkte

$$1_1\, 2_1\, 3_1,$$
$$p_1\, 1_1\, 2_2 \text{ und}$$
$$(p-1-r)_q\, (p-r)_q\, 1_1.$$

Da die Configurationsgruppen transitiv sind, so enthalten sie jedenfalls Substitutionen, welche alle Elemente umsetzen. Seien P, S, T Substitutionen dieser Art, welche auf 1_1 resp. 2_1, 2_2, 3_2 folgen lassen; diese lassen sich so wählen, daß jede derselben aus einer Reihe von Cyclen besteht, deren jeder dieselbe Anzahl von Punkten enthält.

Im einzelnen ergiebt sich darüber Folgendes: Wenn die cyclische Substitution

$$(1_i\, 2_i\, 3_i\, \ldots \,.\, p_i) = P^{(i)}$$

gesetzt wird, so ist

$$P = P'\, P'' \ldots \,.\, P^{(q)};$$

diese Substitution führt jedes der Polygone P_i in sich selbst über.

Sind ferner S' und T' diejenigen Cyclen von S resp. T, welche den Punkt 1_1 enthalten, so ist

$$S' = (1_1\, 2_2\, 3_3\, \ldots \,.\, q_q\, (q+1+r)_1 \ldots \,.)$$
$$T' = (1_1\, 3_2\, 5_3\, \ldots \,.\, (2q-1)_q\, (2q+1+r)_1 \ldots).$$

Wenn nun σ der größte gemeinsame Teiler von p und $q+r$ ist, so zerfällt die Substitution S in σ Cyclen $S^{(i)}$ von je s Punkten; d. h. es ist

$$S = S'\, S'' \ldots \,.\, S^{(\sigma)};$$

ebenso, wenn τ der größte gemeinschaftliche Teiler von p und $2q+r$ ist, so zerfällt die Substitution T in τ Cyclen $T^{(i)}$ von je t Punkten und es ist

$$T = T'\, T'' \ldots \,.\, T^{(\tau)}.$$

Ueberdies besteht zwischen den Substitutionen P, S, T die Relation

$$T = P\, S.$$

Die Punkte der Cyclen $S^{(i)}$ und $T^{(i)}$ bilden je ein geschlossenes Polygon S_i resp. T_i, und die Polygone

$$S_1,\, S_2,\, \ldots \,.\, S_\sigma,$$
$$T_1,\, T_2,\, \ldots \,.\, T_\tau$$

bilden je einen Cyclus von Polygonen, welche einander in derselben Weise ein- und umschrieben sind, wie die Polygone P_i. Die Substitution S führt jedes der Polygone S_i in sich über, ebenso die Substitution T jedes der Polygone T_i. Die Configuration läßt sich daher auf drei verschiedene Arten als ein Cyclus von Polygonen auffassen, die einander ein- und umschrieben sind.

9. Von den Zahlen p, q, r, s, t hängt die Ordnung der Gruppe ab. Sind zunächst die Zahlen p, s, t sämmtlich von einander verschieden, so ist die Gruppe genau einfach transitiv, und ist durch die Substitutionen P, S, T vollständig bestimmt.

Wenn dagegen zwei dieser Zahlen einander gleich sind, so läßt sich die Bezeichnung stets so wählen, daß dies die Zahlen s und t sind. Alsdann haben die Polygone S_i und T_i gleich viele Seiten. In diesem Fall kann es Substitutionen geben, welche 1_1 unverändert lassen; dieselben müssen jedes Polygon P_i in sich selbst dagegen die Polygone S_i und T_i in einander überführen.

Die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist, daß p, q, r denselben gemeinsamen Teiler haben und daß überdies $2q+r$ durch p teilbar ist. Die Gruppe enthält alsdann $2n$ Substitutionen, sie ist characterisirt durch die Substitutionen P, S, T, sowie durch die Substitution U, welche den Punkt 1_1 unverändert läßt. Dieselbe vertauscht in jedem Polygon P_i je zwei Punkte mit einander, und zwar sind dies für das Polygon P_i je zwei Punkte h_i und k_i, für welche

$$h+k \equiv 3i-1 \mod p$$

ist.

10. Soll die Gruppe noch andere Substitutionen enthalten, welche den Punkt 1_1 ungeändert lassen, so muß

$$p=q \text{ und } r=0$$

sein. Solche Configurationen existiren demnach nur, wenn n eine Quadratzahl ist. Die Gruppe besteht aus $6n$ Substitutionen. Sie ist characterisirt durch die Substitutionen P, S, T, und die 6 Substitutionen, welche den Punkt 1_1 ungeändert lassen. Diese Substitionen werden repräsentirt durch die vorstehend genannte Substitution U, welche lauter einfache Vertauschungen enthält, sowie durch eine Substitution V, welche lauter dreigliedrige Cyclen enthält.

Die Substitution V läßt sich einfach auf folgende Weise de-

finiren. Es möge die Gesammtheit der $n = p^2$ Punkte in folgende zwei quadratische Schemata gebracht werden:

$$\begin{array}{llll} 1_1\; 2_1\; 3_1 \;\ldots\ldots\ldots\; p_1 & & 1_1\; 2_2\; 3_3 \;\ldots\ldots\; p_p \\ 3_2\; 4_2\; 5_2 \;\ldots\ldots\ldots\; 2_2 & & p_1\; 1_2\; 2_3 \;\ldots\; (p-1)_p \\ 5_3\; 6_3\; 7_3 \;\ldots\ldots\ldots\; 4_3 & \text{und} & (p-1)_1 p_2\, 1_3 \ldots (p-2)_p \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (p-1)_p p_p 1_p \ldots (p-2)_p & & 2_1\; 3_2\; 4_3 \;\ldots\ldots\ldots\; 1_p \end{array}$$

so ist für jede Zahl des ersten Schemas die entsprechende Zahl des zweiten Schemas zu substituiren. Beispielsweise ist derjenige Cyclus, welcher 2_1 enthält,

$$(2_1\; 2_2\; (p-1)_p)$$

Die vorstehenden Configurationen besitzen den höchsten Grad von Symmetrie, den eine Configuration dieser Gattung überhaupt erreichen kann. Die 6 Substitutionen, welche den Punkt 1_1 ungeändert lassen, gestatten für einen beliebigen mit 1_1 verbundenen Punkt jeden andern dieser Punkte zu substituiren. Eine solche Configuration läßt sich auf drei verschiedene Arten als ein Cyclus von p Polygonen mit p Seiten auffassen, deren jedes in der oben angegebenen Weise dem vorangehenden eingeschrieben und dem folgenden umgeschrieben ist.

11. Die Configurationen, bei denen jeder Punkt in zwei Dreiecken vorkommt, lassen sich als Cyclus von drei Polygonen betrachten, die einander regelmäßig ein- und umgeschrieben sind, jedoch nicht mehr so, daß zwei auf einander folgende Seiten des einen Polygons zwei auf einander folgende Punkte des eingeschriebenen Polygons enthalten.

Die Gruppe derselben enthält $2n$ Substitutionen. Solche Configurationen existiren nur für gewisse Werte von n. Ein Beispiel derselben ist die von Herrn Schröter[1]) bemerkte Configuration 21_3, welche von drei Siebenecken gebildet wird.

1) Journal für Math. 100. Bd. S. 237.

Darstellung der rationalen ganzen Invarianten der Binärform sechster Ordnung durch die Nullwerte der zugehörigen ϑ-Functionen.

Von

Oskar Bolza.

1. Es bezeichne

$$f = a_0 x_1^6 + 6a_1 x_1^5 x_2 + 15a_2 x_1^4 x_2^2 + 20a_3 x_1^3 x_2^3 + 15a_4 x_1^2 x_2^4 + 6a_5 x_1 x_2^5 + a_6 x_2^6$$
$$= a_0 \prod_{i=0}^{5} (x_1 - a_i x_2)$$

eine Binärform sechster Ordnung, deren Discriminante von Null verschieden ist; ferner sei:

$$u_1 = \int \frac{x_1 (x_2 dx_1 - x_1 dx_2)}{\sqrt{f}}$$
$$u_2 = \int \frac{x_2 (x_2 dx_1 - x_1 dx_2)}{\sqrt{f}}$$

und

$$\begin{matrix} \omega_{11}, & \omega_{12}, & \omega_{13}, & \omega_{14} \\ \omega_{21}, & \omega_{22}, & \omega_{23}, & \omega_{24} \end{matrix}$$

ein simultanes System primitiver Normalperioden von u_1 und u_2; endlich sei

$$\tau_{11}, \quad \tau_{12}, \quad \tau_{22}$$

das zugehörige System von ϑ-Moduln.

Es sollen die rationalen ganzen Invarianten von f durch die Nullwerte der ϑ-Functionen mit den Moduln τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} ausgedrückt werden.

2. Die Untersuchung ergibt das nach Analogie der elliptischen Functionen unerwartete Resultat, daß — in der Bezeichnungsweise von Salmon gesprochen — die Invariante A sich nicht als ganze Function der ϑ-Nullwerte ausdrücken läßt, sondern erst das Product aus A in die Discriminante Δ. Ferner: daß es unter den Invarianten vierten und sechsten Grades je nur eine einzige gibt, welche sich als ganze Function darstellen läßt, nämlich die Invarianten:

$$B^* = A^2 - 100\,B, \text{ und}$$
$$C^* = A^3 - 300\,AB + 250\,C.$$

Es sind dies gerade diejenigen Invarianten, deren Verschwinden zusammen mit dem Verschwinden von Δ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ausdrückt, daß die Form f eine dreifache Wurzel besitzt.

Es empfiehlt sich daher für den vorliegenden Zweck, als Fundamentalinvarianten für die Binärform sechster Ordnung die Invarianten:

$$A,\ B^*,\ C^*,\ \Delta,\ E$$

zu wählen.

3. Es folgen hier die Ausdrücke dieser Invarianten durch die Wurzeln von f und die ϑ-Nullwerte unter Benutzung der folgenden Abkürzungen:

$$(i,k) = \alpha_i - \alpha_k$$

$$\rho = \frac{(2\pi i)^2}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}}$$

$$P = \prod_i \vartheta_i,$$

wo das Productzeichen sich über die 10 geraden ϑ-Nullwerte erstreckt.

Es ist:

$$A = -\frac{a_0^2}{2^4\cdot 3\cdot 5}\,\Sigma\,(ik)^2\,(i'k')^2\,(i''k'')^2$$

$$= -\frac{\rho^2}{2^4\cdot 3\cdot 5}\,\frac{\Sigma\,\vartheta_\alpha^4\,\vartheta_\beta^4\,\vartheta_\gamma^4\,\vartheta_\delta^4\,\vartheta_\varepsilon^4\,\vartheta_\zeta^4}{P^2};$$

dabei erstreckt sich die Summation einerseits über die 15 Werte der Function $(ik)^2\,(i'k')^2\,(i''k'')^2$, andererseits über die 15 Sextupel, welche die 15 Göpel'schen Quadrupel aus geraden ϑ-Functionen zum Product aller geraden ϑ-Functionen ergänzen. Es ist noch besonders zu betonen, daß in dem Ausdruck für A der Zähler auch nach Berücksichtigung der zwischen den ϑ-Nullwerten bestehenden Relationen nicht durch den Nenner P^2 teilbar ist.

4. Die Invariante B^* hat den Ausdruck:

$$B^* = \frac{a_0^4}{2^2\cdot 3^4\cdot 5}\,\Sigma\,(ik)^2\,(kl)^2\,(li)^2\,(i'k')^2\,(k'l')^2\,(l'i')^2$$

$$= \frac{\rho^4}{2^2\cdot 3^4\cdot 5}\,\sum_i \vartheta_i^8;$$

die Summation erstreckt sich einerseits über die 10 Werte der Function

$$(ik)^2 (kl)^2 (li)^2 (i'k')^2 (k'l')^2 (l'i')^2,$$

andererseits über die 10 geraden ϑ-Nullwerte.

5. Wendet man auf die Function:

$$\varphi_0 = a_0^2 (03)(35)(50)(12)(24)(41)$$

die successiven Potenzen der cyclischen Permutation:

$$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_4, \alpha_3, \alpha_2)$$

an, und addiert die so entstehenden Werte $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, so bleibt die Function:

$$\Phi_5 = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$$

bei der bekannten dreifach transitiven Gruppe von 120 Permutationen unverändert, ist also sechswertig. Es ist alsdann:

$$\begin{aligned} C^* &= \frac{a_0^6}{2^2 \cdot 3^7 \cdot 5} \sum_i \Phi_i^3 \\ &= \frac{\rho^6}{2^2 \cdot 3^7 \cdot 5} [(-2\vartheta_5^4 + \vartheta_0^4 + \vartheta_{12}^4 + \vartheta_{34}^4)^3 + (-2\vartheta_5^4 + \vartheta_{23}^4 + \vartheta_4^4 + \vartheta_{01}^4)^3 \\ &\quad + (-2\vartheta_5^4 + \vartheta_{14}^4 + \vartheta_{03}^4 + \vartheta_2^4)^3 - (-2\vartheta_5^4 + \vartheta_2^4 + \vartheta_{01}^4 + \vartheta_{34}^4)^3 \\ &\quad - (-2\vartheta_5^4 + \vartheta_{14}^4 + \vartheta_{23}^4 + \vartheta_0^4)^3 - (-2\vartheta_5^4 + \vartheta_{03}^4 + \vartheta_4^4 + \vartheta_{12}^4)^3]. \end{aligned}$$

6. Für die Discrimanante Δ hat schon Herr Thomae die Formel gegeben:

$$\begin{aligned} \Delta &= a_0^{10} \Pi (ik)^2 \\ &= \rho^{10} P^2. \end{aligned}$$

7. Die schiefe Invariante E ist bekanntlich bis auf einen Zahlenfactor gleich dem Product der 15 verschiedenen Werte welche die Function:

$$\begin{aligned} \psi = \alpha_5 \alpha_0 (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4) + \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_0) \\ + \alpha_3 \alpha_4 (\alpha_5 + \alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_2) \end{aligned}$$

(abgesehen vom Vorzeichen) annimmt. Bei passender Wahl der Vorzeichen der ψ ist:

$$E = \frac{a_0^{15}}{2^8 \cdot 3^9 \cdot 5^{10}} \prod_i \psi_i.$$

Jedem Factor ψ_i ist ein Göpelsches Quadrupel aus geraden ϑ-Functionen zugeordnet, Q_i, und diesem entspricht wieder eine Rosenhainsche Doppelrelation zwischen den vierten Potenzen der sechs nicht an dem Quadrupel beteiligten ϑ-Nullwerten, von der Form:

$$\vartheta_\lambda^4 \pm \vartheta_\mu^4 = \vartheta_{\lambda'}^4 \pm \vartheta_{\mu'}^4 = \vartheta_{\lambda''}^4 \pm \vartheta_{\mu''}^4.$$

Bezeichnet man den gemeinsamen Wert der drei hier einander gleich gesetzten Ausdrücke mit $\pm R_i$, so ist bei passender Wahl der Vorzeichen:

$$\phi_i = \frac{\rho\, Q_i^2 R_i}{P}, \text{ und}$$

$$E = \frac{\rho^{15}}{2^8 \cdot 3^9 \cdot 5^{10}} \frac{\prod\limits_{(i)} R_i}{P^6}.$$

Göttingen, den 14. Juni 1887.

Ueber die quaternäre, endliche, lineare Substitutionsgruppe der Borchardt'schen Moduln.

Von

H. Maschke.

Diese Gruppe hat zuerst Herr Klein aus der Liniengeometrie abgeleitet; später hat er gezeigt, daß sich lie sogenannten Borchardt'schen Moduln der hyperelliptischen Functionen vom Geschlechte $p = 2$ nach derselben Gruppe linear substituiren. Es soll für diese Gruppe das volle System invarianter Formen aufgestellt werden.

Die in den Punktcoordinaten z_1, z_2, z_3, z_4 homogen mit der jedesmaligen Substitutionsdeterminate $+1$ geschriebene Gruppe besitzt: $N = 64 \cdot 720$ Substitutionen. Man constatirt eine ausgezeichnete Untergruppe H_1 von der Ordnung $\frac{1}{2} N$, und eine in dieser ausgezeichnete H_2 von der Ordnung 64. Die 64 Substitutionen von H_2 sind einfach gebaut; sie lassen das Tetraeder $z_1 z_2 z_3 z_4 = 0$ fest, und enthalten nur vierte Einheitswurzeln. Nimmt man dazu in allen Combinationen und Wiederholungen folgende beiden Substitutionen S von der Periode 3 und T von der Periode 5:

$$S: \begin{cases} \pm 2z_1' = (1-i)\,(z_1 - z_4) \\ \pm 2z_2' = (1-i)\,(z_2 - z_3) \\ \pm 2z_3' = (1+i)\,(z_2 + z_3) \\ \pm 2z_4' = (1+i)\,(z_1 + z_4) \end{cases}, \quad T: \begin{cases} \pm 2z_1' = -z_1 + z_2 + iz_3 - iz_4 \\ \pm 2z_2' = +z_1 + z_2 + iz_3 + iz_4 \\ \pm 2z_3' = -z_1 + z_2 - iz_3 + iz_4 \\ \pm 2z_4' = +z_1 + z_2 - iz_3 - iz_4 \end{cases}$$

so erhält man die ausgezeichnete Untergruppe H_1, endlich die volle Gruppe G durch Hinzunahme von:

$$U:\begin{cases}\pm\sqrt{2}z_1' = (1+i)z_1\\ \pm\sqrt{2}z_2' = (1+i)z_2\\ \pm\sqrt{2}z_3' = (1-i)z_3\\ \pm\sqrt{2}z_4' = (1-i)z_4\end{cases}$$

in allen Combinationen mit den bereits vorhandenen Substitutionen.

Dieselbe Gruppe wird auch erzeugt durch folgende 4 Substitutionen, welche mit einer geringen Modification aus den 4 Krazer'schen erzeugenden Substitutionen der Gruppe der linearen Periodentransformationen abgeleitet sind:

$$A:\begin{cases}z_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_1+z_4)\\ z_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_2+z_3)\\ z_3' = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_2-z_3)\\ z_4' = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_1-z_4)\end{cases},\quad B:\begin{cases}z_1' = \varepsilon z_1\\ z_2' = \varepsilon z_2\\ z_3' = -i\varepsilon z_3\\ z_4' = -i\varepsilon z_4\end{cases},\quad C:\begin{cases}z_1' = \varepsilon z_1\\ z_2' = \varepsilon z_4\\ z_3' = \varepsilon z_3\\ z_4' = \varepsilon z_2\end{cases},\quad D:\begin{cases}z_1' = \varepsilon z_1\\ z_2' = \varepsilon z_2\\ z_3' = -\varepsilon z_3\\ z_4' = \varepsilon z_4\end{cases},$$

worin $\varepsilon = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ zu setzen ist.

Für die ausgezeichnete Untergruppe H_2 bilden die Formen:

$$\begin{aligned} z_1^4+z_2^4+z_3^4+z_4^4 &= \varphi,\\ z_1^2z_2^2+z_3^2z_4^2 &= \psi_2,\\ z_1^2z_3^2+z_2^2z_4^2 &= \psi_3,\\ z_1^2z_4^2+z_2^2z_3^2 &= \psi_4,\\ z_1z_2z_3z_4 &= \chi \end{aligned}$$

das volle System invarianter Formen.

Die aus ihnen linear zusammengesetzte Form:

$$\Phi = \varphi+6(\psi_2+\psi_3-\psi_4)$$

erweist sich bei der ausgezeichneten Untergruppe H_1 als sechswerthig. Diese 6 Werthe sind:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \varphi+6(-\psi_2-\psi_3-\psi_4),\\ \Phi_2 &= \varphi+6(-\psi_2+\psi_3+\psi_4),\\ \Phi_3 &= \varphi+6(+\psi_2-\psi_3+\psi_4),\\ \Phi_4 &= \varphi+6(+\psi_2+\psi_3-\psi_4),\\ \Phi_5 &= -2\varphi-24\chi,\\ \Phi_6 &= -2\varphi+24\chi. \end{aligned}$$

Die Gruppe H_1 bewirkt dabei für die 6 Größen Φ_i die sogenannte alternirende Vertauschungsgruppe der 360 geraden Permutationen. Jede für die volle Gruppe G invariante Form muß als ganze Function durch φ, ϕ_2, ϕ_3, ψ_4, χ, also auch durch Φ_1, Φ_2, . . . Φ_6 darstellbar sein, weil die φ, ϕ_i, χ das volle Formensystem der in G enthaltenen H_2 vorstellen und sich linear durch die Φ_i ausdrücken. Alle für die alternirende Gruppe der Φ_i invariant bleibenden ganzen Functionen der Φ_i lassen sich aber rational und ganz ausdrücken durch die symmetrischen Functionen der Φ und ihr Differenzenprodukt. Es sind dies folgende Functionen:

$$\Sigma\Phi_i = 0,$$
$$-\tfrac{1}{6}\Sigma\Phi_i\Phi_k = \Sigma z_i^8 + 14\Sigma z_i^4 z_k^4 + 168 z_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^2 = F_8,$$
$$-\tfrac{1}{4}\Sigma\Phi_i\Phi\;\Phi_l = \Sigma z_i^{12} - 33\Sigma z_i^8 z_k^4 + 330\Sigma z_i^4 z_k^4 z_l^4 + 792 z_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^2 \Sigma z_i^4 = F_{12},$$
$$\Sigma\Phi_i\Phi_k\Phi_l\Phi_m = \tfrac{1}{4}(\Sigma\Phi_i\Phi_k)^2 = 9F_8^2,$$
$$\tfrac{1}{12}\Sigma\Phi_i\Phi_k\Phi_l\Phi_m\Phi_n = F_{20},$$
$$\tfrac{1}{4}\Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_4\Phi_5\Phi_6 = F_{24},$$
$$\Pi(\Phi_i - \Phi_k) = R_{60}.$$

Links gehen die Indices von 1—6, rechts von 1—4.

Demnach bilden F_8, F_{12}, F_{20}, F_{24}, R_{60} das volle System invarianter Formen der Gruppe H_1. Hierbei ist R_{60}^2 als ganze Function von F_8, F_{12}, F_{20}, F_{24} darstellbar, nämlich als Diskriminante der Gleichung sechsten Grades, welche Φ_1, Φ_2 . . Φ_6 zu Wurzeln, und also ihre elementaren symmetrischen Functionen, d. h.: 1, 0, $-6F_8$, $4F_{12}$, $9F_8^2$, $-12F_{20}$, $4F_{24}$ zu Coefficienten hat.

Da die volle Gruppe G alle 720 Permutationen der Φ_i, jedoch verbunden mit einem simultanen Vorzeichenwechsel bewirkt, wobei nur das Differenzprodukt und die elementaren symmetrischen Functionen gerader Dimension ungeändert bleiben, so sind nur solche Formen bei G invariant, welche F_{12} und F_{20} in gerader Potenz oder mit einander verbunden enthalten.

F_8, F_{12}^2, $F_{12}\cdot F_{20}$, F_{20}^2, F_{24}, R_{60} bilden mithin das volle System invarianter Formen der Gruppe G.

In der That besitzen die Gleichungen: $F_8 = a$, $F_{12}^2 = b$, $F_{20}^2 = c$, $F_{24} = d$, $F_{12}\cdot F_{20} = +\sqrt{bc}$, $R_{60} = +\sqrt{\Delta}$ in Bezug auf z_1, z_2, z_3, z_4 als Unbekannte gerade $64 \cdot 720 = N$ Lösungen.

Die Form R_{60} gestattet noch 2 andere einfache Definitionen:

1.) R_{60} bedeutet, $= 0$ gesetzt, die 15 Fundamentaltetraëder der 6 Fundamentalcomplexe $x_i = 0$, wo die x_i canonische Liniencoordinaten bedeuten.

2.) R_{60} ist die Functionaldeterminante der Functionen F_8, F_{12}, F_{20} F_{24}.

Zum Schlusse sei bemerkt, daß sich mit Hülfe der von Herrn Bolza gegebenen Darstellung der rationalen Invarianten der Form

6. Ordnung durch $\vartheta(0)$-Werthe die Invarianten der Formen 6. Ordnung unmittelbar durch die invarianten Formen des vorliegenden Formensystems ausdrücken lassen, wenn in ihnen z_1, z_2, z_3, z_4, Borchhardt'sche Moduln bedeuten. Sind A, B, C, Δ, E in der Salmon'schen Bezeichnung die Invarianten der Form 6. Ordnung, und setzt man zur Abkürzung:

$$\rho = \frac{(2\pi i)^2}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}},$$

so ist:

$$A = \frac{2\rho^2}{3^6 \cdot 5} \frac{F_{12}^2 - F_{24}}{F_{20}},$$

$$B^* = A^2 - 100\,B = \frac{\rho^4}{3^4 \cdot 5} F_8,$$

$$C^* = A^3 - 300\,AB + 250\,C = -\frac{\rho^6}{3^6 \cdot 5} F_{12},$$

$$\Delta = \frac{2^2 \cdot \rho^{10}}{3^{10}} (F_{20} - F_8 \cdot F_{12}),$$

$$E = -\frac{2^{52} \cdot \rho^{15}}{3^9 \cdot 5^{10}} \frac{R_{60}}{(\sqrt{F_{20}})^3},$$

wenn man setzt:

$$z_1 = \vartheta_5\,(0,0|2\tau_{11},\ 2\tau_{12},\ 2\tau_{22}),$$
$$z_2 = \vartheta_4\,(0,0|2\tau_{11},\ 2\tau_{12},\ 2\tau_{22}),$$
$$z_3 = \vartheta_{23}\,(0,0|2\tau_{11},\ 2\tau_{12},\ 2\tau_{22}),$$
$$z_4 = \vartheta_{01}\,(0,0|2\tau_{11},\ 2\tau_{12},\ 2\tau_{22}).$$

Ueber bilineare Formen.

Von

A. Voss in München.

Im 68. Bande des Journal's von Crelle hat Herr Christoffel gezeigt, daß eine allgemeine bilineare Form durch cogrediente Substitutionen in sich selbst transformirt werden kann, welche eine mit der Anzahl der absoluten Invarianten der Form übereinstimmende Zahl willkürlicher Parameter enthalten [1]). Aber die Transformation selbst erscheint dabei abhängig von der vorgängigen Lösung einer characteristischen Gleichung n. Grades, deren

1) Christoffel, Theorie der bilinearen Formen, Crelles Journal Bd. 68. S. 261.

Discriminante nicht verschwinden darf. Herrn Frobenius[1]) gelang es darauf, die Transformation der bilinearen symmetrischen und alternirenden Formen durch Formeln, welche den von Cayley und Hermite zur Transformation der quadratischen Formen in sich selbst aufgestellten völlig analog sind, rational auszuführen. Unabhängig von Herrn Frobenius hatte ich mich um dieselbe Zeit zunächst mit der Untersuchung orthogonaler Substitutionen[2]) beschäftigt, und zur Darstellung derselben einen Weg eingeschlagen, welcher unmittelbar auch die Herleitung der von letzterem erhaltenen Verallgemeinerungen gestattete[3]). Durch eine Reihe anderer Untersuchungen von dem Gegenstande abgezogen, bot sich mir erst vor kurzem Veranlassung, auf die damals benutzte Methode zurückzukommen. Hierbei ergab sich, daß die eigentliche Transformation der bilinearen Formen in sich selbst lediglich durch Auflösung linearer Gleichungen in vollständiger Analogie mit den bekannten Untersuchungen über quadratische Formen ausgeführt werden kann. Eine kurze Mittheilung über diesen Gegenstand beehre ich mich der K. Societät heute vorzulegen.

§ 1.

Es sei

$$F = \sum_{i,k} a_{ik} x_i y_k\,;\ i, k = 1, 2 \ldots n, \tag{1}$$

eine bilineare Form von n Variabelen. Der nach Voraussetzung nicht verschwindenden Determinante Δ der Coefficienten a_{ik}, welche beliebige reelle oder complexe Werthe haben mögen, soll der Bequemlichkeit halber der Werth $+1$ ertheilt werden, so daß

$$\Delta = |a_{ik}| = +1,$$

ist. Unter der beigeordneten Form von F[4]),

$$\mathrm{F} = \sum_{i,k} \alpha_{ik} x_i y_k, \tag{2}$$

verstehe ich diejenige, deren Coefficienten die gleichnamigen ersten Unterdeterminanten von Δ sind, so daß

$$\sum_k a_{ik} \alpha_{jk} = \varepsilon_{ij}\ ^{5)};$$
$$\sum_i a_{ik} \alpha_{il} = \varepsilon_{kl},$$

1) Frobenius, Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen, Crelle's Journ. Bd. 84, S. 37 ff.

2) Voss, Zur Theorie der orthogonalen Substitutionen, Math. Annalen XIII, S. 326—333.

3) Vgl. § 1.

4) Vgl. Kronecker, Journal von Crelle Bd. 68. S. 279.

5) ε_{ik} bedeutet das Kronecker'sche Symbol.

ist. Die Determinante der a_{ik} hat gleichfalls den Werth $+1$. Da durch die Substitutionen

$$x_i = \sum_\iota a_{i\iota} \xi_\iota ,$$
$$y_k = \sum_k a_{k\iota} \eta_\iota ,$$

die Form F in F transformirt wird, so reducirt sich die Aufgabe, alle cogredienten Substitutionen zu finden, welche F in sich transformiren, auf die einfachere, diejenigen Substitutionen zu bestimmen, welche die Gleichung

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i y_k = \sum_{i,k} a_{ik} \xi_i \eta_k$$

zu einer Identität machen. Wendet man dazu die cogrediente Substitution an,

$$x_i = \sum_\iota c_{i\iota} \xi_\iota ,$$
$$y_k = \sum_\tau c_{k\tau} \eta_\tau ,$$

in welcher die c_{ik} reelle oder complexe Größen bedeuten, so erhält man die Bedingungen

$$\sum_{i,k} a_{ik} c_{i\iota} c_{k\tau} = a_{\iota\tau}. \tag{3}$$

Wird die Determinante der c_{ik} durch Ω bezeichnet, so ist

$$\Omega^2 = 1.$$

Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, werde ich hier $\Omega = +1$, d. h. eine eigentliche Transformation der Form voraussetzen; für $\Omega = -1$ gelten zum Theil ähnliche Betrachtungen.

Wird nun die Form

$$\phi(\rho) = \begin{vmatrix} c_{11} + \rho a_{11} & c_{12} + \rho a_{12} & \cdot & \cdot & u_1 \\ c_{21} + \rho a_{21} & c_{22} + \rho a_{22} & \cdot & \cdot & u_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} + \rho a_{n1} & c_{n2} + \rho a_{n2} & \cdot & \cdot & u_n \\ v_1 & v_2 & \cdot & \cdot & 0 \end{vmatrix} \tag{4}$$

d. h. die mit beliebigen Größen u, v geränderte Determinante der characteristischen Function

$$\omega(\rho) = | c_{ik} + \rho a_{ik} |$$

nacheinander mit den Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} = +1,$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdot & \cdot & c_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{1n} & \cdot & \cdot & c_{nn} \end{vmatrix} = +1,$$

multiplicirt, und zwar so, daß das erste Mal verticale, das zweite Mal horizontale Reihen nach der Multiplicationsregel combinirt werden, so ergiebt sich mit Rücksicht auf die Gleichungen (3)

$$\psi\,(\rho) = \begin{vmatrix} a_{11} + \rho c_{11}, & a_{12} + \rho c_{12}, & \cdot\ \cdot & v_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} + \rho c_{n1}, & a_{n2} + \rho c_{n2} & \cdot\ \cdot & v_n \\ \sum_{i,s} u_i a_{is} c_{s1}, & \sum_{i,s} u_i a_{is} c_{s2} & \cdot\ \cdot & 0 \end{vmatrix}.$$

Zieht man die mit

$$\frac{1}{\rho}\sum u_i a_{i1},\ \frac{1}{\rho}\sum u_i a_{i2},\ \cdot\ \cdot\ \frac{1}{\rho}\sum u_i a_{in},$$

multiplicirten n ersten Horizontalreihen von der letzten ab, so ergiebt sich weiter

$$\psi\,(\rho) = -\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} a_{11} + \rho c_{11}, & a_{12} + \rho c_{12} & \cdot\ \cdot & v_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \sum_{i,h} u_i a_{ih} a_{h1}, & \sum_{i,h} u_i a_{ih} a_{h2} & \cdot\ \cdot & \sum u^i v_h a_{ih}. \end{vmatrix}$$

oder, wenn

$$\frac{1}{\rho} = \rho',\ \sum u_i a_{ih} a_{hk} = u'_k,$$

$$\psi\,(\rho) = -\sum u_i v_k \gamma_{ik},\ \psi\,(\rho') = -\sum u_i v_k \gamma'_{ik},$$

gesetzt wird

$$-\sum u_i v_k \gamma_{ik} = \rho^{n-2}\sum v'_i u'_k \gamma'_{ik} - \rho^{n-1}\,\omega\,(\rho')\sum u_i v_k a_{ik}, \tag{6}$$

welche Gleichung für alle Werthe der u, v besteht. Man erhält also durch Vergleichung der Coefficienten

$$-\gamma_{ik} = \rho^{n-2}\sum_{t,h} a_{ih} a_{ht} \gamma'_{kt} - a_{ik}\,\rho^{n-1}\,\omega\,(\rho'). \tag{7}$$

Betrachtet man an Stelle von $\psi\,(\rho)$ Formen, welche mehrere aus willkürlichen Größen gebildete Ränder enthalten, so ergiebt sich eine Reihe ähnlicher, zwischen den höheren Unterdeterminantensystemen von $\psi\,(\rho)$ und $\psi\,(\rho')$ bestehender Identitäten. Aus ihnen erhält man sofort diejenigen Sätze, welche Herr Frobenius über die Elementartheiler der characteristischen Gleichung des Problemes aufgestellt hat[1]).

1) a. a. O. S. 23—36.

Ich setze nun voraus, daß die Function $\omega(\rho)$ nicht für $\rho = +1$ verschwindet, und bezeichne den Werth derselben durch ω. (Aehnliche Betrachtungen gelten übrigens auch für $\rho = -1$). Alsdann hat man nach (7) für $\rho = 1$ zur Bestimmung der Größen γ_{ik} das System von linearen Gleichungen

$$-\gamma_{ik} = \sum_{\iota,\lambda} a_{\iota i}\, a_{\lambda k}\, \gamma_{\iota\lambda} - \omega\, a_{ik}. \tag{8}$$
$$i, k = 1, 2 \ldots n.$$

Diesen Gleichungen können mannigfache Formen gegeben werden. Man erhält z. B. durch Multiplication mit a_{ij} und Summation nach i

$$\sum_i \gamma_{ik}\, a_{ij} + \sum_i a_{ji}\gamma_{ki} - \omega\, \varepsilon_{kj} = 0, \tag{9}$$

oder, wenn

$$\gamma_{ik} = \frac{\omega}{2} a_{ik} + \sigma\, \delta_{ik} \text{ gesetzt wird,} \tag{10}$$

$$\sum_i a_{ij}\, \delta_{ik} + \sum_i' a_{ji}\, \delta_{ki} = 0\,^{1)}; \tag{11}$$

man kann das System 8) auch so anordnen

$$\sum_t (a_{st} + a_{ts})(\gamma_{kt} + \gamma_{tk}) + \sum_t (a_{st} - a_{ts})(\gamma_{kt} - \gamma_{tk}) = 2\,\omega\, \varepsilon_{sk},$$

wobei dann die Vereinfachungen unmittelbar hervortreten, welche bei dem von Herrn Frobenius behandelten Falle der bilinearen symmetrischen oder alternirenden Formen statthaben. Mit der Discussion des an und für sich interessanten Systems der Gleichungen (11), d. h. der Zahl der linear unabhängigen Parameter, welche außer der willkürlichen Größe ω in den γ auftreten, werde ich mich hier nicht beschäftigen. Dagegen werde ich zeigen, daß jedes System der γ_{ik}, welches die linearen Gleichungen 9) befriedigt, und dessen Determinante nicht

---

1) Herr Cayley hat, wie ich allerdings erst während des Druckes dieser Note bemerkt habe, bereits 1858 (On the automorphic transformation of a bipartite quadric Function, Phil. Transact. 148, S. 39—46) mittelst der Hermite'schen Methode Formeln angegeben, welche eine bilineare Form mit Hülfe von zwei zunächst verschiedenen Substitutionen in sich transformiren. Die Forderung, daß beide Substitutionen identisch werden, führt dann ebenfalls zu der von Herrn Frobenius entwickelten Lösung, falls es sich um eine symmetrische oder alternirende Form handelt. Dagegen hat Herr Cayley unterlassen, bei der Formel für den allgemeinen Fall (S. 45) die Bedingung hinzuzufügen, daß die Matrix Y_0 eine symmetrische werden muß. Erst unter dieser Bedingung, welche auf eine Reihe linearer Gleichungen zwischen den Elementen einer schiefen Determinante führt, die den Bedingungen 11) dieser Note äquivalent sind, liefert diese Cayley'sche Formel Transformationen der im § 1 behandelten Classe.

verschwindet[1]), Werthe der Substitutionscoefficienten c_{ik} liefert, welche F in seine beigeordnete Form eigentlich transformiren.

Setzt man

$$\sum_i p_{is} \gamma_{ik} = \omega \varepsilon_{sk}, \tag{12}$$

und bezeichnet die Determinante der γ_{ik} durch Γ, ihre ersten Unterdeterminanten durch Γ_{is}, so wird

$$\Gamma p_{js} = \omega \Gamma_{js}, \tag{12)a}$$

also auch

$$\sum p_{js} \gamma_{ks} = \omega \varepsilon_{jk}. \tag{13}$$

Setzt man daher

$$p_{ik} = c_{ik} + a_{ik}, \tag{13)a}$$

so wird

$$\sum_i \gamma_{ik} (a_{is} + c_{is}) = \omega \varepsilon_{ks}, \tag{12}$$

$$\sum_i \gamma_{ki} (a_{si} + c_{si}) = \omega \varepsilon_{ks}. \tag{13)b}$$

Wird weiter

$$\sum_{i,k} a_{ik} c_{is} c_{k\tau} = X_{s\tau}$$

gesetzt, so findet man durch successive Anwendung von (13)b, (9), (12)b, (9),

$$\sum_\tau X_{s\tau} \gamma_{\varrho\tau} = \sum_\tau a_{s\tau} \gamma_{\varrho\tau};\ s,\ \rho = 1,\ 2\ \ldots\ n;$$

d. h. in Rücksicht auf die oben bemerkte Eigenschaft der Determinante Γ

$$X_{s\tau} = a_{s\tau},$$

wie zu zeigen war[2]).

Zugleich hat man nach 12)a, 13)a,

$$c_{ik} + a_{ik} = \omega \frac{\Gamma_{ik}}{\Gamma},$$

$$\Gamma = \left| \frac{\omega}{2} a_{ik} + \sigma \delta_{ik} \right|;$$

oder für

$$\frac{\omega}{2\sigma} = \theta,$$

1) Daß solche Lösungen immer existiren, erkennt man aus (10), da für hinreichend große Werthe von ω die Determinante der γ gleich $\left(\frac{\omega}{2}\right)^n$ wird.

2) Daß auch die Determinante der c_{ik} den Werth $+1$ hat, erkennt man unmittelbar durch Multiplication derselben mit Γ nach 9).

$$\sum c_{ik} u_i v_k = -2\theta \frac{\begin{vmatrix} \theta a_{ik} + \delta_{ik} & u_i \\ v_k & 0 \end{vmatrix}}{|\theta a_{ik} + \delta_{ik}|} - \sum a_{ik} u_i v_k,$$

womit alle Coefficienten in vollständiger Analogie mit den bekannten Cayley'schen Formeln für orthogonale Substitutionen dargestellt sind[1]). Um auch die singulären Systeme der Substitutionscoefficienten zu erhalten, für welche beide Determinanten $\omega(+1)$, $\omega(-1)$ verschwinden, kann man unter anderem sich ähnlicher Grenzbetrachtungen bedienen, wie sie bereits Herr Frobenius benutzt hat.

§ 2.

Indem ich die weitere Verfolgung der hierher gehörigen Fragen einer demnächst in den Mathematischen Annalen erscheinenden Arbeit vorbehalte, will ich nur noch ein Theorem hervorheben, welches in erweiterter Gestalt für alle im vorigen § behandelten Substitutionen gilt, einen besonders allgemeinen Character aber für orthogonale Substitutionen annimmt, deren im allgemeinen complexe Coefficienten nunmehr durch c_{ik} bezeichnet sein mögen.

Im 6. Bande der Acta Mathematica hat Herr Stieltjes[2]) das folgende Theorem ausgesprochen:

Sind a_{ik}, b_{ik} die Coefficienten zweier orthogonaler Substitutionen von der Determinante $+1$, so kann die Determinante

$$|a_{ik} + b_{ik}|$$

nur dann verschwinden, wenn zugleich alle ihre ersten Unterdeterminanten Null sind. Im 9. Bande der Acta hat Herr Netto[3]) eine Untersuchung dieses Satzes gegeben. Aber der Umstand, daß bei dem Beweise desselben zunächst die Cayley'schen Formeln für die Substitutionscoefficienten vorausgesetzt werden, hat denselben zu der Ansicht geführt, daß das

1) Orthogonale Substitutionen im weiteren Sinne sind daher alle diejenigen, welche eine Form in ihre beigeordnete transformiren.

2) Sur un théorème d'algèbre, Act. Mat. VI, S. 319.

Herr S. der zu dem angeführten Satze durch Verallgemeinerung einer kinematischen Betrachtung gelangt war, hatte, wie ich einer gütigen Mittheilung desselben entnehme, Herrn Hermite 1884 einen Beweis für gerades n mitgetheilt, der auf der Verwendung schiefer Determinanten beruht, worauf ich (Math. Annalen XIII, S. 332) ebenfalls hingewiesen hatte. Ein specieller Fall findet sich auch in Herrn Stickelberger's Schrift Ueber reelle orthogonale Substitutionen, Züricher Programmschrift von 1877.

3) Ueber orthogonale Substitutionen, Act. Mat. IX. S. 291.

in Rede stehende Theorem nicht allgemein richtig sei. Als mir (3. Nov. 1886) die Stieltjes'sche Note zufällig bekannt wurde, habe ich Herrn S. sofort mitgetheilt, daß ein allgemeiner und ausnahmslos gültiger Beweis des Satzes, der überdies noch erhebliche Erweiterungen gestatte, aus den Untersuchungen über orthogonale Substitutionen sich ergebe, welche ich in meiner Arbeit (Math. Annalen XIII) angedeutet habe. Das folgende bildet lediglich eine Erweiterung der dort ausgeführten Betrachtungen.

Sind die c_{ki} Coefficienten einer orthogonalen Substitution der Determinante $+1$ [1]) der Art, daß

$$\sum_i c_{ki} c_{ji} = \varepsilon_{kj}$$

und bezeichnet man durch

$$\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n,$$

beliebige Zahlen, durch $u, v, w \ldots U, V, W \ldots . \; 2k$ Systeme völlig willkürlicher Größenreihen, so besteht die Identität

$$\psi(\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_n) = \begin{vmatrix} c_{11}+\rho_1 & c_{12} & \ldots & u_1 & v_1 & w_1 & \ldots \\ c_{21} & c_{22}+\rho_2 & \ldots & u_2 & v_2 & w_2 & \ldots \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\ U_1 & U_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ V_1 & V_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ W_1 & W_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \end{vmatrix} \tag{1}$$

$$= (-1)^k (\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_n) \begin{vmatrix} c_{11}+\rho_1' & c_{21} & \ldots & u_1' & v_1' & w_1' & \ldots \\ c_{12} & c_{22}+\rho_2' & \ldots & u_2' & v_2' & w_2' & \ldots \\ \cdot & & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\ \cdot & & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\ U_1' & U_2' & \ldots & (Uu') & (Uv') & (Uw') & \ldots \\ V_1' & V_2' & \ldots & (Vu') & (Vv') & (Vw') & \ldots \\ W_1' & W_2' & \ldots & (Wu') & (Wv') & (Ww') & \ldots \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \end{vmatrix}$$

falls zur Abkürzung

$$\rho_i' = \frac{1}{\rho_i},$$

1) Der Kürze halber beschränke ich mich wieder auf eigentliche Substitutionen.

$$\frac{u_1}{\rho_1} = u'_1, \quad \frac{v_1}{\rho_1} = v'_1, \; \ldots;$$
$$\frac{u_2}{\rho_2} = u'_2, \quad \frac{v_2}{\rho_2} = v'_2, \; \ldots;$$
$$\frac{U_1}{\rho_1} = U^1_2, \quad \frac{V_1}{\rho_1} = V'_1 \; \ldots;$$
$$\frac{U_2}{\rho_2} = U'_1, \quad \frac{V_2}{\rho_2} = V'_2, \; \ldots;$$
$$(Uu') = \sum U_i u'_i, \; (Uv') = \sum U_i v'_i, \; \ldots;$$
$$(Vu') = \sum V_i u'_i, \; (Vv') = \sum V_i v'_i, \; \ldots;$$

gesetzt wird.

Wird nun angenommen, daß die ρ_i gleich der positiven oder negativen Einheit gewählt sind[1]), und daß die $k-1$ten Unterdeterminanten der Determinante

$$(2) \qquad | c_{ik} + \rho_i \varepsilon_{ik} |$$

noch sämmtlich verschwinden, so folgt aus (1)

$$(3) \quad \begin{vmatrix} c_{11}+\rho_1 & \ldots & u_1 v_1 w_1 & \ldots \\ \cdot & \ldots & \ldots & \ldots \\ U_1 & \ldots & 0\,0\,0 & \ldots \\ V_1 & \ldots & 0\,0\,0 & \ldots \\ W_1 & \ldots & 0\,0\,0 & \ldots \\ \cdot & \ldots & \ldots & \ldots \\ \cdot & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = (-1)^k \rho_1 \ldots \rho_n \begin{vmatrix} c_{11}+\rho'_1 & \ldots & u'_1\, v'_1\, w'_1 & \ldots \\ \cdot & \ldots & \ldots & \ldots \\ U'_1 & \ldots & 0\,0\,0 & \ldots \\ V'_1 & \ldots & 0\,0\,0 & \ldots \\ W'_1 & \ldots & 0\,0\,0 & \ldots \\ \cdot & \ldots & \ldots & \ldots \\ \cdot & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

wobei rechter Hand die transponirten Coefficienten c_{ik} stehen. Die Gleichung (3) liefert unmittelbar den Satz:

Verschwinden die sämmtlichen $k-1$ten Unterdeterminanten der characteristischen Determinante (2) der Substitution, so bilden die $k$ten Unterdeterminanten ein „parasymmetrisches" System, d.h. die Werthe transponirter Unterdeterminanten sind entweder gleich oder entgegengesetzt gleich. Ist insbesondere Δ_k eine $k$te Hauptunterdeterminante, so ist

$$\Delta_k = (-1)^k (\rho_1 \ldots \rho_n)\, \Delta_k,$$

1) Dieses Princip der Vertauschung der Vorzeichen in der characteristischen Determinante, welches auch Herr Netto erwähnt (a. a. O.), habe ich bereits 1879 in einem damals Herrn Klein mitgetheilten Manuscripte benutzt, in welchem ich mir die Aufgabe gestellt hatte, für alle Classen orthogonaler Substitutionen explicite Ausdrücke in Parameterform herzustellen. Inzwischen hat Herr Lipschitz in seinen wichtigen Untersuchungen über die Summen von Quadraten, Bonn 1886 von demselben in ähnlicher Richtung umfassenden Gebrauch gemacht.

d. h. es verschwinden alle $k$ten Hauptunterdeterminanten, sobald

$$(-1)^k(\rho_1 \ldots \rho_n) = -1,$$

ist.

Aus dem von Herrn Frobenius (Journal von Crelle Bd. 82, S. 241) angegebenen Determinantensatze erkennt man aber leicht: Wenn sämmtliche $k-1$ten Unterdeterminanten verschwinden und die $k$ten Unterdeterminanten ein parasymmetrisches System bilden, so verschwinden auch alle $k$ten Unterdeterminanten, sobald nur die sämmtlichen $k$ten Hauptunterdeterminanten Null sind.

Hieraus folgt:

Wenn alle $k-1$ten Unterdeterminanten der charakteristischen Determinante 2) verschwinden, die $k$ten aber nicht sämmtlich Null sind, so ist

$$(-1)^k(\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_n) = +1,$$

und die $k$ten Unterdeterminanten bilden ein parasymmetrisches System, in welchem auch nicht verschwindende Hauptunterdeterminanten vorhanden sind.

Der soeben angeführte Satz kommt zur Anwendung für die Unterdeterminanten der Determinante

$$| a_{ik} + \rho_i b_{ik} |$$

sobald a_{ik}, b_{ik} die Coefficienten von zwei orthogonalen Substitutionen (der Determinante $+1$) sind. Denn letztere geht durch Multiplication mit der Determinante der b_{ik} unmittelbar in 2) über, wenn man

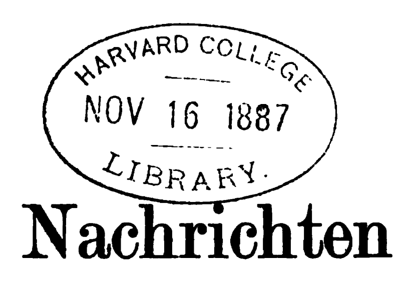
$$c_{ik} = \sum_m a_{im} b_{km}$$

setzt. Nimmt man sämmtliche ρ_i gleich $+1$, so folgt für jedes n insbesondere $k = 2m$, $m \geqq 1$, was der verallgemeinerte Stieltjes'sche Satz ist, den man übrigens in seinem einfachsten Falle unmittelbar aus einem bekannten Determinantensatze herleitet (vgl. Math. Annalen XIII, S. 330).

München, Ende Juni 1887.

Inhalt von Nr. 14.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner



Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg - Augusts - Universität

zu Göttingen.

7. September. № 15. 1887.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber eine besondere Art von homogenen Deformationen krystallisirter Körper.

Von

Th. Liebisch.

(Hierzu eine Tafel.)

Die von Fr. Pfaff, E. Reusch, H. Baumhauer und O. Mügge angegebenen Methoden zur mechanischen Erzeugung von Krystallzwillingen aus einfachen Krystallen haben eine eigenthümliche Art von homogenen Deformationen krystallisirter Körper kennen gelehrt, deren nähere Untersuchung den Gegenstand dieser Mittheilung bildet.

Die krystallisirten Substanzen, an denen die mechanische Bildung von Zwillingen nach Gleitflächen mit Sicherheit nachgewiesen wurde — Kalkspath, Eisenglanz und Korund, Antimon und Wismuth, Anhydrit, Diopsid — sind dadurch charakterisirt, daß die Zwillingsebene auf einer krystallographischen Symmetrieebene senkrecht steht und gleichzeitig einer Symmetrieaxe parallel läuft. Diese Eigenschaft gestattet die Natur der homogenen Deformationen, welche in den genannten Substanzen durch mechanische Einwirkungen in Folge des Vorhandenseins von Gleitflächen hervorgerufen werden können, vollständig zu bestimmen.

Um die Vorstellungen zu fixiren betrachte ich zunächst die Zwillinge des Kalkspath nach $-\frac{1}{2}R$, an welchen die in Rede stehenden Erscheinungen aufgefunden wurden. Die Flächen des Spaltungsrhomboëders R seien, bezogen auf das Weiss'sche Axensysem,

$$r = 0\bar{1}\bar{1}1, \quad r_1 = 1101, \quad r_2 = \bar{1}011,$$
$$\bar{r} = 011\bar{1}, \quad \bar{r}_1 = \bar{1}\bar{1}0\bar{1}, \quad \bar{r}_2 = 10\bar{1}\bar{1}.$$

Die Endecken seien bezeichnet mit A, A', die Mittelecken mit B, B_1, B_2, B', B'_1, B'_2. Die zur Deformation benutzte Gleitfläche z gehöre der Zone $[r_1, r_2]$ an, so daß $z = 0112$; es ist dies in Fig. 1 die Richtung der Verbindungsebene von B_1, B_2, B'_1 B'_2.

In Folge der Deformation geht das Rhomboëder R in das durch Fig. 2 dargestellte Rhomboëder $\underline{R}$, das Spiegelbild von R in Bezug auf z, über; die Flächen desselben laufen den Spaltrichtungen des deformirten Krystalls parallel, allein in ihrem Verhalten während der Deformation findet ein wesentlicher Unterschied statt: in den zu r parallelen Richtungen tritt ebensowenig wie in den zur Gleitfläche parallelen Ebenen eine Verzerrung ein; dagegen erleiden die zu r_1 und r_2 parallelen Ebenen eine Verzerrung, indem die zu den Rhomboëderkanten parallelen Geraden dieser Ebenen, welche vor der Deformation einen stumpfen Winkel von 109° 8′ 12″ bilden, nach der Deformation einen spitzen Winkel von 70° 51′ 48″ einschließen, und umgekehrt.

Die Mittelecken B, B' sind in Endecken, die Endecken A, A' in Mittelecken umgewandelt; nur B_1, B'_1 und B_2, B'_2 sind Mittelecken geblieben. Von den vier Symmetrieaxen hat nur die zur Gleitfläche parallele zweizählige Axe α_1 ihre Bedeutung bewahrt und von den drei Symmetrieebenen ist nur die zur Gleitfläche senkrecht stehende, die Ebene $A\,B\,A'\,B'$ in Fig. 1, erhalten; aber auch in dieser Ebene hat eine Verzerrung stattgefunden.

Eine so beschaffene Deformation glaubte O. Mügge anfänglich [1]) in der Weise charakterisiren zu können, daß er eine „Grundform" zu ermitteln suchte, einen Complex von Krystallflächen, welche die Eigenschaft haben in Bezug auf die krystallographischen Axensysteme des ursprünglichen und des deformirten Krystalls dieselben Indices zu besitzen. Später [2]) gelangte er dazu eine „Grundzone"

1) O. **Mügge**: Zur Kenntniß der durch secundäre Zwillingsbildung bewirkten Flächen-Verschiebungen. Jahrb. Min. 1885, II, 45.

2) O. **Mügge**: Zur Kenntniß der Flächenveränderungen durch secundäre Zwillingsbildung. II. Jahrb. Min. 1886, I, 138.

zu bestimmen, deren Flächen dieselbe Eigenschaft zeigen. Seine Betrachtungen waren aber nicht geeignet, den Charakter der Deformation hervortreten zu lassen, da zwei durchaus verschiedene Arten von Flächenrichtungen, jene, in denen keine Verzerrung stattfindet, und andere, in denen die Deformation eine Verzerrung bewirkt, in der Grundform und der Grundzone vereinigt blieben.

I.

Wie die Beobachtung lehrt, beruht die charakteristische Eigenschaft der in Rede stehenden Deformationen darin, daß die zur Gleitfläche z_1 parallelen Ebenen Wege zurücklegen, welche ihren Abständen von der Gleitfläche proportional sind.

Es handelt sich also um diejenige Art homogener Deformationen, welche von W. Thomson und P. G. Tait eine einfache Schiebung genannt wird[1]. Die Richtung der Verschiebung der Theilchen ist durch die Schnittgerade der Gleitfläche und der zu ihr senkrechten Symmetrieebene, der Ebene der Schiebung, gegeben.

In Fig. 3 bedeute z_1 die Gleitfläche. Durch die Schiebung gelange A nach $\underline{A}$. Trifft die im Mittelpunkt E der Strecke $A\underline{A}$ errichtete Senkrechte die Gleitfläche in D, so wird die Gerade AD durch die Schiebung in die Gerade $\underline{A}D$ übergeführt, und die zu AD parallelen, auf der Ebene der Schiebung senkrechten Ebenen z_2 haben mit den zur Gleitfläche parallelen Ebenen die Eigenschaft gemein, daß die Deformation in ihnen keine Verzerrung hervorruft. Es giebt also zwei und nur zwei Scharen paralleler Ebenen z_1 und z_2, welche von Verzerrungen frei bleiben.

Durch eine homogene Deformation wird eine Kugel, deren Radius die Längeneinheit sei, im Allgemeinen in ein dreiaxiges Ellipsoid übergeführt. Die Richtungen der beiden Kreisschnittebenen dieses Deformationsellipsoids sind es, in denen keine Verzerrung erfolgt. Ihre Schnittgerade, die mittlere Hauptaxe X_2 des Ellipsoids, ist also in dem vorliegenden Falle gegeben durch die Richtung der zur Gleitfläche parallelen Symmetrieaxe. Die beiden anderen Hauptaxen X_1, X_3 liegen in der Ebene der Schie-

1) W. Thomson and P. G. Tait: Treatise on Natural Philosophy. New ed., Cambridge 1879. Vol. I (1), p. 123 (simple shear). — Handbuch der theoretischen Physik. Braunschweig 1871. Bd. I (1), S. 118.

bung und halbiren die von den Ebenen s_1 und s_2 gebildeten Winkel.

Man findet demnach, wenn die beiden Kreisschnittebenen bekannt sind, die Richtungen von X_1 und X_3 vor der Deformation, indem man in der Ebene der Schiebung die Diagonalen AC und BD des über AD construirten Rhombus $ABCD$ zieht, dessen Seiten parallel s_1 und s_2 sind.

Durch die Schiebung geht $ABCD$ über in $\underline{ABCD}$ derart, daß $(ADC) = (\underline{BCD})$ und $(BCD) = (\underline{ADC})$ ist; die Richtungen der Hauptaxen $\underline{X}_1$ und X_3 nach der Deformation sind also gegeben durch die Diagonalen $\underline{AC}$ und $\underline{BD}$. (Vgl. Fig. 4.)

Bezeichnet man bei einer homogenen Deformation mit μ_1, μ_2, μ_3 $(\mu_1 > \mu_2 > \mu_3)$ die Verhältnisse, in denen sich die Längen der den Hauptaxen X_1, X_2, X_3 parallelen Geraden ändern, so ist das Verhältniß, in welchem das Volumen des Körpers geändert wird, gleich dem Product $\mu_1 \mu_2 \mu_3$. In unserem Falle wird keine Volumenänderung und außerdem in der Richtung der mittleren Hauptaxe X_2 keine Längenänderung bewirkt; demnach ist

$$1)\quad \mu_1 \mu_2 \mu_3 = 1$$
$$2)\quad \mu_2 = 1,$$

folglich $\mu_1 = 1/\mu_3$. Wir führen die neue Bezeichnung $\mu_1 = \sigma$ ein $(\sigma > 1)$, so daß $\mu_3 = 1/\sigma$ ist; σ wird das Verhältniß der Schiebung, $\sigma - 1/\sigma$ die Größe der Schiebung genannt[1]). In der Richtung der Hauptaxe X_1 findet die größte Elongation, im Betrage $\sigma - 1$, statt und in der Richtung von X_3 die größte Contraction, deren Werth $1 - 1/\sigma$ ist.

Wir bezeichnen den von X_3 halbirten Winkel der Kreisschnittebenen vor der Deformation mit $(s_1 s_2) = 2k$, nach der Deformation mit $(\underline{s}_1 \underline{s}_2) = 2\underline{k}$. Dann ergiebt sich aus den bekannten allgemeinen Relationen

$$\tan k = \sqrt{\frac{\mu_2^2 - \mu_3^2}{\mu_1^2 - \mu_3^2}},$$

$$\tan \underline{k} = \frac{\mu_1}{\mu_3} \tan k,$$

für den Fall einer einfachen Schiebung

---

1) W. Thomson und P. G. Tait, a. a. O.

$$3)\ \tan k = \frac{1}{\mathfrak{S}},$$

$$4)\ \tan \underline{k} = \cot k,$$

also $k + \underline{k} = 90^\circ$; die Kreisschnittebenen sind vor der Deformation unter denselben Winkeln gegen die Hauptaxen X_1, X_3 geneigt, welche nach der Deformation ihre Normalen mit diesen Axen bilden.

Nach 3) berechnet man das Verhältniß der Schiebung aus dem Winkel k. Für die Zwillinge des Kalkspath nach $-\frac{1}{2}R$, bei denen die auf S. 436 mit s und r bezeichneten Flächen die Richtungen der Kreisschnittebenen sind, ergiebt sich aus

$$(sr) = 2k = 70^\circ 51' 48''$$
$$k = 35\ 25\ 54$$

der Werth

$$\mathfrak{S} = 1{,}40549.$$

Die Größe der Schiebung ist

$$\mathfrak{S} - \frac{1}{\mathfrak{S}} = 0{,}693395.$$

Da die krystallographische Hauptaxe γ gegen r unter $45^\circ 23' 26''$ und gegen s unter $63^\circ 44' 46''$ geneigt ist, so betragen die Winkel

$$(\gamma X_1) = 9^\circ 10' 40''$$
$$(\gamma X_3) = 80\ 49\ 20.$$

Die Schiebung bewirkt eine Drehung der Hauptaxen um

$$\delta = \underline{k} - k = 19^\circ 8' 12''.$$

II.

Nach der Deformation besitzt der Krystall dieselben Symmetrieeigenschaften wie in dem anfänglichen Zustande. Im Allgemeinen bleiben aber nur die zur Gleitfläche s_1 senkrechte Symmetrieebene $X_1 X_3$ und die zu ihr parallele Symmetrieaxe X_2 erhalten. Sind in dem Krystall außer diesen noch andere Symmetrieelemente vorhanden, so liegen die dem deformirten Zustande angehörenden symmetrisch zu den ursprünglichen in Bezug auf die Gleitfläche. Dieselbe Lage hat das krystallographische Axensystem des deformirten Krystalls zu dem Axensystem des ursprünglichen Krystalls.

Wir bezeichnen die Axen vor der Deformation mit

$$\pi_1 = [100], \pi_2 = [010], \pi_3 = [001].$$

X_2 falle zusammen mit π_2; alsdann sind π_1 und π_3 im Allgemeinen irgend zwei, in der Symmetrieebene $X_1 X_3$ gelegene Kantenrichtungen. Nach der Deformation liegen die Axen $\underline{\pi}_1$ und $\underline{\pi}_3$ symmetrisch zu π_1 und π_3 in Bezug auf z_1, also ihre negativen Richtungen $\underline{\pi}_1$ und $\underline{\pi}_3$ symmetrisch zu π_1 und π_3 in Bezug auf die Normale ζ_1 von z_1 [in Fig. 5 sind π_3 und $-\underline{\pi}_1$ zu vertauschen]. Behält man die ursprüngliche Reihenfolge der positiven Axenrichtungen bei, so fällt $\underline{\pi}_2$ mit π_2 zusammen.

Durch die Deformation wird die krystallographische Bedeutung der den Krystall begrenzenden Flächen und Kanten im Allgemeinen geändert. Sind die Indices einer Fläche h vor der Deformation gegeben, $h = \{h_1 h_2 h_3\}$, so fragen wir nach den Werthen, welche die Indices jener Fläche in Folge der Deformation annehmen.

Zur Lösung dieser Aufgabe ist die Kenntniß der Ebenen z_1, z_2, in denen keine Verzerrung eintritt, erforderlich und ausreichend. In der That, bestimmt man die Richtung von h durch ihre Schnittgeraden ξ_1, ξ_2 mit diesen Ebenen, so werden $z_1, z_2, h, \xi_1, \xi_2$ durch die Deformation übergeführt in $\underline{z}_1, \underline{z}_2, \underline{h}, \underline{\xi}_1\, \underline{\xi}_2$, derart, daß die Winkel, welche die Geraden ξ_1, ξ_2 in den Ebenen z_1, z_2 mit der Symmetrieebene $X_1 X_3$ einschließen, ungeändert bleiben. Bezeichnet man die Schnittgeraden von z_1 und z_2 mit der Ebene $X_1 X_3$ durch $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$, so ist hiernach:

$$(\xi_1 \varkappa_1) = (\underline{\xi}_1 \underline{\varkappa}_1), \quad (\xi_2 \varkappa_2) = (\underline{\xi}_2 \underline{\varkappa}_2).$$

Die Fläche $\underline{h}$ ist also in ihrer neuen Lage als Verbindungsebene der bekannten Geraden $\underline{\xi}_1$, $\underline{\xi}_2$ gegeben (vgl. Fig. 5).

Die Indices der Kreisschnittebenen seien

$$z_1 = \{z_{11}\, 0\, z_{13}\}, \quad z_2 = \{z_{21}\, 0\, z_{23}\};$$

dann sind die Indices der Geraden ξ_1 und ξ_2:

$$1. \quad \left| \begin{array}{l} \xi_{11} : \xi_{12} : \xi_{13} = -z_{13} h_2 : z_{13} h_1 - z_{11} h_3 : z_{11} h_2, \\ \xi_{21} : \xi_{22} : \xi_{23} = -z_{23} h_2 : z_{23} h_1 - z_{21} h_3 : z_{21} h_2. \end{array} \right.$$

Während der Deformation bleibt die Richtung von ξ_1 in der Ebene z_1 ungeändert; allein gegen das Axensystem $\underline{\pi}_1, \underline{\pi}_2, \underline{\pi}_3$ hat $\underline{\xi}_1$ die Lage, welche vor der Deformation die zu ξ_1 in Bezug auf die Axe $\pi_2 = [010]$ symmetrische Gerade gegen das Axensystem π_1,

π_2, π_3 hatte. Demnach ergeben sich die Indices von $\underline{\xi}_1$ aus der Bedingung:

$$\xi_{11}+\underline{\xi}_{11} : \xi_{12}+\underline{\xi}_{12} : \xi_{13}+\underline{\xi}_{13} = 0:1:0$$

oder:

$$2. \mid \underline{\xi}_{11}:\underline{\xi}_{12}:\underline{\xi}_{13} = -\xi_{11}:\xi_{12}:-\xi_{13}.$$

Dagegen ist die Richtung von $\underline{\xi}_2$ gegen $\underline{\pi}_1$, $\underline{\pi}_2$, $\underline{\pi}_3$ dieselbe, welche ξ_2 gegen π_1, π_2, π_3 besaß; folglich:

$$3. \mid \underline{\xi}_{21}:\underline{\xi}_{22}:\underline{\xi}_{23} = \xi_{21}:\xi_{22}:\xi_{23}.$$

Wir erhalten also für die Indices der Verbindungsebene $\underline{h}$ der Geraden $\underline{\xi}_1$ und $\underline{\xi}_2$:

$$\underline{h}_1:\underline{h}_2:\underline{h}_3 = (\underline{\xi}_1\underline{\xi}_2)_1 : (\underline{\xi}_1\underline{\xi}_2)_2 : (\underline{\xi}_1\underline{\xi}_2)_3$$

aus 2., 3. und 1. die Werthe:

$$\text{I.}\quad \left| \begin{array}{l} \rho\underline{h}_1 = (z_{11}z_{23}+z_{13}z_{21})h_1 - 2z_{11}z_{21}h_3 \\ \rho\underline{h}_2 = (z_{11}z_{23}-z_{13}z_{21})h_2 \\ \rho\underline{h}_3 = 2z_{13}z_{23}h_1 - (z_{11}z_{23}+z_{13}z_{21})h_3, \end{array} \right.$$

worin ρ einen Proportionalitätsfactor bedeutet.

Da die Axenebene $\{\pi_1, \pi_3\}$ Symmetrieebene und die Axe π_2 Symmetrieaxe von der Periode 2 ist, so sind vier Flächen mit den Indices

$$h_1 h_2 h_3,\ h_1 \bar{h}_2 h_3,\ \bar{h}_1 \bar{h}_2 \bar{h}_3,\ \bar{h}_1 h_2 \bar{h}_3,$$

welche ein vierseitiges Prisma bilden, dessen Kanten der Symmetrieebene parallel gehen, gleichberechtigt, d. h. sie gehören derselben einfachen Krystallform an. Aus I folgt, daß die Indices dieser Flächen nach der Deformation die Werthe haben:

$$\underline{h}_1 \underline{h}_2 \underline{h}_3,\ \underline{h}_1 \underline{\bar{h}}_2 \underline{h}_3,\ \underline{\bar{h}}_1 \underline{\bar{h}}_2 \underline{\bar{h}}_3,\ \underline{\bar{h}}_1 \underline{h}_2 \underline{\bar{h}}_3;$$

demnach bleiben vier Flächen von der angegebenen Beschaffenheit auch im deformirten Zustande gleichberechtigt; ihre krystallographische Bedeutung ist aber im Allgemeinen geändert worden.

Krystallflächen, welche durch die Deformation keine Aenderung der Werthe und der Vorzeichen ihrer Indices erfahren, müssen die aus I fließenden Bedingungen befriedigen:

$$h_1 : h_2 : h_3 =$$

$$(z_{11}z_{23}+z_{13}z_{21})h_1 - 2z_{11}z_{21}h_3 : (z_{11}z_{23}-z_{13}z_{21})h_2 : 2z_{13}z_{23}h_1 \\ - (z_{11}z_{23}+z_{13}z_{21})h_3$$

d. h. die Indices h_1, h_2, h_3 müssen gleichzeitig den beiden Gleichungen:

$$4. \left| \begin{array}{r} h_2\ (z_{13} h_1 - z_{11} h_3) = 0 \\ (z_{23} h_1 - z_{21} h_3)(z_{13} h_1 - z_{11} h_3) = 0 \end{array} \right.$$

genügen. Dieser Fall tritt ein:

a) wenn h_2 einen beliebigen Werth hat und $h_1 : h_3 = z_{11} : z_{13}$ ist; die Flächen, welche diese Bedingungen erfüllen, gehören der durch die Gleitfläche z_1 und die zu ihr senkrechte Symmetrieebene bestimmten Zone an;

b) wenn $h_2 = 0$ und $h_1 : h_3 = z_{21} : z_{23}$ ist; dieser Forderung genügt nur die Kreisschnittebene z_2.

Ferner ergeben sich aus I für jene Krystallflächen, deren Indices sich vor und nach der Deformation nicht in ihren absoluten Werthen, sondern nur in dem Vorzeichen des mittleren Index unterscheiden, so daß:

$$\underline{h}_1 : \underline{h}_2 : \underline{h}_3 = h_1 : -h_2 : h_3$$

ist, die Bedingungen:

$$5. \left| \begin{array}{r} h_2\ (z_{23} h_1 - z_{21} h_3) = 0 \\ (z_{13} h_1 - z_{11} h_3)(z_{23} h_1 - z_{21} h_3) = 0. \end{array} \right.$$

Dieser Fall tritt demnach ein,

a) wenn h_2 beliebig und $h_1 : h_3 = z_{21} : z_{23}$ ist, d. h. für die Flächen, welche der durch die Kreisschnittebene z_2 und die zu ihr senkrechte Symmetrieebene bestimmten Zone angehören;

b) wenn $h_2 = 0$ und $h_1 : h_3 = z_{11} : z_{13}$ ist; dieser Forderung genügt nur die Gleitfläche z_1.

Berücksichtigt man nun, daß vier Flächen mit den Indices $h_1 h_2 h_3$, $h_1 \bar{h}_2 h_3$, $\bar{h}_1 \bar{h}_2 \bar{h}_3$, $\bar{h}_1 h_2 \bar{h}_3$ gleichberechtigt sind, so kann man folgenden Satz aussprechen: bezeichnend für die in Rede stehenden homogenen Deformationen sind außer den beiden ausgezeichneten Richtungen von Ebenen, in denen keine Verzerrung erfolgt, zwei ausgezeichnete Zonen, von der Beschaffenheit, daß jede ihrer Flächen durch die Deformation in eine gleichberechtigte Fläche übergeführt wird, nämlich in eine Fläche derselben einfachen Krystallform, der sie im ursprünglichen Zustande des Krystalls angehörte; diese Zonen sind bestimmt durch jene beiden Ebenen und die zu ihnen senkrechte Symmetrieebene; alle übrigen

Krystallflächen ändern in Folge der Deformation ihre krystallographische Bedeutung.

Die Auflösung der Gleichungen I ergiebt:

$$\text{II.}\quad \left| \begin{aligned} \rho h_1 &= (z_{11} z_{23} + z_{13} z_{21}) \underline{h}_1 - 2 z_{11} z_{21} \underline{h}_3 \\ \rho h_2 &= (z_{11} z_{23} - z_{13} z_{21}) \underline{h}_2 \\ \rho h_3 &= 2 z_{13} z_{23} \underline{h}_1 - (z_{11} z_{23} - z_{13} z_{21}) \underline{h}_3 \end{aligned} \right.$$

d. h. erhält eine Fläche, welche im ursprünglichen Zustande des Krystalls die Indices $h_1 : h_2 : h_3$ hatte, das Symbol $\underline{h}_1 : \underline{h}_2 : \underline{h}_3$, so wird eine Fläche, welche anfänglich die Indices $\underline{h}_1 : \underline{h}_2 : \underline{h}_3$ besaß, nach der Deformation das Symbol $h_1 : h_2 : h_3$ führen.

Bezeichnet man der Kürze wegen

$$z_{11} : z_{13} : = z_1, \; z_{21} : z_{23} = z_2, \; h_1 : h_3 = h, \; \underline{h}_1 : \underline{h}_3 = h,$$

so folgt aus der ersten und der dritten Gleichung I:

$$6. \; | \; 2 z_1 z_2 - (z_1 + z_2)(h + \underline{h}) + 2 h \underline{h} = 0.$$

Mit Hülfe dieser Relation kann man das Verhältniß der Indices einer der beiden Kreisschnittebenen berechnen, wenn das Symbol der anderen Kreisschnittebene und außerdem die Symbole einer beliebigen Fläche h vor und nach der Deformation bekannt sind. Die Verhältnisse der Indices der beiden Kreisschnittebenen findet man aus zwei Gleichungen von der Form 6., wenn die Symbole zweier Flächen h und h^1 vor und nach der Deformation gegeben sind.

Mit den vorausgesetzten Symmetrieeigenschaften ist noch ein zweites krystallographisches Axensystem vereinbar, in welchem π_3 sich in der zur Gleitfläche senkrechten Symmetrieebene befindet, während π_1 und π_2 zu dieser Ebene symmetrisch liegen. Wir erhalten unter dieser Annahme folgende Symbole:

$$\{X_1 X_3\} = \{1\bar{1}0\}, \; X_2 = [1\bar{1}0],$$
$$z_1 = \{z_{11} \, z_{11} \, z_{13}\}, \; z_2 = \{z_{21} \, z_{21} \, z_{23}\},$$

und daraus:

$$1^*. \quad \left| \begin{aligned} \xi_{11} : \xi_{12} : \xi_{13} &= z_{13} h_2 - z_{11} h_3 : z_{11} h_3 - z_{13} h_1 : z_{11} (h_1 - h_2), \\ \xi_{21} : \xi_{22} : \xi_{23} &= z_{23} h_2 - z_{21} h_3 : z_{21} h_3 - z_{23} h_1 : z_{21} (h_1 - h_2). \end{aligned} \right.$$

Die Indices von $\underline{\xi}_1$ ergeben sich aus der Bedingung:

$$\xi_{11} + \underline{\xi}_{11} : \xi_{12} + \underline{\xi}_{12} : \xi_{13} + \underline{\xi}_{13} = 1 : \bar{1} : 0,$$

oder:

$$2^*. \quad | \; \underline{\xi}_{11} : \underline{\xi}_{12} : \underline{\xi}_{13} = \xi_{12} : \xi_{11} : \xi_{13}.$$

Dagegen ist:

$$3^*. \quad | \; \underline{\xi}_{21} : \underline{\xi}_{22} : \underline{\xi}_{23} = \xi_{21} : \xi_{22} : {}_{23}.$$

Demnach sind die Indices einer Fläche h nach der Deformation gegeben durch:

$$\text{I}^*. \quad \begin{vmatrix} \rho \underline{h}_1 = z_{11} z_{23} h_1 + z_{13} z_{21} h_2 - 2 z_{11} z_{21} h_3 \\ \rho \underline{h}_2 = z_{13} z_{21} h_1 + z_{11} z_{23} h_2 - 2 z_{11} z_{21} h_3 \\ \rho \underline{h}_3 = z_{13} z_{23} (h_1 + h_2) - (z_{11} z_{23} + z_{13} z_{21}) h_3. \end{vmatrix}$$

Hieraus folgen für jene Krystallflächen, deren Indices durch die Deformation keine Aenderung erleiden, die Bedingungen:

$$4^*. \quad \begin{vmatrix} (h_1 - h_2)[z_{13}(h_1 + h_2) - 2 z_{11} h_3] = 0 \\ (z_{23} h_1 - z_{21} h_3)[z_{13}(h_1 + h_2) - 2 z_{11} h_3] = 0, \end{vmatrix}$$

welchen genügt wird

a) durch $h_1 + h_2 : h_3 = 2 z_{11} : z_{13}$, d. h. durch die mit der Gleitfläche z_1 und der zu ihr senkrechten Symmetrieebene in einer Zone liegenden Flächen;

b) durch die Kreisschnittebene z_2.

Demnächst folgt aus I*, daß die beiden ersten Indices einer Fläche h in Folge der Deformation ihre Werthe vertauschen:

$$\underline{h}_1 : \underline{h}_2 : \underline{h}_3 = h_2 : h_1 : h_3,$$

wenn gleichzeitig

$$5^*. \quad \begin{vmatrix} (h_1 - h_2)[z_{22}(h_1 + h_2) - 2 z_{21} h_3] = 0 \\ (z_{13} h_2 - z_{11} h_3)[z_{23}(h_1 + h_2) - 2 z_{21} h_3] = 0; \end{vmatrix}$$

dieser Forderung entsprechen

a) die mit der Kreisschnittebene z_2 und der zu ihr senkrechten Symmetrieebene einer Zone angehörenden Flächen, welche die Eigenschaft haben, daß $h_1 + h_2 : h_3 = 2 z_{21} : z_{23}$ ist;

b) die Gleitfläche z_1.

III.

Von den Ergebnissen des § II sollen jetzt einige Anwendungen gemacht werden.

Zunächst bemerken wir, daß die holoëdrischen Krystalle des monoklinen Systems, bei denen eine Fläche aus der Zone der

Symmetrieaxe Gleitfläche ist, den allgemeinsten hierher gehörigen Fall bilden. Die an ihnen auftretenden einfachen Formen, die monoklinen Prismen $(h_1 h_2 h_3)$, die Flächenpaare aus der Zone der Symmetrieaxe $(h_1 0 h_3)$ und das zur Symmetrieebene parallele Flächenpaar (010), haben ohne Ausnahme die Eigenschaft, daß ihre Flächen auch nach der Deformation zu einfachen Formen verbunden bleiben.

Aus den Beobachtungen von G. vom Rath[1]) und den Versuchen von O. Mügge[2]) ergiebt sich, daß am Diopsid $c = (001)$ Gleitfläche und $a = (100)$ die zweite Kreisschnittebene ist. Die beiden ausgezeichneten Zonen sind jene der Klinoaxe π_1 und der Vertikalaxe π_3; die Klinodomen und die verticalen Prismen führen demnach vor und nach der Deformation dieselben Symbole. Insbesondere ergiebt sich, daß die Flächen des Spaltungsprisma $m = (110)$ auch nach der Deformation wieder Spaltflächen sind. Die Transformationsgleichungen lauten nach I:

$$\underline{h}_1 : \underline{h}_2 : \underline{h}_3 = h_1 : -h_2 : -h_3.$$

Holöedrische Krystalle des rhombischen Systems können den Fall darbieten, daß die Kreisschnittebenen des Deformationsellipsoids durch die beiden Flächenrichtungen eines Prismas gegeben sind. Dann haben die Hauptaxen und Symmetrieebenen des Ellipsoids die Richtungen der krystallographischen Symmetrieaxen und Symmetrieebenen. Demnach bleiben in diesem wie in dem vorigen Falle alle Symmetrieelemente des Krystalls bei der Deformation erhalten. Bezeichnet man die den Hauptaxen X_1, X_2, X_3 entsprechenden krystallographischen Axen mit π_1, π_2, π_3, die Axeneinheiten mit a_1, a_2, a_3 die Indices der Kreisschnittebenen mit

$$z_1 = \{z_{11} 0 z_{13}\},\ z_2 = \{\bar{z}_{11} 0 z_{13}\},$$

so werden die Abschnitte von z_1 auf π_1 und π_3, a_1/z_{11} und a_3/z_{13}, durch die Deformation vertauscht (vgl. Fig. 4).

Das Verhältniß der Schiebung ist also

$$\sigma = \cot k = \frac{a_3}{a_1} \frac{z_{11}}{z_{13}}.$$

1) G. vom Rath: Lamellare Zwillingsverwachsung des Augit nach der Basis. Zeitschr. f. Kryst. 1881, 5, 495. 1883, 8, 47.

2) O. Mügge: Ueber künstliche Zwillingsbildung durch Druck am Antimon, Wismuth und Diopsid. Jhb. Min. 1886, I, 185.

Aus I ergiebt sich:

$$\underline{h}_1 : \underline{h}_2 : \underline{h}_3 = \frac{s_{11}}{s_{13}} h_3 : h_2 : \frac{s_{13}}{s_{11}} h_1.$$

In die beiden ausgezeichneten Zonen der Schnittgeraden von s_1 und s_2 mit der zu ihnen senkrechten Symmetrieebene fallen die rhombischen Pyramiden von dem Symbol $(s_{11} p \cdot q \cdot s_{13} p)$. Die Flächen dieser Formen haben also die Eigenschaft nach der Deformation dieselben rhombischen Pyramiden zu bilden.

Ist insbesondere $s_1 = \{101\}$, so tritt in Folge der Deformation in dem Symbol einer Fläche $h = \{h_1 h_2 h_3\}$ nur eine Vertauschung des ersten und des dritten Index ein.

Ein Beispiel gewährt nach den Beobachtungen von O. Mügge der Anhydrit [1]).

In dem hexagonalen System bieten die auf mechanischem Wege aus einfachen Krystallen gebildeten Zwillinge des Kalkspath nach $-\frac{1}{2}R$ und des Eisenglanz und Korund nach R Beispiele dar.

Bedienen wir uns zur Beschreibung der Deformation des Kalkspath der auf S. 436 erläuterten Bezeichnung, so ist

$$s_1 = \{112\}, \; s_2 = \{\bar{1}\bar{1}1\}$$

zu setzen. Die durch diese Flächen und die auf ihnen senkrechte Symmetrieebene bestimmten Zonen sind in Fig. 6 eingetragen.

Eine Fläche $h = \{x h_1 h_2 h_3\}$, $x = h_1 - h_2$, führt nach der Deformation das Symbol $\underline{h} = \{\underline{x} \underline{h}_1 \underline{h}_2 \underline{h}_3\}$, $\underline{x} = \underline{h}_1 - \underline{h}_2$, worin, wie aus I* folgt:

$$\left| \begin{array}{l} \rho \underline{h}_1 = \quad h_1 - 2h_2 + 2h_3 \\ \rho \underline{h}_2 = -2h_1 + \quad h_2 + 2h_3 \\ \rho \underline{h}_3 = \quad 2h_1 + 2h_2 + \quad h_3 . \end{array} \right.$$

Hiernach bleibt das Spaltungsrhomboëder R des Kalkspath bei dieser Deformation erhalten. Eines seiner Flächenpaare hat die Richtung der Ebene s_2, in der keine Verzerrung erfolgt, und die beiden anderen Flächenpaare, welche eine Verzerrung erleiden, gehören einer Zone an, deren Flächen in gleich berechtigte übergehen. Da nun diese Eigenschaften nicht gleichzeitig noch

1) O. Mügge: Ueber künstliche Zwillingsbildung am Anhydrit. Jhb. Min. 1883, II, 258. Vgl. 1885, II, 48.

den Flächen einer anderen Form zukommen können, so ergiebt sich: das Spaltungsrhomboëder ist die einzige einfache Krystallform, welche durch die Deformation keine Aenderung der krystallographischen Bedeutung ihrer Flächen erfährt.

Aus den vorstehenden Gleichungen ist ferner ersichtlich, daß auch die Flächen der übrigen, durch Cohäsionseigenschaften ausgezeichneten Formen des Kalkspath, $-\frac{1}{2}R$ und $\infty P2$, $-2R$ und $0R$, wieder in Flächen dieser Formen übergeführt werden [1]).

Von dem Rhomboëder $-\frac{1}{2}R$ behält das der Gleitrichtung parallele Flächenpaar seine Bedeutung; die beiden anderen Flächenpaare $|10\bar{1}2|$ und $|\bar{1}102|$ gehen in die zur Gleitfläche nicht senkrecht stehenden Flächenpaare $|1210|$ und $|1\bar{1}20|$ des Prismas $\infty P2$ über. Umgekehrt bleibt von diesem Prisma das zur Gleitfläche senkrechte Flächenpaar $|21\bar{1}0|$ erhalten, die beiden anderen Flächenpaare werden in Flächen des Rhomboëders $-\frac{1}{2}R$ übergeführt.

Aus dem basischen Flächenpaar $|0001|$ entsteht das Flächenpaar $|0221|$ des Rhomboëders $-2R$, welches in die Zone $[z_1, z_2]$ fällt, und umgekehrt. Die beiden anderen, mit z_2 in einer der ausgezeichneten Zonen liegenden Flächenpaare $|20\bar{2}1|$ und $|\bar{2}201|$ von $-2R$ gehen in Flächen derselben Form über.

Für die Zwillinge des Eisenglanz und des Korund nach R ergiebt sich aus den Beobachtungen von M. Bauer [2]) und O. Mügge [3]), daß die Ebenen, in denen keine Verzerrung eintritt, 1101 und $\bar{1}102$ sind; die erstere ist Gleitfläche.

Demgemäß ist in I* zu setzen:

$$z_1 = \{111\},\ z_2 = \{\bar{1}\bar{1}2\}$$

und von den Indices der Flächen $h = \{x h_1 h_2 h_3\}$, $x = h_1 - h_2$, und $\underline{h} = \{\underline{x}\underline{h}_1\underline{h}_2\underline{h}_3\}$, $\underline{x} = \underline{h}_1 - \underline{h}_2$, sind der erste, zweite und vierte zur Berechnung zu benutzen. Wir finden:

---

1) Vgl. O. Mügge: Beiträge zur Kenntniß der Structurflächen des Kalkspathes etc. Jhb. Min. 1883, I, 42.

2) M. Bauer: Ueber eine eigenthümliche Zwillingsstreifung am Eisenglanz. Zeitschr. d. deutsch. geol. Gesellsch. 1874, 26, 191.

3) O. Mügge: Bemerkungen über die Zwillingsbildung einiger Mineralien. Jhb. Min. 1884, I, 216. — Ueber secundäre Zwillingsbildung am Eisenglanz. Jhb. Min. 1886, II, 35. — Zur Kenntniß der Flächenveränderungen durch secundäre Zwillingsbildung. Jhb. Min. 1886, I, 146 (Korund).

Zwillingslamellen nach R in Eisenglanz von Elba erwähnte zuerst A. Sadebeck: Pogg. Ann. 1875, 156, 557.

$$\left| \begin{array}{lcl} \rho \underline{x} & = & 2x - h_1 + 2h_2 \\ \rho h_1 & = & -x - 2h_1 + 2h_2 \\ \rho \underline{h}_2 & = & 2x + 2h_1 - h_2. \end{array} \right.$$

Auch hier ist das Rhomboëder R die einzige einfache Form, welche erhalten bleibt; zwischen $-\frac{1}{2}R$ und $\infty P2$, $-2R$ und $0R$ bestehen dieselben Beziehungen wie beim Kalkspath.

Aus dieser Darlegung ergiebt sich, daß man zur Erklärung der auf mechanischem Wege aus einfachen Krystallen gebildeten Krystallzwillinge lediglich der durch die Beobachtung gegebenen Gleitung der Theilchen nach den Gleitflächen bedarf und daß diejenige Vorstellung, welche darüber hinaus noch eine Drehung der Theilchen um den Betrag einer halben Umdrehung annimmt [1]), der Begründung entbehrt.

Göttingen, Mai 1887.

1) G. Tschermak: Zur Theorie der Zwillingskrystalle. Min. petrog. Mitth. 1880, II, 519—521.

Ueber einen allgemeinen qualitativen Satz für Zustandsänderungen nebst einigen sich anschließenden Bemerkungen, insbesondere über nicht eindeutige Systeme [1]).

Von

Ferdinand Braun.

(Vorgelegt von Eduard Riecke.)

1. Der Zustand eines Systems sei durch gewisse Größen desselben eindeutig bestimmt. Es sei im stabilen Gleichgewicht für bestimmte Werthe der Variabelen, und es sei durch continuirliche Aenderung derselben möglich, daß das System eine Reihe von stabilen Gleichgewichtszuständen continuirlich durchlaufe, d. h. der Art, daß mit einer unendlich kleinen Aenderung der einen Variabelen im Allgemeinen auch nur eine unendlich kleine Aenderung aller anderen im System vorkommenden Größen verknüpft sei. Es sei ferner auch mit einer endlichen Aenderung einer Variabelen eine endliche Aenderung derjenigen Größen verknüpft, welche im speciellen Falle überhaupt mit der ersten (independenten) Variabelen sich gleichzeitig ändern sollen. Geht man von einem dieser Gleich-

1) Den im Folgenden mitgetheilten Satz habe ich vor Kurzem in der Zeitschrift für physikalische Chemie (I. p. 269) ohne Beweis publicirt und auf einige Fälle angewendet.

gewichtszustände aus und ändert eine Variabele um eine sehr kleine Größe, so wird sich ein neuer Gleichgewichtszustand herstellen. Es sind nun zwei verschiedene Arten von Systemen zu unterscheiden.

A. Erste Classe von Systemen. Es sind solche, bei denen eine endliche Zeit vergehen kann, bis sich die anderen Variabelen in der Weise geändert haben, wie es der neue Gleichgewichtszustand verlangt. Von diesen sei zunächst die Rede. — Hat man eine unendlich kleine Aenderung einer Variabelen willkürlich hervorgebracht und wartet nun die beim Uebergang in die neue Gleichgewichtslage von selbst eintretenden Aenderungen der Variabelen ab, so können offenbar diese Werthänderungen nicht auf eine endliche Größe anwachsen. Es würde sonst mit dieser Aenderung nach Voraussetzung auch eine endliche Aenderung der ersten Variabelen bedingt sein, und es wäre überhaupt nicht möglich, einen dem Ausgangszustand unendlich benachbarten herzustellen, was gegen die vorausgesetzte Continuität verstieße. Es seien nun $x, y \ldots . t$ die Variabelen in einem ersten Gleichgewichtszustand. Man lasse alle bis auf zwei, z. B. x und y constant, ändere x willkürlich um die sehr kleine Größe $+ \xi$ und warte den neuen Gleichgewichtszustand ab. Während sich dieser herstellt, ändert sich x und y um resp. $\partial \xi$ und ∂y, und es läßt sich stets so einrichten, daß $\partial \xi / \partial y$ einen endlichen eindeutigen Werth hat (z. B. bei Bildung einer Lösung, wenn x etwa den Druck, y das Volum der Lösung bedeutet, indem man die neu gebildete Schicht Lösung immer in der ganzen vorhandenen Flüssigkeit gleichförmig vertheilt denkt). Eine nun von selbst eintretende Aenderung von ξ sei bezeichnet als

$$\delta \xi = \delta x = \frac{\partial \xi}{\partial y} \delta y.$$

Ich will beweisen, daß $\delta \xi$ immer das entgegengesetzte Zeichen von ξ haben muß; $\delta \xi$ und ξ sind dabei im Allgemeinen von gleicher Größenordnung, wie aus der Voraussetzung folgt.

δy sei positiv angenommen. Wäre nun $\partial \xi / \partial y$ auch positiv und constant, so würde das willkürlich hervorgebrachte $+ \xi$ übergehen in $+ (\xi + \delta \xi)$ und da andererseits auch $\frac{\partial y}{\partial \xi} \delta \xi$ constant positiv wäre, so würden die Aenderungen der Variabelen von selber endliche Werthe erreichen — was mit der vorausgesetzten Continuität unvereinbar wäre. Folglich bleiben nur folgende Annahmen:

a) entweder $\partial \xi / \partial y$ ist nicht constant, sondern convergirt schon für ein unendlich kleines Intervall dy gegen Null — dies verstößt gegen die angenommene Stetigkeit;

b) oder $\partial \xi / \partial y$ ist $= 0$. Dieser Fall — indifferenten Gleichgewichts — ist nach Annahme ausgeschlossen, d. h.

c) es bleibt nur die Möglichkeit, daß $\partial \xi / \partial y$ negativ ist. Daraus folgt, daß $\delta \xi$ negativ ist, wenn ξ positiv ist und umgekehrt, unabhängig vom Vorzeichen von δy, wie man sich leicht durch Wiederholung des Beweises überzeugt. In Worten: ist die willkürlich hervorgebrachte Aenderung der einen Variabelen $+ \xi$ und die von selbst eintretende der anderen $\pm \delta y$, so ist die von selbst eintretende der ersten Variabelen $- \delta x$, d. h. der Uebergang in den neuen Gleichgewichtszustand ist immer der Art, daß diejenige willkürlich hervorgebrachte Aenderung der einen Variabelen, welche den Uebergang veranlaßt, bei dem Uebergang von selber ihrem absoluten Betrage nach abnimmt.

Ein stetig stabil veränderliches System ist also gleichzeitig ein sich selbst beruhigendes. Ich will es ein autostatisches (abgekürzt für das richtiger gebildete Wort autoephistatisch) nennen.

Voraussetzung ist dabei, daß das System beim Uebergange sich selbst überlassen bleibe. Ist daher die Temperatur eine variirende Größe, so muß die Aenderung adiabatisch gedacht werden.

2. Dieser Satz umfaßt das Qualitative einer großen Anzahl bekannter Erscheinungen und ist geeignet, Neues zu liefern. Ich will es auf Mehreres anwenden: Eis und Wasser seien bei 0° als das System gegeben; erhöht man den Druck um dp (die Temperatur bleibe constant), bringt man also eine willkürliche Aenderung des Volums $- dv$ hervor, so muß von selber nun eintreten eine Volumänderung $+ \delta v$ (und eine Druckänderung $- \delta p$). Da Eis ein größeres specifisches Volum als Wasser hat, so muß Eis theilweise schmelzen. Umgekehrt bei Substanzen, die sich beim Schmelzen ausdehnen. Der Einfluß des Druckes auf die Löslichkeit fester Körper in Flüssigkeiten fällt unter denselben Gesichtspunkt. Substanzen, die durch zunehmenden Druck sich stärker lösen, müssen unter diesem Druck sich mit Contraction lösen; diejenigen, welche Dilatation bei der Lösung zeigen, müssen durch Drucksteigerung ausfallen [1]). Das Gleiche gilt offenbar für Flüssigkeiten, welche nicht in jedem Verhältniß mischbar sind.

Ich will den Satz anwenden auf den Fall adiabatischer Aenderungen. Eine gesättigte Lösung eines Salzes sei in Berührung mit dem Salze selber. Erhöht man die Temperatur um dt und

1) Braun, Wied. Ann. 30, p. 250. 1887. Vgl. auch die von Spring und van't Hoff beschriebene Zersetzung durch Druck. Zeitschr. f. physik. Chemie I. p. 227, 1887.

läßt den neuen Gleichgewichtszustand eintreten, so muß, wenn neues Salz in Lösung tritt, dieses Wärme verbrauchen, das Gleiche muß gelten, wenn Salz ausfällt; d. h. Substanzen, deren Löslichkeit mit der Temperatur steigt, verbrauchen beim Eintritt in die fast gesättigte Lösung Wärme (negative Lösungswärme), diejenigen, deren Löslichkeit fällt, lösen sich unter Entwickelung von Wärme[1]). (Die Größen λ und η meiner oben citirten Abhandlung sind daher immer von entgegengesetzten Zeichen; das Vorzeichen von ε ist lediglich durch das von ν bestimmt).

Bei einer Kette ist die Potentialdifferenz an den Polen mit der Temperatur derselben eindeutig verknüpft. Erhöht man die letztere und entsteht dadurch eine Aenderung der Potentialdifferenz, d. h. ein Ladungsstrom, so muß umgekehrt der Ladungsstrom Temperaturabnahme der Zelle bewirken, d. h. ist er dem ursprünglichen Kettenstrom gleichgerichtet (mit steigender Temperatur zunehmende elektromotorische Kraft), so muß die Kette durch einen solchen Strom abgekühlt werden. Umgekehrt, wenn die elektromotorische Kraft abnimmt mit steigender Temperatur. Dies ist das Qualitative des von Helmholtz'schen Satzes[2]). — Ganz ebenso folgt die Temperaturänderung ungleich erwärmter metallischer

1) Diesen Satz hielt ich, als ich die Eingangs erwähnte Notiz für die „Zeitschrift f. phys. Chemie" schrieb, für neu; ich ersah erst später bei genauerer Durchsicht der Litteratur, daß er schon 1884 von Hrn. Le Chatelier (C. R. T. 99, p. 788) ausgesprochen wurde. Er bildet augenblicklich den Gegenstand einer Debatte unter französischen Gelehrten. Ich weiß nicht, ob er von Hrn. Le Chateier, der zwar auch (C. R. 104. 679) die Wärme bei Bildung einer gesättigten Lösung untersucht (aber aus Salz und Wasser), so präcisirt worden ist, wie ich oben gethan habe, daß er sich nämlich nur auf die Wärmetönungen bei Eintritt in eine schon fast gesättigte Lösung bezieht. — Im citirten Aufsatze vom Jahre 1884 stellt Hr. Le Chatelier, wie ich bei dieser Gelegenheit fand, für „Systeme in chemisch-stabilem Gleichgewicht" einen dem von mir ausgesprochenen Satze fast gleichlautenden auf. Doch finde ich weder eine scharfe Abgrenzung seiner Gültigkeitsbedingungen, noch einen Beweis desselben, und so wird bei fast gleichem Wortlaut doch der Inhalt, den Hr. Le Chatelier seinem Satze beimißt, ein ganz anderer. Dies erhellt am besten aus den Anwendungen, welche Hr. Le Chatelier giebt. Die meisten Beispiele sind chemischer Natur. Dagegen sollen unter seinen Satz auch fallen: Fortleitung der Wärme von einer stärker erhitzten Stelle aus, Aenderungen der Concentration durch Diffusion, Transport von Metall von einem Punkt einer Lamelle, die in eine Lösung eines Salzes des Metalles taucht, zu einem anderen Punkt, Erniedrigung des Schmelzpunktes einer Legirung oder einer Mischung von Salzen während der fortschreitenden Erstarrung. — Eine präcisere Formulirung, gleichfalls ohne Beweis, findet sich bei Ostwald, Allg. Chemie II, p. 736. Aber auch die dort angeführten Beispiele sind nicht alle zutreffend.

2) v. Helmholtz, Abhdlgen II p. 962.

Leiter (Peltier- und Thomsoneffect). Denkt man sich die beiden Platten eines aus zwei verschiedenen Metallen bestehenden Condensators mitsammt den Verbindungsdrähten (ohne Aenderung der Capacität) erwärmt, so entspricht der hierbei entstehende Ladungsstrom der thermoelectrischen Kraft an den Löthstellen, — die Wärme, welche er im System entwickelt oder verbraucht, der Peltier'schen Wärme. — Wird nur die Contactstelle erwärmt, die Temperatur der Condensatorplatten aber ungeändert gelassen, so entspricht die Ladung den thermoelectrischen Kräften an den Löthstellen und den im Inneren der gleichartigen Metalle auftretenden, die Wärme dem Peltier- und Thomsoneffect. Da sich beide, wenn die thermoelectrische Kraft als Temperaturfunction bekannt ist, trennen lassen, so würden derartige Versuche eine Entscheidung der Frage herbeiführen können, ob die Aenderungen, welche die Contactelectricität mit der Temperatur erfährt, nur abhängig ist von den sich berührenden Metallen oder auch von dem Zwischenmittel des Condensators.

Daß der Satz aber nur mit Vorsicht anzuwenden ist, dafür möge das folgende Beispiel dienen. Durch Druckänderung entsteht in hemimorphen Krystallen, wie bekannt, eine electrische Ladung von gewisser Potentialdifferenz und umgekehrt durch electrische Ladung eine Druckdifferenz. Beide sind in der Weise mit einander verknüpft, daß, wenn durch Druckerhöhung eine in festgesetzter Richtung gerechnete Potentialdifferenz $+p$ entsteht, eine derartige Ladung $+p$ umgekehrt eine Druckabnahme herbeiführt. Man könnte daher versucht sein, auch diese Erscheinung aus dem Satze abzuleiten. Dies ist aber nur zulässig, wenn bewiesen ist, daß Druck und Ladung eindeutig mit einander verknüpft sind, d. h. daß, wenn die eine Größe sich ändert, im neuen Gleichgewichtszustande auch der anderen nur ein einziger Werth zukommen kann. Anwendbar würde der Satz also dann, wenn nachgewiesen wäre, daß eine Platte eines hemimorphen Krystalles, welche in passender Richtung geschnitten (und vielleicht mit Belegungen versehen ist), auf denselben für einen jeden gegebenen Druck nur je einen einzigen, von Null im Allgemeinen verschiedenen Werth der Potentialdifferenz als Gleichgewichtszustand zuläßt. Diese Bedingung war bei den vorher erwähnten Beispielen erfüllt, und, da wohl alle festen Körper Leiter der Electricität sind, hat er auch für diese wahrscheinlich Geltung. — Nachdem Riecke[1]) vor Kurzem gezeigt hat, daß, wenn man für hinreichende Isolation

1) Riecke, Nachrichten d. Kgl. Gesellsch. d. Wissensch. Göttingen. Nr. 7. 1887.

sorgt, jedem hemimorphen Krystall bei einer gegebenen Temperatur eine bestimmte dauernde Electrisirung zukommt, kann der Satz auf diese Erscheinung und die reciproke angewandt werden.

Anwendbar ist derselbe daher z. B. wieder auf folgenden Fall. Aendert sich durch den Druck die elektromotorische Kraft eines galvanischen Elementes, d. h. entsteht ein Ladungsstrom, so muß derselbe umgekehrt solche Processe herbeiführen, welche eine Volumabnahme bewirken[1]). Dieser Schluß ist schon auf anderem Wege gezogen worden.

Auch wenn in metallischen Leitern durch Druckerhöhung (Volumverkleinerung) eine Aenderung der elektrischen Spannungsdifferenz entstände, so müßte umgekehrt ein derartiger Ladungsstrom eine Volumvergrößerung bewirken. Man wird kaum bezweifeln können, daß das erstere der Fall ist. Die Eigenschaften dauernd gehärteter Metalle müssen continuirlich durch diejenigen temporär verdichteter zu denjenigen der Metalle im natürlichen Zustand (wie er etwa durch Erstarren der geschmolzenen Stoffe oder durch electrolytisches Niederschlagen entsteht) übergehen. Wollte man nun auch annehmen, daß zwei Metalle desselben chemischen Stoffes in verschiedenen physikalischen Zuständen bei einer Temperatur keine electrische Spannungsdifferenz besäßen, so würde dies doch nicht mehr für eine andere gelten, da bekannt ist, daß dieselben Thermoströme geben. Daraus folgt: Erhöht man in einem Condensator aus zwei verschiedenen Metallplatten (ohne Aenderung der Capacität) den Druck auf das Ganze, so wird sich die Ladung ändern. Ebenso wenn man von zwei gleichen Metallplatten die eine derselben Druckkräften unterwirft. Je näher man die Platten von Anfang an bringt, d. h. je größer die Capacität ist, desto größer wird die bewegte Electricitätsmenge. Auch wenn sich dieselben berühren, d. h. der Kreis geschlossen ist, muß der Strom noch entstehen; er wird sich aber nach dem umgekehrten Verhältniß des Widerstandes der Contactstelle der Platten zu dem

---

1) Ein Element $Zn/Zn\,SO_4$ gesättigt $/Zn\,SO_4$ ges. + 8 *Vol.* $H_2\,O/Zn$ zeigte bei Druckerhöhung um einige hundert Atmosphären regelmäßige Zunahme der electromotorischen Kraft; sie ließ sich leicht auf das 1,45-fache ihres Werthes bei Atmosphärendruck bringen. Ein Strom, welcher in der Richtnng des Kettenstromes geht, muß also Volumabnahme herbeiführen, wie das auch der Fall ist. Eine quantitative Verfolgung dieser Thatsache würde auch entscheiden lassen, ob und wie sich die elektrolytische Ueberführung mit dem Druck ändert. Nach der F. Kohlrausch'schen Theorie des Widerstandes der Lösungen wären damit vielleicht die von J. Fink nachgewiesenen Aenderungen dieser Größe durch den Druck erklärbar. (Wied. Ann. **26**, p. 481. 1885.)

Widerstand der übrigen Leitung zwischen den beiden ihm offen stehenden Wegen vertheilen. Dieser Strom kann nicht dauernd sein, da sein Aequivalent nur in äußerer Arbeit gesucht werden kann und solche, den Bedingungen des Versuches zu Folge, offenbar nicht dauernd zugeführt werden kann. Er kann daher nur als vorübergehender (Ladungsstrom) auftreten. Wenn ein solcher Strom aber durch Druckänderungen in Metallen, d. h. durch die damit hervorgebrachten raschen Volumänderungen entsteht, so liegt kein Grund vor, warum nicht jede derartige Volumänderung von einem solchen begleitet sein soll. Bei der Erregung der flüchtigen Ströme, welche durch Aneinanderlegen eines heißen und eines kalten Metalles entstehen, könnte dieser Umstand mitspielen.

Endlich möchte ich noch auf einen, zur Zeit gerade interessirenden Fall hinweisen. Durch bekannte Versuche ist nachgewiesen, daß der Widerstand vieler Metalle sich im Magnetfeld ändert. Insbesondere hat Herr Goldhammer[1]) die Resultate anderer Forscher erweitert und gelangt zu dem Schlusse, daß bei allen Metallen (sofern überhaupt die Aenderung beobachtbar ist) der Widerstand in der Richtung der magnetischen Kraftlinien zunehme; in der dazu senkrechten Richtung nimmt er nur in diamagnetischen Metallen zu; in magnetischen nimmt er ab. — Denkt man sich nun die folgende Versuchsanordnung: Eine constante electromotorische Kraft schickt einen Strom durch ein Solenoid und eine Anzahl Metalldrähte, welche sich im Magnetfelde des Solenoids befinden. Alle Drähte seien aus dem gleichen Material und das Ganze sei auf constanter Temperatur gehalten. Verschiebt man die Drähte von Stellen kleinerer zu Stellen größerer magnetischer Feldstärke, so ändert sich die Stromstärke. Für die diamagnetischen Metalle ist nach den Erfahrungsresultaten das System offenbar immer ein autostatisches — Verschiebung zu Stellen stärkerer magnetischer Kraft bewirkt Abnahme der Stromstärke, d. h. Abnahme der Feldintensität. Für magnetische Metalle lassen sich aber Bedingungen herstellen, wo, nach den angeführten Beobachtungen, das entgegengesetzte eintreten würde. Wenn also auch in diesem Falle das System ein autostatisches ist (und ich sehe keinen Grund, der dagegen spräche), so müßte noch eine neue Wirkung vorhanden sein. Ueberlegt man, was für Aenderungen möglich sind, so scheint mir nur eine Annahme übrig zu bleiben, nämlich die, daß

1) Goldhammer, Wied. Ann. 31, p. 360. 1887.

der Widerstand magnetisirbarer Metalle mit steigender Stromstärke zunehmen müsse. Da diese Aenderung im gleichen Sinne geht, wie die durch die zunehmende Joule'sche Erwärmung bedingte, so wird es nicht ganz leicht sein, eine solche kleine Aenderung einwurfsfrei nachzuweisen.

B) Eine zweite Classe von Systemen sind diejenigen, bei welchen es nicht möglich ist, eine Variabele zu ändern, ohne daß nicht auch gleichzeitig sich mindestens eine andere mit änderte. In vielen Fällen mag man sich vorstellen können, daß sie sich von der zuerst besprochenen Kategorie nur durch die Größe des Zeitintervalles unterscheiden; z. B. ließe sich bei einem starren Körper plötzlich der auf ihm lastende Druck ändern, während sein Volum im ersten Moment ungeändert gedacht werden kann. Sofern man aber die gewöhnlichen mechanischen Eigenschaften dieser Körper (Beziehung zwischen Volum und Druck, Zug und Länge etc.) in Betracht zieht, ergiebt der obige Satz nichts, was nicht schon durch die einfachsten Grundsätze der Mechanik ausgesprochen wäre. Fruchtbar erweist er sich nur, wenn man entweder andere Eigenschaften (wie Magnetisirbarkeit) heranzieht oder wenn man die Temperatur eine Variabele sein läßt. Dann aber können diese Systeme ähnlich wie die der ersten Classe behandelt werden. Es folgt z. B.: Denkt man sich einen Körper, der Anfangs unter einem Drucke p steht, um $+ dt$ erwärmt, sein Volum aber constant gehalten (so daß p in p' übergeht) und dann plötzlich den Druck p wiederhergestellt, so muß dt stets abnehmen, d. h. Abkühlung eintreten. Denn eine Aenderung muß es, der Voraussetzung nach, erfahren, da es sich mit Aenderung des Volums ändern soll. Würde es aber zunehmen bei der jetzt gegebenen Möglichkeit der freien Volumänderung, so würde diese letztere im Sinne der zunehmenden Temperatur weitergehen, diese wieder die Temperatur im gleichen Sinne ändern — und so würden wieder genau die in § 1 gezogenen Schlüsse gelten. Körper also, welche sich beim Erwärmen ausdehnen ($p' > p$) kühlen sich bei adiabatischer Ausdehnung ab; solche, welche sich zusammenziehen ($p' < p$), kühlen sich bei adiabatischer Zusammenziehung ab, d. h. erwärmen sich bei adiabatischer Ausdehnung. — Wird die ganze, sehr kleine Aenderung von p bei diesem Vorgange (also $p' - p$) mit ∂p bezeichnet, die zugehörige Temperaturänderung mit ∂t, so hat $\partial p / \partial t$ einen bestimmten Zahlenwerth, wenn derselbe auch dem während des tumultuarischen Vorganges geltenden nicht gleich sein wird.

3. Schwierigkeiten entstehen, wenn das System nicht ein-

deutig ist. Das würde in dem gerade erwähnten Beispiele eintreten, sobald dauernde Deformation oder elastische Nachwirkung sich geltend macht. So lange die Differentialquotienten der Variabelen dasselbe Vorzeichen behalten, wie in dem analog gebildeten eindeutigen System (also hier einem ideal elastischen Körper), so lange bleibt auch der qualitative Satz gültig. Schließt man die Betrachtungen an einen solchen idealen Fall an, so läßt sich auch folgern, in welcher Richtung für den reellen Fall die Abweichungen vom idealen liegen müssen. Ich will dies an dem angezogenen Beispiele (thermischer Effect der Dehnung eines Drahtes) durchführen. Die Differentiale für den idealen Fall seien durch große Buchstaben, für den reellen durch kleine bezeichnet. Dann ist

$$\Delta t = \frac{Dt}{Dp} \Delta p$$

$$\delta t = \frac{\partial t}{\partial p} \delta p.$$

Macht man $\Delta p = \delta p$, so ist

$$\frac{\Delta t}{\partial t} = \frac{Dt/Dp}{\partial t/\partial p}$$

Dem Dt entspricht ein bestimmter Werth Dp; dies wird nicht mehr für die Beziehungen zwischen ∂t und ∂p gelten. Beachtet man aber, daß

$$\partial t/\partial p = \frac{\partial t/\partial v}{\partial p/\partial v}$$

ist, so wird nach den Eigenschaften der elastischen Nachwirkung, wenigstens sehr nahezu, $\partial t/\partial v = Dt/Dv$ [1]); dagegen $\partial p/\partial v < Dp/Dv$ sein. Bezeichnet daher α einen ächten Bruch, so ist $\partial p/\partial v = \alpha\, Dp/Dv$, und $\frac{Dt/Dp}{\partial t/\partial p} = \alpha = \frac{\Delta t}{\partial t}$ oder $\delta t = 1/\alpha \, . \, \Delta t$, d. h. die adiabatische Temperaturänderung für einen nachgebenden Körper ist größer als die für den ideal elastischen Körper nach der Thermodynamik ausgerechnete.

Dies Verhalten spricht sich thatsächlich in den Resultaten Joule's über den Gegenstand aus. Ich setze zum Beweise die Zahlen her[2]).

1) Vgl. Graetz Wied. Ann. 28, p. 354. 1886.

2) Joule, Philosoph. Transact. Vol. 149, p. 119. 1859. Cfr. auch l. c. p. 100.

	Versuch.	Theorie.
Eisen . . .	— 0,115° C.	— 0,110° C.
„ . . .	— 0,124° „	— 0,110° „
„ . . .	— 0,101° „	— 0,107° „
Harter Stahl	— 0,162° „	— 0,125° „
Gußeisen . .	— 0,160° „	— 0,112° „
Kupfer . .	— 0,174° „	— 0,154° „
Messing . .	— 0,053° „	— 0,040° „
„ . .	— 0,076° „	— 0,055° „
Guttapercha	— 0,028° „	— 0,031° „
„	— 0,052° „	— 0,066° „

Die für Guttapercha angegebenen Versuchszahlen hält Joule für nicht so zuverlässig (l. c. p. 101); das gleiche gilt in noch höherem Maße für die bei Hölzern gefundenen Effecte (l. c. p. 118), bei welchen Joule eine Correction von 25% der direct beobachteten Zahlen anbringt. Ich lasse sie deshalb weg, bemerke aber, daß Joule in den drei in Betracht kommenden Fällen kleinere Werthe angiebt, als die Theorie verlangt (entgegengesetzt dem Verhalten der Metalle).

4. Aus den Betrachtungen der mechanischen Wärmetheorie scheint mir der gleiche Schluß nicht erlaubt. Sobald die Bedingungen der Reversibilität nicht mehr erfüllt sind, fällt auch die Berechtigung der Rechnung in der üblichen Form weg, und man muß, um zu sicheren Schlüssen zu gelangen, einen ganzen dem Carnot-schen Proceß analog gebildeten, verfolgen. Construirt man einen solchen, der von zwei Isothermen T und T' und zwei Adiabaten begrenzt ist, so wird zunächst für den idealen Fall

$$Q - Q' = \mu\,(T - T')$$
$$= \frac{1}{J}\,F_1$$

wenn F_1 die vom System nach außen abgegebene Arbeit bedeutet, $T > T'$ ist und J, Q, Q', μ bekannte Bedeutungen haben. Nimmt man nun den reellen Fall (wie man ihn aus dem idealen schon durch Verlängerung der Zeiten erhalten könnte), so kann man immer bewirken, daß dieselben Wärmemengen bei denselben Temperaturen aufgenommen resp. abgegeben werden, wie im idealen Fall. Auch der Uebergang von T auf T' längs einer Adiabaten ist möglich. Will man aber von T' adiabatisch den Körper nach dem Anfangszustande (p, v, T) zurückführen, so wird er jetzt beim anfänglichen p sicher nicht den Anfangswerth von v und höchst wahrscheinlich auch nicht den von T haben. Die ganze Form der Arbeitsfläche wird sich gegenüber dem idealen Falle geändert haben, und was man zunächst

schließen kann, ist nur, daß die vom System geleistete äußere Arbeit F_2 kleiner ist als F_1. Daher ist

$$J(Q-Q') = F_2 + U,$$

wo U eine innere Energie, die im Körper zurückbleibt, bedeutet. Ist nur elastische Nachwirkung vorhanden, d. h. kommt der Körper, wenn auch erst nach sehr langer Zeit, in seinen Anfangszustand zurück (wobei angenommen wird, daß dann bei gleicher Länge wie zu Anfang auch seine innere Energie wieder diejenige des Anfangszustandes sei, was nicht allgemein gültig ist, wie die Uebereinanderlagerung von Nachwirkungen zeigt[1]), und denkt man ihn während dieser ganzen Zeit adiabatisch umhüllt, so muß auch die ganze äußere Arbeit dieselbe sein wie im ersten Falle. Die ganze Größe U ist dann in äußere Arbeit verwandelt. Aber es ist zunächst noch unentschieden, ob diese entsteht, indem der Draht sich abkühlt oder ob nicht U, wenigstens zum größten Theil, was ich für das wahrscheinlichste halte, eine innere potentielle Energie (der Lage) ist, welche frei verwandelbarer Arbeit gleichwerthig ist. Eine Entscheidung durch directe Versuche scheint ausgeschlossen; indirect läge eine Möglichkeit dadurch vor, daß ein im Zustande elastischer Nachwirkung befindliches Metall gegen ein gleiches im gewöhnlichen Zustand in der Lösung eines Salzes des betr. Metalles electromotorisch wirksam sein müßte. Und zwar müßte das im Zustande der Nachwirkung befindliche der negative Pol des Elementes sein. Denn indem sich in einem so hergestellten geschlossenen Stromkreise dieses Metall auflöst und in gewöhnlichem Zustande auf der andern Electrode abscheidet, würde diese innere mechanische Arbeitsfähigkeit in die electrische Energie des Stromkreises umgesetzt. Bezeichnet U die in einer 2 g Wasserstoff electrochemisch äquivalenten Metallmenge durch elastische Nachwirkung aufgespeicherte innere Arbeit, welche sich als das Product von Spannung und Verlängerung durch Nachwirkung ausdrückt und JU die ihr aequivalente Wärmemenge in Grammecalorien, so wäre die electromotorische Kraft e bezogen auf Daniell $= 100$, angenähert

$$e = \frac{1}{500} \cdot \frac{U}{J}{}^{2)} = \frac{1}{500} \cdot \frac{U}{41{,}6 . 10^6}$$

oder, wenn man die electrochemische Electricitätseinheit gleich 193000 Coulomb annimmt

$$e = \frac{U}{193} \cdot 10^{-10} \text{ Volt}$$

1) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. 158, p. 372. 1876.

2) Vgl. Braun, Wied. Ann. 16, p. 562. 1882.

und U selber wird

$$U = \frac{A.P.v}{m} \cdot 1000 . 981 \, [GC^2S^{-2}]$$

wenn A das electrochemische Aequivalent des Metalles, P die Spannung in Kilogrammgewicht pro Mm^2, v die Verlängerung in Cm durch elastische Nachwirkung, welche unter der Spannung P sich wieder ausgleicht, m die Masse des Drahtes bedeutet.

Es sei P gleich derjenigen Spannung genommen, welche einen Draht von 1 Meter Länge temporär um 1 Mm verlängert, v sei gleichfalls = 1 Mm gesetzt, so wird für

Kupfer.	Silber.
P = 12 Kilogrgew.	P = 7,4 Kilogr.
v = 0,1 Cm	v = 0,1 Cm
A = 64 Gr	A = 216 Gr
m = 8,9 Gr	m = 10,3 Gr
e = 4,5 Mikrovolt.	e = 7,9 Mikrovolt.

Diese Kräfte wären an und für sich noch mit voller Sicherheit zu beobachten, wenn nicht die bekannten anderen Schwierigkeiten kämen. Indessen sind auch die Deformationen klein angenommen und bei Torsion, wo die Energie der Volumeinheit in den Oberflächenschichten noch dazu größer ist als im Inneren des Drahtes, könnte sich die Erscheinung wohl am leichtesten nachweisen lassen.

5. Außerordentlich viel größere Aenderungen des inneren Arbeitsvermögens muß man in sehr dünn abgeschiedenen Schichten von Metallen oder Electrolyten annehmen, wenn man die von Oberbeck[1]) kürzlich gemessenen electromotorischen Kräfte dünner Metallüberzüge oder das von mir früher gelegentlich[2]) beobachtete langsame Anwachsen der Kraft einer Kette $Pb/Pb\,Br_2/Br/Pt$ daraus erklären will. In beiden Fällen verhält sich die dickere Schicht wie der negative Kettenpol, die freie Energie der Gewichtseinheit müßte in ihr größer sein als in der dünnen Schicht. Ob Aenderungen der mechanischen Arbeitsfähigkeit von so enormer Größe, wie sie zur Erklärung dieser Beobachtungen erforderlich wären, denkbar sind, scheint mir fraglich, und ich glaube, man wird auf die Analogie mit katalytischen Erscheinungen, welche ich früher betonte, zurückgreifen müssen.

---

1) Oberbeck, Wied. Ann. 31, p. 337. 1887.
2) Braun, Wied. Ann. 17, p. 602. 1882.

6. Ich komme nochmals kurz auf die elastische Nachwirkung zurück. Man denke sich einen Draht fortwährend adiabatisch umhüllt. Dehnt man denselben, hält ihn dann längere Zeit auf constanter Spannung, so daß er elastische Nachwirkung annimmt, läßt nun die Spannung wieder auf die Anfangsspannung fallen und schließlich bei dieser die elastische Nachwirkung wieder verschwinden, so hat der den Zustand des Körpers repräsentirende Punkt (p, v) beinahe eine geschlossene Curve durchlaufen. Vollständig geschlossen ist sie aus dem folgenden Grunde nicht. Das System hat, wie eine graphische Darstellung zeigt, Arbeit consumirt (von außen aufgenommen), folglich muß die Endtemperatur höher sein als die Anfangstemperatur. Auch wenn die elastische Nachwirkungsdeformation schon während des Wechsels der Spannungen eintritt, wird noch das gleiche gelten. Dies ist die Erklärung für die von Villari[1]) beobachtete Erscheinung, wonach Kautschuk nach raschem Ausziehen und Wiederabspannen eine Temperaturerhöhung zeigt. Bei seinen Versuchen war auch dauernde Deformation entstanden. Daß diese aber nicht der hauptsächlichste Grund für die Erscheinung ist, geht daraus hervor, daß eine rasche Wiederholung des An- und Abspannens, wo sich bald immer wieder — bis auf die Temperaturänderung — derselbe Anfangszustand einstellen wird, die Temperaturerhöhung wächst. — Auch Metalle, welche ja einen anderen thermischen Effect beim Ausziehen ergeben, müssen sich ebenso verhalten wie Kautschuk, d h. sich erwärmen.

7. Im Vorstehenden ist immer die Annahme gemacht, daß die Aenderungen continuirlich erfolgen, und die Continuität ist in der bekannten Weise dadurch definirt worden, daß mit einer unendlich kleinen Aenderung der einen Variabelen auch nur eine unendlich kleine Aenderung aller anderen verknüpft sei. Es fragt sich: innerhalb welcher Grenzen kann bei einem System von continuirlichen Aenderungen gesprochen werden, d. h. also auch, innerhalb welcher Grenzen sind obige Sätze anwendbar? Diese Frage tritt sehr häufig auf und speciell in der mechanischen Wärmetheorie macht es sich oft geltend, daß z. B. mit einer sehr kleinen Temperaturänderung (die wir practisch schon als mit einer in Formeln auftretenden unendlich kleinen unbedenklich identificirbar betrachten, weil sie an der Grenze des Meßbaren liegt) eine Aenderung einer anderen Variabelen, z. B. des Druckes, verknüpft ist, welche wir in anderen Fällen nicht als dem unendlich kleinen hinreichend nahestehend ansehen (z. B. 1 Atmosphäre).

1) Villari, Pogg. Ann. 144, p. 274. 1872.

Was die Rechnung verlangt, ist lediglich das Folgende: Sei $f(x, y) = z$ eine Function der Variabelen x, y; die nothwendige und ausreichende Bedingung, um eine Aenderung dx als unendlich klein ansehen zu dürfen, ist die, daß

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial f(x+dx,y)}{\partial y} \text{ und}$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x+dx,y)}{\partial x}$$

ist. Dies ist aber stets in demjenigen Gebiete der Fall, in welchem mit einem für die gewünschte Genauigkeit ausreichenden Maße die ganze Aenderung der Function als lineare Function der Aenderungen der Variabelen dargestellt werden kann. — Wie weit dieses Gebiet reicht, hängt also ab 1) von dem speciellen Fall; 2) von der gewünschten Genauigkeit; z. B. würde für die Beziehungen einer adiabatischen Temperatur- und Druckänderung von Wasser bei 0° und einer verlangten Genauigkeit von 1%, wenn das Gebiet rechtwinklig begrenzt werden soll, das Folgende gelten:

Es sei $z = v$ (Volum); $x = t$; $y = p$ genommen.

a) Nach den von F. Kohlrausch aus den Messungen der verschiedenen Beobachter zusammengestellten Zahlen ist die Aenderung der Dichte von 0° auf 1° = 0,00005;
„ 1° „ 2° = 0,00004.

Berechnet man hieraus eine Interpolationsgleichung zweiten Grades, so folgt: In der t-Axe geht das Gebiet von 0 bis 0,11° C.

b) Andererseits ist $\partial v / \partial p = -mv$. Setzt man m constant, so ergibt sich für 10 Atm. Druck eine Aenderung des Volums, welche von derjenigen, die sich berechnet, wenn man m als vom Druck abhängig einführt (unter Annahme linearer Abhängigkeit aus den Cailletet'schen Beobachtungen[1]), um weniger als 0,04% abweicht. Daß v von p abhängig ist, kommt nach den gestellten Bedingungen noch nicht in Betracht. Nach dieser Richtung wäre also eine Aenderung von 10 Atm. noch als unendlich klein anzusehen.

c) Es fragt sich noch, wie $\frac{\partial^2 v}{\partial t \, \partial p}$ sich verhält und ob nicht vielleicht durch seinen Werth eine Beschränkung des Gebietes eintritt. — Nach Grassi nimmt die Compressibilität des Wassers für Fortgang von 0° auf 1,5° ab um rund 2%, daher für 0,7° um 1%. Es tritt dadurch keine weitere Verengerung des Gebietes in der Richtung der Temperaturaxe ein. —

Das Resultat wäre also, daß bei der verlangten Genauigkeit

1) Vgl. Wüllner, Lehrbuch. 4. Aufl. Bd. I, p. 274 ff.

von 1% eine Temperaturzunahme von nur 0,11° C., dagegen eine Druckzunahme von mindestens 10 Atm. als unendlich kleine Aenderungen betrachtet werden können. (Die Bedingung *b*) allein würde etwa 200 Atm. zulassen.)

Das Gebiet ändert sich von Fall zu Fall; für Quecksilber z. B. würde es in der Richtung der Temperaturaxe weit größer sein, vielleicht dürften Aenderungen von mehreren Graden dort noch als unendlich klein betrachtet werden.

Bemerkung über die Erklärung des Diamagnetismus.

Von

Ferdinand Braun.

Zur Erklärung des Diamagnetismus sind im Wesentlichen drei Wege eingeschlagen worden. Faraday, seine erste Auffassung verlassend, welche W. Weber, Plücker etc. annahmen, definirte diamagnetische Stoffe dadurch, daß sie im Magnetfeld von Stellen größerer nach Stellen kleinerer Intensität getrieben werden, ohne über die Polarität derselben eine bestimmte Aussage zu machen[1]); W. Weber[2]), Plücker u. a. erklärten dagegen diese Thatsache dadurch, daß in Diamagneticis ein Nordpol einen Nordpol erzeuge; E. Becquerel[3]) endlich nahm auf Grund der Plücker'schen Versuche an, daß alle Körper, mit Einschluß des luftleeren Raumes, paramagnetisch seien; die diamagnetischen aber schwächer als das Vacuum. Die äußerste Grenze seiner Magnetisirungszahl wäre durch diejenige des bekannten stärksten Diamagneticums gegeben. Eine Magnetisirbarkeit des Vacuums ist in die Gleichungen für die Fortpflanzung electrischer Störungen durch Maxwell, v. Helmholtz u. a. der Allgemeinheit halber eingeführt worden.

Daß diamagnetische Körper unter dem Einfluß magnetisirender Kräfte sich in jeder Beziehung (ponderomotorische Wirkungen zwischen Magneten und Diamagneten, Induction) so verhalten, als ob sie gerade die entgegengesetzte Magnetisirung besäßen, welche ein paramagnetischer Stoff unter den gleichen Umständen zeigen würde, ist durch W. Weber, Tyndall u. a. in einer großen Anzahl

1) Faraday, Pogg. Ann. 82, p. 240. 1851. Exp. Res. § 2693.

2) W. Weber, Electrodyn. Maßb., insb. Diamagnetismus, p. 532, § 11.

3) E. Becquerel, Ann. chim. phys. (III) 28, p. 343. 1850.

von Versuchen nachgewiesen worden. Am häufigsten wird der von W. Weber in Pogg. Ann. Bd. 73, p. 245 (1848) beschriebene einfache Versuch angeführt. Einer an einem Coconfaden aufgehangenen kleinen Magnetnadel wird ein starker Hufeisenmagnet genähert, die Axe senkrecht zum magnetischen Meridian, in der ersten Hauptlage. Die Nadel nimmt dadurch eine andere Einstellung an. Nähert man von der anderen Seite der Nadel den Pol eines Stabmagneten, so kann man die Nadel in den magnetischen Meridian zurückführen und auch ihre Schwingungsdauer (Empfindlichkeit) beinahe wieder auf den ursprünglichen Werth bringen. Legt man jetzt zwischen die Pole des Hufeisenmagneten ein großes Stück Wismuth, so nimmt die Nadel eine Ablenkung an, als ob dic Pole des Hufeisenmagneten stärker geworden seien. Ersetzt man das Wismuth durch Eisen, so werden die Wirkungen die entgegengesetzten. W. Weber will damit eine Bestätigung seiner Auffassung, welche mit der ersten von Faraday angenommenen übereinstimmte, geben. Nachdem Faraday dieselbe verlassen hatte, waren diese und ähnliche Versuche für W. Weber der Beweis zu Gunsten seiner Annahme.

Die Versuche sind auch so aufgefaßt worden, als ob sie die factische Existenz einer solchen, der Magnetisirung in paramagnetischen Stoffen entgegengesetzten Vertheilung nachwiesen. Wenigstens sagt G. Wiedemann auch noch in der letzten Auflage seines werthvollen Werkes[1]) bezüglich der Hypothese Becquerel's: „Diese Erklärung ist durch den Nachweis der diamagnetischen Polarität widerlegt.“ Inwieweit die Autoren der besten unserer größeren allgemeinen Lehrbücher sich dieser Ansicht anschließen, geht nicht klar aus dem Inhalt derselben hervor. Jedenfalls kann beim unbefangenen Leser leicht der Glaube entstehen, daß die thatsächliche Existenz entgegengesetzter Magnetisirung experimentell nachgewiesen sei, da von der Möglichheit einer anderen Auslegung nicht die Rede ist.

Dieser Umstand rechtfertigt es vielleicht, wenn ich mit zwei Worten darauf hinweise, daß eine derartige Entscheidung nicht vorliegt.

Sofern es sich um die Bewegung der Körper im Magnetfelde handelt, ist dies von vornherein klar und unbeanstandet. — Es kann ein Zweifel nur noch bestehen hinsichtlich der ponderomotorischen oder inducirenden Wirkung der diamagnetisch erregten Stoffe. Die Versuche würden entscheidend sein, wenn man von

1) G. Wiedemann, Electricität, Bd. III, p. 823.

einem erwiesen unmagnetisirbaren Medium ausgehen könnte. Sobald man aber überhaupt zugiebt, daß der leere Raum magnetisirbar sein könne, so verdrängen wir bei allen unseren Versuchen nur einen magnetisirbaren Körper durch einen gleich großen von anderer Magnetisirungszahl. Ein Analogon zum angeführten Weber'schen Versuche wäre also der folgende: Man setzt zwischen die Pole des Hufeisenmagneten ein Gefäß voll Eisenchloridlösung und verdrängt einen Theil dieser Flüssigkeit durch einen schwächer magnetisirbaren Körper. Es versteht sich von selbst, daß der Effect ebenso ist, als wenn man in Luft ein Stück Wismuth zwischen die Pole bringt. — Ich möchte übrigens bei dieser Gelegenheit darauf hinweisen, daß dieser gewöhnlich als Fundamentalversuch angeführte, so beschrieben wird, als ob er sehr einfach anzustellen sei. Dem ist nicht so. Faraday[1]) sagt darüber: „Ich habe diesen Versuch auf's Aengstlichste und Sorgfältigste wiederholt, aber niemals die geringste Spur einer Wirkung mit dem Wismuth erhalten.“ v. Ettingshausen[2]) hat an einer über 4000 Mm entfernten Scala mit Spiegelablesung nur 0,95 bis 1,4 Scalentheile constante Ablenkung erhalten, und ich selber habe mich überzeugt, daß man sehr sichere und von einander unabhängige Aufstellungen braucht (z. B. darf die Unterlage für den ziemlich schweren Wismuthbarren nicht gleichzeitig diejenige des Magneten sein, falls sie nicht sehr fest ist), wenn der Ursprung der beobachteten Wirkungen unzweifelhaft sein soll.

Die Versuche mit dem Diamagnetometer lassen ganz entsprechend den eben erwähnten eine doppelte Deutung zu. Bewegt man in der sonst leeren Röhre des Apparates einen Wismuthstab um seine eigene Länge nach unten, so ist das gerade so, als ob man die Röhre mit einer magnetischen Substanz, z. B. mit Eisenchloridlösung, füllte und statt des Wismuthstabes einen Glasstab bewegte, der schwächer paramagnetisch ist als die Eisenlösung. Bewegung eines Diamagneticums nach unten ist gerade so als Bewegung eines ebenso großen ferromagnetischen Körpers nach oben. Ein directer experimenteller Nachweis dieser Analogie wird nur deshalb auf Schwierigkeiten stoßen, weil die Magnetnadel des Diamagnetometers nicht mehr, wie bei seiner gewöhnlichen Benutzungsart, nach allen Seiten von Materie wesentlich gleicher Magnetisirungszahl (Luft, Kupferdraht, Messing, Glas) umgeben ist. Es wird vielmehr durch die Eisenchloridlösung eine Störung eintreten.

---

1) Faraday, Pogg. Ann. 82, p. 239. 1851. Exp. Res. § 2690.

2) v. Ettinghausen, Wied. Ann. 17, p. 303. 1882.

Uebrigens ist für die Wirkung alles so vollständig gegeben, daß der Versuch nichts lehren kann, was nicht bequemer auf dem Wege einer verhaltnißmäßig einfachen Rechnung mit ausreichender Genauigkeit zu ermitteln wäre.

Daß auch die Inductionswirkungen diamagnetischer Körper in der doppelten Weise gleich gut erklärt werden können, ist einleuchtend.

Bis vor kurzer Zeit war, meines Wissens, kein Versuch bekannt, welcher eine Entscheidung darüber gäbe, ob diamagnetische und paramagnetische Körper sich durch den entgegengesetzten Sinn der Magnetisirung unterscheiden oder dadurch, daß die Magnetisirungszahl der ersteren kleiner, die der letzteren größer als diejenige des Vacuums ist. Man konnte sich also höchstens durch Wahrscheinlichkeitsgründe leiten lassen. Daß der Magnetismus mit steigender Temperatur abnimmt, der Diamagnetismus im Allgemeinen aber gleichfalls, dürfte eher für die erstere Annahme sprechen. Auch sollte man nach Analogie der Becquerel'schen Hypothese erwarten, daß wir auch Körper kennten, welche durch Influenz seitens electrisirter abgestoßen würden. Die Beobachtungen von O. Tumlirz[1]) dagegen würden, wenn die vom Verfasser gegebene Erklärung wirklich die einzig mögliche ist, ein directer Beweis für die Becquerel'sche Auffassung sein.

Ein Versuch über Lichtemission glühender Körper.

Von

Ferdinand Braun.

Bedeckt man eine kleine Stelle, etwa einige Quadratcentimeter, eines Porzellangegenstandes mit der gewöhnlichen schwarzen Farbe der Porzellanmaler[2]) und erhitzt in einer allseitig, bis auf eine kleine röhrenförmige Oeffnung, die als Schauloch dient, geschlossenen Muffel, so beobachtet man Folgendes: Sobald die ersten Anfänge der Rothgluth sich einstellen, fängt das Porzellan an zu leuchten.

---

1) Tumlirz, Wied. Ann. 27, p. 133. 1886.

2) Diese ist ein Gemenge mehrerer Metalloxyde mit einem „Fluß", d. h. einem leicht schmelzbaren Silicat oder Borat. Sie wird mit etwas frischem Terpentinöl, dem event. noch etwas „Dicköl" zugesetzt, zu einem weichen Brei verrieben und mit dem Pinsel aufgestrichen. „Dicköl" nennen die Porzellanmaler die Flüssigkeit, welche allmählich über den Rand der Gefäße kriegt, in welchen Terpentinöl an offener Luft steht – wahrscheinlich ein Terpentinölhydrat.

Der schwarze Flecken hebt sich wenig von demselben ab. Mit steigender Temperatur wird die Lichtemission des Porzellans intensiver und man übersieht den ganzen Muffelinhalt, als wenn er von außen schwach beleuchtet wäre. Steigert man die Hitze noch mehr, so wird der schwarze Farbfleck schwächer und nach Durchlaufen eines verhältnißmäßig kleinen Temperaturintervalles hebt sich derselbe so wenig mehr von Porzellan ab, daß derjenige, welcher die Erscheinung zum ersten Male sieht, denselben vollständig verschwunden glaubt. Erst wenn man einen brennenden Spahn oder eine Gasflamme in die Muffel einführt, überzeugt man sich, daß derselbe noch schwarz (mit einer tief dunkelrothen, rostbraunen Nüance) auf hellem Grunde vorhanden ist. Diese Erscheinung, die leicht zum Erkennen bestimmter Temperaturen benutzt werden kann, tritt ein bei einer Temperatur, welche ich auf etwa 800° C. schätze. Steigert man die Temperatur noch mehr, so eilt nun die Lichtemission des schwarzen Fleckens derjenigen des Porzellans voran und bei etwa 1000 bis 1100° C. scheint er hell, weiß strahlend auf dem hellrosenroth glühenden Porzellan. Bei Einführen eines brennenden Körpers in die Muffel sieht er wieder dunkel auf hell aus. — Andere Porzellanfarben z. B. Purpur geben ähnliche Erscheinungen; es genügt sogar ein Tintenstrich (der in Eisenoxyd übergeht, das sich glänzend einbrennt[1]), aber kein Stoff gibt sie so intensiv und so wenig durch Reflexe störend, wie die erwähnte Farbe.

Die Erscheiuung erklärt sich einfach: Porzellan ist bei gewöhnlicher Temperatur und auch bei höherer Temperatur durchlässig für leuchtende Strahlen, das schwarze Gemenge der Metalloxyde dagegen für dieselben undurchsichtig, wovon man sich an einem bemalten, in der Gasflamme glühend gemachten Porzellantiegel leicht überzeugen kann. In demselben Maße als die leuchtenden Strahlen mit steigender Temperatur an Intensität im Glühlicht gewinnen, steigert sich daher die Lichtemission zu Gunsten des schwarzen Fleckes. Da er bei Beleuchtung mit einer Quelle höherer Temperatur immer noch schwarz erscheint, so folgt, daß er für die Strahlen derselben immer noch größeres Absorptionsvermögen wie Porzellan besitzt, d. h. mit weitergehender Glühhitze würde er, falls er nicht sonst eine Aenderung im Absorptionsvermögen erleidet, stets noch an Helligkeit gewinnen.

Der Versuch läßt sich natürlich auch im verdunkelten Raume

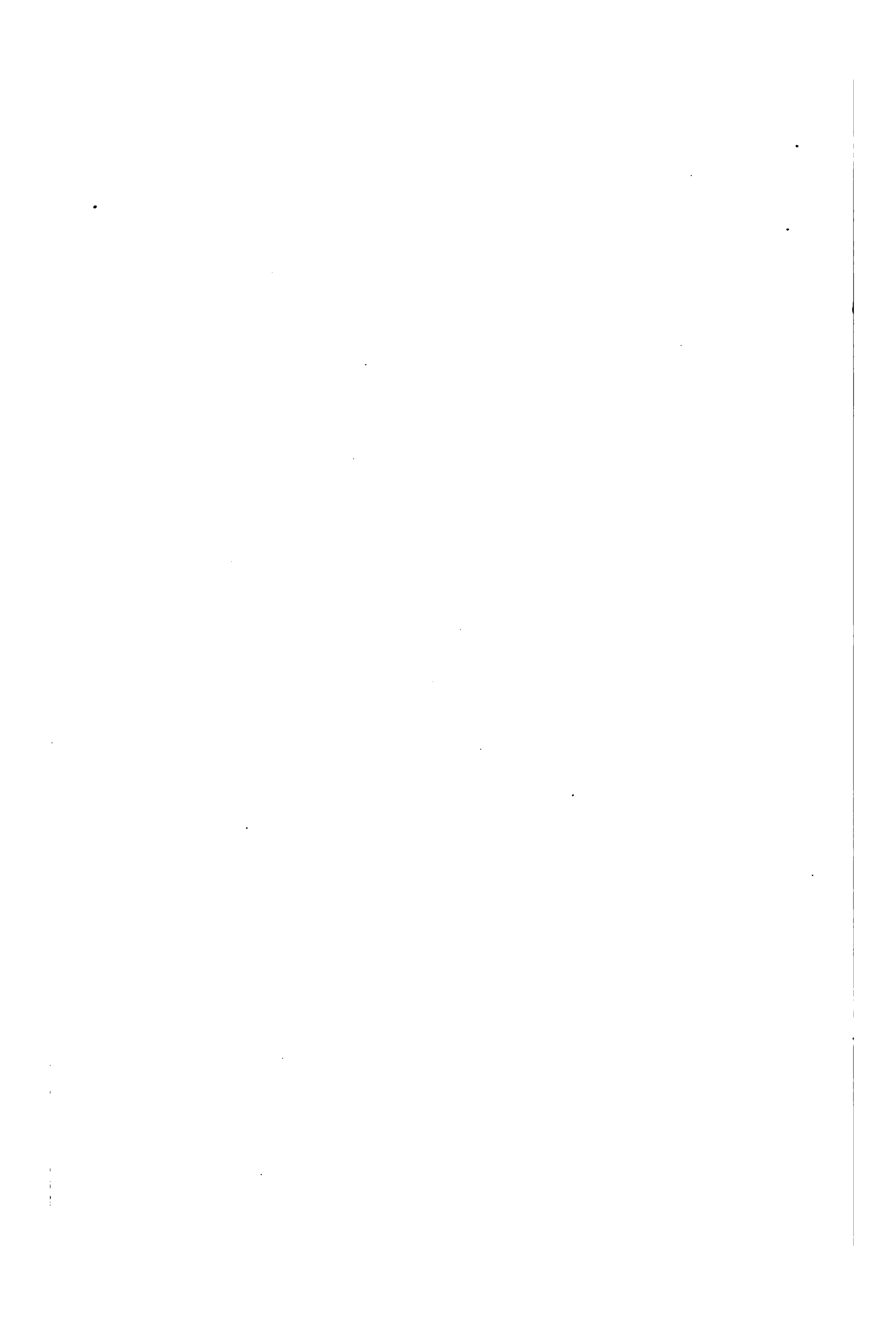
---

1) Der Tyndall'sche Versuch, daß ein Tintenfleck auf glühendem Platin heller leuchtet als das Merall, ist kein Analogon. Er erklärt sich aus der Rauhigkeit der Oberfläche.

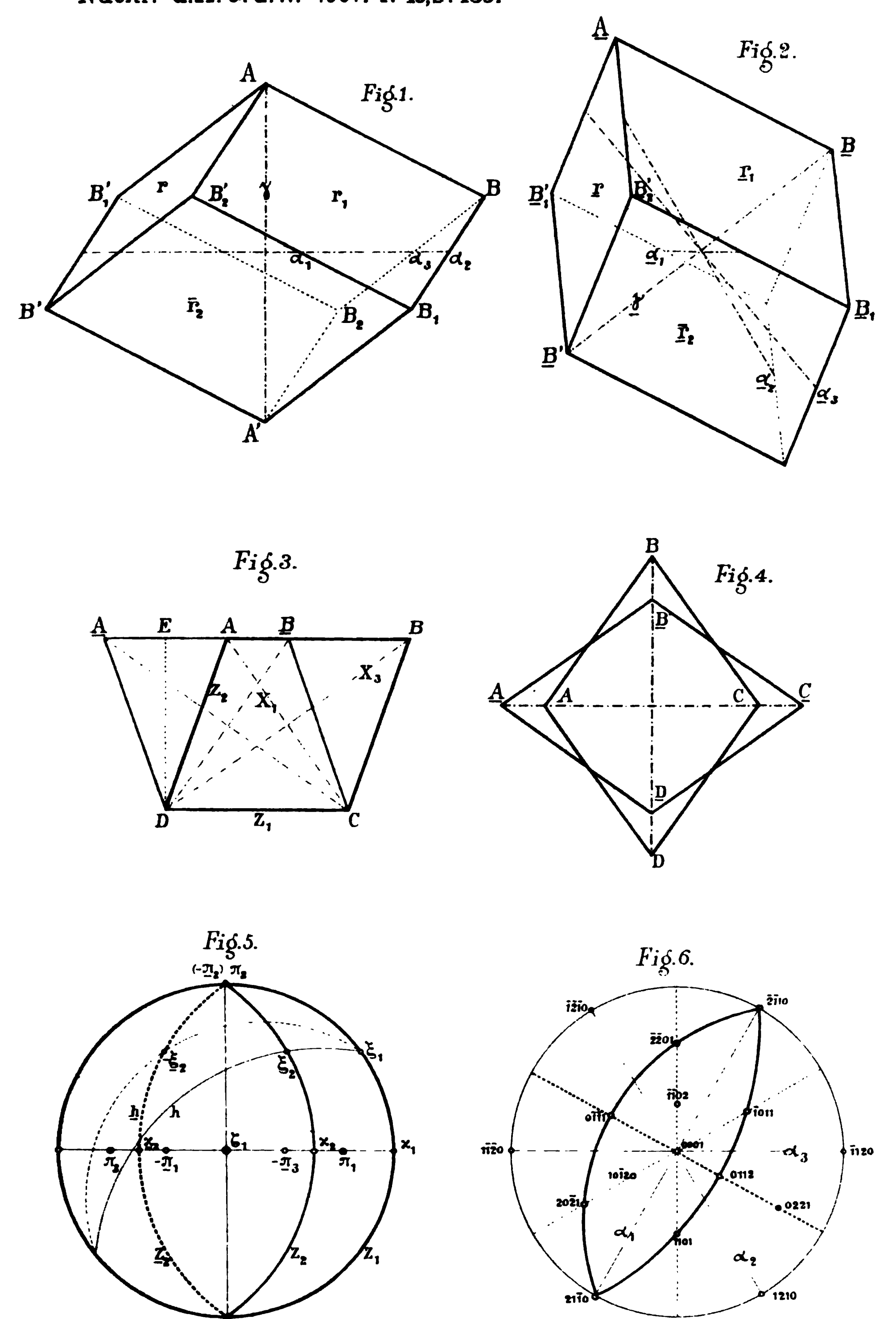
mit einem glühend gemachten Porzellanscherben zeigen und empfiehlt sich so als instructiver Vorlesungsversuch. Ich finde, daß er leidlich gelingt, wenn man einen größeren Porzellantiegel innen bemalt und in der Bunsenflamme erhitzt. Doch tritt das Verschwinden des Schwarz schlecht heraus; auch bekommt man bei freiem Erhitzen in der Flamme keine ausreichend hohe Temperatur, um den Fleck auf mehr als eine dunkle Rothgluth zu bringen. Dagegen sieht man dann sehr schön, wie ein Goldfleck bei ca. 800° ein intensiv grünliches Licht (wie eine reine Oberfläche geschmolzenen Kupfers) ausstrahlt, welches bei abnehmender Temperatur in ein tiefes Dunkelblau übergeht. Die Farben erinnern durchaus an die Durchlaßfarben dünner Goldschichten. Platin leuchtet beim Abkühlen lange intensiver als das Porzellan; das Licht verschwindet ebenso, durch ein schwaches Roth hindurchgehend, wie das der anderen festen undurchsichtigen Körper. Das Verhalten von Gold und Platin zeigt deutlich, daß beim ersteren gewissen Strahlengattungen eine specifische Emission zukommt.

Inhalt von Nr. 15.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).

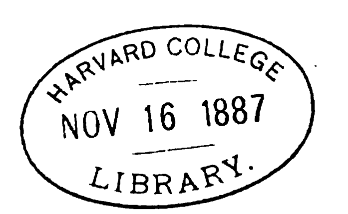


Nachr. d.K.G.d.W. 1887. N°15, S. 435.



Th. Liebisch gez.

Lith. Anst. v. E. Kranrich


HARVARD COLLEGE
NOV 16 1887
LIBRARY.



Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

15. October. | № 16. | 1887.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 2. Juli 1887.

Resultate aus den Beobachtungen der magnetischen Deklination, welche während der Jahre 1844 bis 1886 zu Klausthal angestellt sind.

Von

Ludwig Holborn.

Vorgelegt von Ernst Schering.

Von Mai 1844 ab wurden zu Klausthal (geographische Breite = 51° 41′ N, östliche Länge von Greenwich = $41^m\,20^s$, Höhe über dem Meeresspiegel = 592 m) täglich zweimal, um 8^h am und 1^h pm Ortszeit, Beobachtungen der magnetischen Deklination angestellt. Mit Ausnahme des Zeitraumes von Januar 1852 bis September 1854 wurden dieselben ununterbrochen bis Ende Juli 1886 fortgesetzt. Zu dieser Zeit trat wegen Umbau des Beobachtungsraumes und wegen Veränderungen am Instrument eine Unterbrechung in den Beobachtungen ein. Dasselbe ist ein Unifilar nach der Gaussischen Construction mit einem vierpfündigen Magnetstabe, dessen nähere Beschreibung sich in Borchers' Markscheidekunst und in O. Brathuhn's Markscheidekunst findet. Seit 1876 sind die täglich angestellten Beobachtungen in der „Berg- und Hüttenmännischen Zeitung“ (hrsg. von Bruno Karl und Friedrich Wimmer) veröffentlicht.

Herr Oberbergamtsmarkscheider Brathuhn hatte die Güte, die Monatsmittel des vorhandenen Beobachtungsmaterials an das hiesige erdmagnetische Observatorium im Manuscript einzusenden. Dieselben sind mir von Herrn Professor Schering für die vorliegende Arbeit freundlichst überlassen worden.

Tabelle A.

Monatsmittel der nord-westlichen

	8^h am	1^h pm	Mittel	Differenz	8^h am	1^h pm	Mittel	Differenz
	1844				**1847**			
Januar	—	—	—	—	17°21′ 9″	17°24′23″	17°22′46″	3′14″
Februar	—	—	—	—	19 58	24 49	22 23	4 51
März	—	—	—	—	16 42	26 35	21 38	9 53
April	—	—	—	—	14 26	26 30	20 28	12 4
Mai	17°35′ 8″	17°44′31″	17°39′49″	9′23″	17 18	28 47	23 3	11 29
Juni	34 28	44 21	39 24	9 53	14 25	25 19	19 52	10 54
Juli	34 23	44 1	39 12	9 38	15 28	25 22	20 25	9 54
August	34 1	44 9	39 5	10 8	13 57	26 27	20 12	12 30
Septbr.	34 21	43 37	38 59	9 16	11 45	24 18	18 2	12 33
Octbr.	34 14	41 14	37 44	7 00	11 2	22 43	16 53	11 41
Novbr.	35 48	39 33	37 40	3 45	12 50	19 45	16 18	6 55
Decbr.	35 30	38 53	37 11	3 23	13 4	17 46	15 25	4 42
	1845				**1848**			
Januar	17°35′50″	17°37′58″	17°36′54″	2′ 8″	17°12′24″	17°19′39″	17°16′ 2″	7′15″
Februar	34 39	39 54	37 16	5 15	12 4	19 28	15 46	7 24
März	34 7	43 28	38 48	9 21	17 10	21 9	14 9	13 59
April	32 40	45 49	39 14	13 9	5 1	20 19	12 40	15 18
Mai	32 13	44 2	38 8	11 49	5 19	19 13	12 16	13 54
Juni	31 45	43 15	37 30	11 30	2 16	17 21	9 48	15 5
Juli	31 50	42 28	37 9	10 38	2 33	18 5	10 19	15 32
August	32 49	43 59	38 24	11 10	3 29	19 21	11 25	15 52
Septbr.	33 00	42 20	37 40	9 20	3 42	17 54	10 48	14 12
Octbr.	31 56	39 35	35 45	7 29	4 51	15 32	10 12	10 41
Novbr.	33 00	37 13	35 6	4 13	6 22	11 56	9 9	5 34
Decbr.	32 56	36 15	34 36	3 19	6 7	11 17	8 42	5 10
	1846				**1849**			
Januar	17°32′ 1″	17°35′ 6″	17°33′34″	3′ 5″	17° 4′32″	17°12′49″	17° 8′40″	8′17″
Februar	31 30	35 21	33 26	3 51	3 17	12 12	7 45	8 55
März	28 13	38 5	33 9	9 52	00 1	14 0	7 00	13 59
April	26 9	39 13	32 41	13 4	16 57 3	14 12	5 38	17 9
Mai	25 4	37 50	31 27	12 46	58 11	12 19	5 19	14 8
Juni	24 36	35 58	30 17	11 22	56 48	11 2	3 55	14 14
Juli	23 57	35 41	29 49	11 44	57 45	10 12	3 58	12 27
August	20 37	32 25	26 31	11 48	58 28	9 32	4 00	11 4
Septbr.	20 56	30 55	25 56	9 58	57 37	8 27	3 2	10 50
Octbr.	21 7	28 48	24 58	7 41	58 52	8 32	3 42	9 40
Novbr.	21 24	26 43	24 4	5 19	17 00 8	5 20	2 44	5 12
Decbr.	21 26	24 43	23 5	3 17	00 9	3 53	2 1	3 44

Deklination zu Klausthal.

8^h am	1^h pm	Mittel	Differenz	8^h am	1^h pm	Mittel	Differenz	
1850				**1854**				
16°58′37″	17° 4′56″	17° 1′46″	6′19″	—	—	—	—	Januar
56 23	5 25	00 54	9 2	—	—	—	—	Februar
51 11	4 17	16 57 44	13 6	—	—	—	—	März
51 23	6 41	59 2	15 18	—	—	—	—	April
51 7	4 54	58 1	13 47	—	—	—	—	Mai
49 19	3 59	56 39	14 40	—	—	—	—	Juni
50 59	3 40	57 20	12 41	—	—	—	—	Juli
54 30	4 46	59 38	10 16	—	—	—	—	August
49 20	1 47	55 34	12 27	—	—	—	—	Septbr.
50 23	16 59 38	55 1	9 15	16°18′19″	16°24′32″	16°21′25″	6′13″	Octbr.
51 9	56 48	53 58	5 39	18 35	22 59	20 47	4 24	Novbr.
51 17	54 21	52 49	3 4	19 3	21 44	20 24	2 41	Decbr.
1851				**1855**				
16°49′17″	16°54′48″	16°52′ 2″	5′31″	16°17′58″	16°22′15″	16°20′ 7″	4′17″	Januar
49 6	54 53	52 0	5 47	17 50	22 0	19 55	4 10	Februar
46 28	55 47	51 8	9 19	15 53	24 38	20 16	8 45	März
43 33	57 29	50 31	13 56	16 32	24 58	20 45	8 26	April
43 19	55 11	49 15	11 52	12 47	22 14	17 31	9 27	Mai
43 11	55 2	49 6	11 51	12 7	21 24	16 46	9 17	Juni
42 52	54 16	48 34	11 24	11 58	21 37	16 48	9 39	Juli
42 52	54 6	48 29	11 14	11 38	21 30	16 34	9 52	August
43 39	52 41	48 10	9 2	11 38	20 16	15 57	8 38	Septbr.
43 40	52 50	48 15	9 10	11 52	18 54	15 23	7 2	Octbr.
43 24	48 14	45 49	4 50	11 24	15 57	13 41	4 33	Novbr.
44 14	47 16	45 45	3 2	8 24	11 0	9 42	2 36	Decbr.
1852				**1856**				
16°42′25″	16°47′25″	16°44′55″	5′ 0″	16°11′44″	16°15′33″	16°13′39″	3′49	Januar
41 17	47 1	44 9	5 44	10 57	15 29	13 13	4 32	Februar
39 7	49 21	44 14	10 14	9 13	16 17	12 45	7 4	März
36 30	49 53	43 12	13 23	6 37	17 53	12 15	11 16	April
35 37	47 5	41 21	11 28	7 5	15 21	11 13	8 16	Mai
34 46	46 38	40 42	11 52	4 44	14 35	9 39	9 51	Juni
34 57	45 39	40 18	10 42	6 53	15 46	11 20	8 53	Juli
34 51	45 52	40 22	11 1	5 58	14 40	10 19	8 42	August
34 55	44 54	39 55	9 59	3 30	12 36	8 3	9 6	Septbr.
34 43	44 25	39 34	9 42	3 45	11 23	7 34	7 38	Octbr.
36 18	42 4	39 11	5 46	4 44	8 15	6 29	3 31	Novbr.
33 17	36 47	35 2	3 30	4 33	7 18	5 56	2 45.	Decbr.

Tabelle A. Fortsetzung.

Monatsmittel der nord-westlichen

	8^h am	1^h pm	Mittel	Differenz	8^h am	1^h pm	Mittel	Differenz
	1857				1860			
Januar	16° 3'47"	16° 7'31"	16° 5'39"	3'44"	15°42' 2"	15°47'51"	15°44'56"	5'49"
Februar	2 53	8 10	5 31	5 17	40 41	47 50	44 16	7 9
März	00 54	8 57	4 55	8 3	37 20	51 27	44 23	14 7
April	15 58 23	9 21	3 52	10 58	34 17	49 29	41 53	15 12
Mai	57 4	8 10	2 37	11 6	37 37	51 17	44 27	13 40
Juni	56 42	7 25	2 4	10 43	36 35	52 10	44 22	15 35
Juli	56 29	6 46	1 37	10 17	36 58	51 7	44 2	14 9
August	56 22	7 9	1 45	10 47	36 49	51 11	44 0	14 22
Septbr.	56 29	5 27	0 58	8 58	37 5	49 55	43 20	12 50
Octbr.	56 50	4 6	0 28	7 16	37 45	48 33	43 9	10 48
Novbr.	57 9	2 33	15 59 51	5 24	37 40	43 42	40 41	6 2
Decbr.	56 42	0 12	58 27	3 30	38 16	42 21	40 18	4 5
	1858				1861			
Januar	15°55'23"	16° 0'29"	15°57'56"	5' 6"	15°38'18"	15°43' 8"	15°40'43"	4.50"
Februar	55 16	1 37	58 26	6 21	36 48	45 23	41 5	8 35
März	53 6	4 49	58 57	11 43	33 42	45 17	39 30	11 35
April	50 30	4 26	57 28	13 56	31 35	47 20	39 27	15 45
Mai	49 57	2 5	56 1	12 8	30 37	44 26	37 31	13 49
Juni	50 48	1 25	56 6	10 37	29 50	43 26	36 38	13 36
Juli	48 55	1 41	55 18	12 46	29 48	41 53	35 50	12 5
August	49 33	1 5	55 19	11 32	29 27	42 42	36 5	13 15
Septbr.	48 22	1 18	54 50	12 56	29 22	40 38	35 0	11 16
Octbr.	48 58	15 59 51	54 25	10 53	29 25	38 23	33 54	8 58
Novbr.	50 22	56 52	53 37	6 30	29 53	36 27	33 10	6 34
Decbr.	50 27	55 5	52 46	4 38	30 10	35 14	32 42	5 4
	1859				1862			
Januar	15°49'34"	15°55'38"	15°52'36"	6' 4"	15°29'28"	15°34'52"	15°32'10"	5'24"
Februar	47 44	56 16	52 0	8 32	29 5	35 15	32 10	6 10
März	45 12	58 43	51 58	13 31	26 5	35 57	31 1	9 52
April	41 21	59 39	50 30	18 18	24 51	36 57	30 54	12 6
Mai	42 54	56 32	49 43	13 38	23 54	34 18	29 6	10 24
Juni	41 41	55 30	48 36	13 49	22 33	35 12	28 52	12 39
Juli	41 36	54 52	48 14	13 16	22 12	34 5	28 8	11 53
August	41 10	55 48	48 29	14 38	21 56	34 58	28 27	13 2
Septbr.	41 18	54 44	48 1	13 26	22 20	33 22	27 51	11 2
Octbr.	41 42	52 28	47 5	10 46	18 25	26 48	22 36	8 23
Novbr.	42 20	50 10	46 15	7 50	19 36	25 4	22 20	5 28
Decbr.	42 57	48 2	45 29	5 5	19 12	23 16	21 14	4 4

Deklination zu Klausthal.

8^h am	1^h pm	Mittel	Differenz	8^h am	1^h pm	Mittel	Differenz	
	1863				**1866**			
15°18′25″	15°22′49″	15°20′37″	4′24″	14°55′39″	14°59′46″	14°57′42″	4′ 7″	Januar
17 19	23 25	20 22	6 6	53 57	15 2 8	58 2	8 11	Februar
14 48	25 53	20 20	11 5	53 19	00 58	57 9	7 39	März
12 33	25 36	19 4	13 3	50 33	2 16	56 24	11 43	April
11 33	24 14	17 53	12 41	49 48	14 59 59	54 53	10 11	Mai
10 48	22 28	16 38	11 40	48 50	58 39	53 45	9 49	Juni
10 44	21 43	16 14	10 59	49 00	58 8	53 34	9 8	Juli
11 39	21 34	16 36	9 55	49 18	58 37	53 58	9 19	August
12 8	21 9	16 39	9 1	49 36	56 35	53 6	6 59	Septbr.
11 31	19 43	15 37	8 12	49 14	55 32	52 23	6 18	Octbr.
12 6	16 42	14 24	4 36	48 40	52 36	50 38	3 56	Novbr.
12 34	15 43	14 9	3 9	48 57	51 51	50 24	2 54	Decbr.
	1864				**1867**			
15°11′12″	15°15′20″	15°13′16″	4′ 8″	14°47′50″	14°51′58″	14°49′54″	4′ 8″	Januar
11 6	15 40	13 23	4 34	46 18	51 59	49 8	5 41	Februar
7 23	18 54	13 9	11 31	44 40	53 1	48 51	8 21	März
4 51	17 21	11 6	12 30	42 13	52 32	47 23	10 19	April
4 23	15 48	10 5	11 25	42 1	51 30	46 45	9 29	Mai
3 16	14 43	9 0	11 27	41 3	50 39	45 51	9 36	Juni
3 45	13 9	8 27	9 24	40 17	50 7	45 12	9 50	Juli
3 51	14 11	9 1	10 20	40 41	50 20	45 30	9 39	August
4 39	12 34	8 36	7 55	40 44	48 43	44 43	7 59	Septbr.
4 48	11 51	8 19	7 3	41 10	46 42	43 56	5 32	Octbr.
4 25	9 38	7 1	5 13	40 41	44 45	42 43	4 4	Novbr.
4 35	7 6	5 51	2 31	40 15	43 10	41 42	2 55	Decbr.
	1865				**1868**			
15° 4′53″	15° 7′52″	15° 6′22″	2′59″	14°39′ 6″	14°42′37″	14°40′52″	3′31″	Januar
3 26	8 40	6 3	5 14	37 53	43 7	40 30	5 14	Februar
00 34	11 14	5 54	10 40	36 11	45 2	40 37	8 51	März
14 58 41	10 42	4 41	12 1	33 2	46 17	39 40	13 15	April
57 54	8 53	3 23	10 59	33 30	43 44	38 37	10 14	Mai
56 39	6 55	1 47	10 16	32 37	42 48	37 43	10 11	Juni
57 7	5 55	1 31	8 48	32 25	42 8	37 17	9 43	Juli
55 58	6 28	1 13	10 30	31 0	42 24	36 42	11 24	August
56 32	5 40	1 6	9 8	32 20	40 55	36 38	8 35	Septbr.
57 46	3 18	00 32	5 32	31 30	38 37	35 4	7 7	Octbr.
56 44	1 12	14 58 58	4 28	31 22	36 32	33 57	5 10	Novbr.
56 44	14 59 40	58 12	2 56	31 58	35 42	33 50	3 44	Decbr.

Tabelle A. Fortsetzung.

Monatsmittel der nord-westlichen

	8^h am	1^h pm	Mittel	Differenz	8^h am	1^h pm	Mittel	Differenz
	1869				**1872**			
Januar	14°31′ 5″	14°35′31″	14°33′18″	4′26″	14° 8′13″	14°14′ 6″	14°11′10″	5′53″
Februar	30 3	35 42	32 53	5 39	6 54	15 0	10 58	8 6
März	25 5	32 58	29 2	7 53	4 28	17 3	10 46	12 35
April	25 4	38 24	31 44	13 20	2 9	17 1	9 35	14 52
Mai	25 3	36 38	30 52	11 35	1 26	16 35	9 1	15 9
Juni	22 53	35 50	29 21	12 57	00 39	15 23	8 0	14 44
Juli	22 29	34 35	28 32	12 6	00 31	13 23	6 57	12 52
August	23 7	35 6	29 7	11 59	13 59 12	13 21	6 17	14 9
Septbr.	23 47	35 46	29 47	11 59	59 25	12 25	5 55	13 0
Octbr.	24 34	33 32	29 3	8 58	59 53	10 19	5 6	10 26
Novbr.	26 19	31 28	28 53	5 9	59 54	6 56	3 25	7 2
Decbr.	24 33	28 12	26 23	3 39	58 38	3 43	1 11	5 5
	1870				**1873**			
Januar	14°21′38″	14°26′52″	14°24′15″	5′14″	13°59′ 3″	14° 4′34″	14° 1′49″	5′31″
Februar	20 29	28 48	24 39	8 19	59 39	6 17	2 58	6 38
März	18 3	31 47	24 55	13 44	57 0	6 26	1 43	9 26
April	14 51	31 40	23 16	16 49	53 11	5 21	13 59 16	12 10
Mai	13 31	31 11	22 21	17 40	54 55	4 43	59 49	9 48
Juni	14 26	29 43	22 5	15 17	55 8	3 59	59 34	8 51
Juli	13 18	28 38	20 58	15 20	54 22	3 47	59 5	9 25
August	13 32	29 9	21 21	15 37	54 50	2 8	58 29	7 18
Septbr.	14 5	27 47	20 56	13 42	52 19	13 59 53	56 6	7 34
Octbr.	13 48	26 11	20 0	12 23	55 4	14 2 18	58 41	7 14
Novbr.	14 51	24 51	19 51	10 0	54 8	13 58 49	56 29	4 41
Decbr.	16 14	21 37	18 56	5 23	53 46	57 10	55 28	3 24
	1871				**1874**			
Januar	14°15′29″	14°21′46″	14°18′37″	6′17″	13°53′ 9″	13°58′ 5″	13°55′37″	4′56″
Februar	13 21	22 46	18 4	9 25	53 15	57 52	55 34	4 37
März	10 38	24 39	17 39	14 1	51 17	59 13	55 15	7 56
April	7 16	25 41	16 29	18 25	48 33	14 00 42	54 39	12 9
Mai	8 19	23 40	16 0	15 21	47 15	13 57 29	52 23	10 14
Juni	6 39	21 50	14 15	15 11	46 59	56 42	51 51	9 43
Juli	7 30	21 8	14 19	13 38	46 47	56 9	51 28	9 22
August	6 47	21 27	14 7	14 40	46 17	56 46	51 32	10 29
Septbr.	6 59	19 35	13 17	12 36	45 52	55 31	50 33	9 39
Octbr.	8 1	18 29	13 15	10 28	45 34	53 30	49 32	7 56
Novbr.	9 12	15 59	12 36	6 47	46 12	51 48	49 0	5 36
Decbr.	8 24	13 43	11 4	5 19	45 35	51 32	48 34	5 57

Deklination zu Klausthal.

8h am	1h pm	Mittel	Differenz	8h am	1h pm	Mittel	Differenz	
	1875				1878			
13°45′12″	13°51′33″	13°48′23″	6′21″	13°21′17″	13°23′55″	13°22′36″	2′38″	Januar
44 51	52 35	48 43	7 44	20 26	24 48	22 37	4 22	Februar
43 25	52 19	47 53	8 54	18 38	25 52	22 15	7 14	März
40 10	52 35	46 23	12 25	16 55	27 00	21 58	10 5	April
40 29	51 24	45 57	10 55	16 11	24 28	20 20	8 17	Mai
39 38	50 34	45 6	10 56	15 25	25 10	20 18	9 45	Juni
39 55	48 45	44 20	8 50	16 9	25 14	20 41	9 5	Juli
39 5	49 26	44 16	10 21	16 10	25 13	20 42	9 3	August
38 12	47 50	43 1	9 38	15 25	23 41	19 33	8 16	Septbr.
38 13	47 46	42 59	9 33	17 00	21 57	19 29	4 57	Octbr.
38 57	46 4	42 31	7 7	16 21	19 39	18 00	3 18	Novbr.
39 34	43 32	41 33	3 58	15 16	18 10	16 43	2 54	Decbr.
	1876				1879			
13°38′ 2″	13°42′ 4″	13°40′ 3″	4′ 2″	13°15′ 2″	13°18′14″	13°16′38″	3′12″	Januar
37 41	41 38	39 39	3 57	14 2	18 14	16 18	4 31	Februar
35 59	43 55	39 57	7 56	11 48	19 41	15 45	7 53	März
33 39	44 2	38 51	10 23	10 18	20 7	15 13	9 49	April
34 10	42 6	38 8	7 56	9 37	18 50	14 14	9 13	Mai
32 26	42 19	37 23	9 53	8 52	18 56	13 54	10 4	Juni
31 54	41 47	36 50	9 53	7 17	16 19	11 48	9 2	Juli
31 20	41 16	36 18	9 56	7 49	17 40	12 45	9 51	August
30 14	38 1	34 8	7 47	7 58	16 31	12 15	8 33	Septbr.
30 31	37 23	33 57	6 52	7 12	15 1	11 7	7 49	Octbr.
30 26	34 56	32 46	4 20	8 11	11 48	10 00	3 37	Novbr.
30 32	32 56	31 44	2 24	7 51	10 21	9 9	2 36	Decbr.
	1877				1880			
13°29′13″	13°32′25″	13°30′49″	3′12″	13° 8′11″	13°11′40″	13° 9′56″	3′29″	Januar
28 46	32 46	30 46	4 00	6 32	11 46	9 9	5 14	Februar
27 00	34 20	30 40	7 20	6 11	13 28	9 50	7 17	März
24 11	33 37	28 54	9 26	2 36	13 33	8 5	10 57	April
23 54	32 49	28 22	8 55	1 24	12 5	6 45	10 41	Mai
22 53	32 19	27 36	9 26	00 44	11 20	6 2	10 36	Juni
23 12	31 51	27 32	8 39	00 56	10 33	5 45	9 37	Juli
24 5	33 18	28 42	9 13	1 53	10 36	6 15	8 43	August
23 49	32 3	27 56	8 14	00 40	10 13	5 27	9 33	Septbr.
23 31	30 47	27 9	7 16	00 26	9 30	4 58	9 4	Octbr.
24 8	28 13	26 11	4 5	1 45	6 53	4 19	5 8	Novbr.
22 42	24 41	23 42	1 59	1 34	5 48	3 41	4 14	Decbr.

Tabelle A. Fortsetzung.

Monatsmittel der nord-westlichen Deklination zu Klausthal.

1881

	8^h am	1^h pm	Mittel	Differenz
Januar	13° 1' 7"	13° 5'27"	13° 3'17"	4'20"
Februar	00 1	5 27	2 44	5 26
März	12 57 55	6 33	2 14	8 38
April	55 58	5 47	00 53	9 49
Mai	54 31	4 20	12 59 26	9 49
Juni	53 27	5 8	59 18	11 41
Juli	54 3	5 28	59 46	11 25
August	54 22	6 13	13 00 18	11 51
Septbr.	53 55	4 58	12 59 27	11 3
Octbr.	54 1	3 35	58 48	9 34
Novbr.	55 24	00 59	58 12	5 35
Decbr.	55 22	12 58 59	57 11	3 37

1882

	8^h am	1^h pm	Mittel	Differenz
Januar	12°54'19"	12°58'50"	12°56'35"	4'31"
Februar	53 9	13 1 2	57 6	7 53
März	52 10	2 11	57 11	10 1
April	50 27	2 14	56 21	11 47
Mai	49 34	0 54	55 14	11 20
Juni	49 38	59 40	54 39	10 2
Juli	48 57	58 45	53 51	9 48
August	47 54	58 40	53 17	10 16
Septbr.	47 46	58 39	53 13	10 53
Octbr.	48 12	56 49	52 31	8 37
Novbr.	48 41	55 20	52 1	6 39
Decbr.	48 37	53 6	50 52	4 29

1883

	8^h am	1^h pm	Mittel	Differenz
Januar	12°48'33"	12°53'37"	12°51' 5"	5' 4"
Februar	48 39	54 0	51 20	5 21
März	48 10	56 26	52 18	8 16
April	45 54	57 49	51 52	11 55
Mai	46 28	56 36	51 32	10 8
Juni	46 4	56 29	51 17	10 25
Juli	45 50	56 48	51 19	10 58
August	47 13	57 51	52 32	10 38
Septbr.	45 37	56 7	50 52	10 30
Octbr.	44 55	55 17	50 6	10 22
Novbr.	46 10	53 18	49 44	7 8
Decbr.	47 6	51 16	49 11	4 10

1884

	8^h am	1^h pm	Mittel	Differenz
Januar	12°45'55"	12°51'57"	12°48'56"	6' 2"
Februar	40 48	48 20	44 34	7 32
März	37 46	49 27	43 37	11 41
April	36 12	50 36	43 24	14 24
Mai	37 41	49 3	43 22	11 22
Juni	34 34	48 25	41 30	13 51
Juli	36 45	47 22	42 4	10 37
August	38 49	49 55	44 22	11 6*
Septbr.	39 3	50 47	44 55	11 44*
Octbr.	42 13	51 7	46 40	8 54*
Novbr.	46 40	51 52	49 16	5 12*
Decbr.	37 8	41 0	39 5	3 51

1885

	8^h am	1^h pm	Mittel	Differenz
Januar	12°37' 9"	12°41' 0"	12°39' 5"	3'51"
Februar	36 9	41 24	38 47	5 15
März	33 39	43 3	38 21	9 24
April	34 24	45 6	39 45	10 42
Mai	32 8	43 36	37 52	11 28
Juni	30 6	41 47	35 57	11 41
Juli	29 37	41 10	35 24	11 33
August	30 37	41 9	35 52	10 32
Septbr.	30 49	39 23	35 6	8 34
Octbr.	30 56	37 50	34 23	6 54
Novbr.	31 31	36 29	34 00	4 58
Decbr.	30 53	34 13	32 33	3 20

1886

	8^h am	1^h pm	Mittel	Differenz
Januar	12°30'42"	12°34'59"	12°32'51"	4'17"
Februar	29 49	35 26	32 38	5 37
März	28 17	37 23	32 50	9 6
April	26 36	36 53	31 45	10 17
Mai	26 7	36 18	31 13	10 11
Juni	25 17	34 45	30 1	9 28
Juli	24 49	33 24	29 7	8 35

*) Eine auffallende, wahrscheinlich durch lokale Ursachen hervorgerufene Unregelmäßigkeit. [Bemerkung des Herrn Brathuhn.]

Aus den in dieser Tabelle A enthaltenen Werthen für die Differenz habe ich zunächst den jährlichen Gang dargestellt, welchen die tägliche Amplitude der Deklination, nämlich den Unterschied zwischen der Deklination für 1^h pm und der für 8^h am aufweist.

Da die Amplitude neben dieser jährlichen Periode noch andere von größerer Dauer besitzt, die wir weiter unten behandeln werden, so kam es zuerst darauf an, die beobachteten Werthe von dem Einfluß der größeren Perioden zu befreien, um die jährliche Periode rein für sich darzustellen. Zu diesem Zweck sind für die Intervalle von sechs zu sechs Monat die Jahresmittel der Amplitude berechnet. Da, wo die Reihe dieser Mittel fortlaufend ab- oder zunimmt, ist als jährliche Aenderung der Unterschied zwischen zwei um ein Jahr auseinanderliegenden Jahresmitteln an die Monate des betreffenden Jahres angebracht, nachdem derselbe vorher proportional der Zeit für dieselben berechnet war. Als Epoche für diese Reduction ist für jede Jahresreihe der erste Juli angenommen. In der Nähe der höchsten und tiefsten Punkte, die verschiedentlich in der Reihe der Jahresmittel auftreten, ist die einfache Annahme, daß die jährliche Aenderung innerhalb eines Jahrs proportional der Zeit fortschreitet, nicht befolgt, sondern dieselbe genauer berechnet. Tabelle B auf Seite 478 stellt die so erhaltenen Correctionen dar, Tabelle C auf Seite 480 die Monatsmittel der täglichen Amplitude, welche den jährlichen Gang für sich geben, reducirt auf den ersten Juli des betreffenden Jahres.

Soweit die Jahrgänge der Beobachtungen vollständig waren, ist aus diesen Werthen für jedes Jahr eine Formel hergeleitet, welche den jährlichen Gang darstellt.

Die darnach folgende Tabelle D auf Seite 482 giebt für jedes Kalenderjahr die Werthe der Constanten $A \ldots a \ldots b \ldots B \ldots$ in den 41 Formeln, welche folgende Form haben:

$$\begin{aligned} A_0 + a_1 \cos\psi + a_2 \cos 2\psi + a_3 \cos 3\psi \\ + b_1 \sin\psi + b_2 \sin 2\psi + b_3 \sin 3\psi = \\ A_0 + A_1 \sin(B_1 + \psi) + A_2 \sin(B_2 + 2\psi) + A_3 \sin(B_3 + 3\psi) \end{aligned}$$

und welche jede den Unterschied der nord-westlichen Deklination für 1^h pm vermindert um die Deklination um 8^h am darstellt.

Hier bedeutet ψ die Anzahl der seit Mitte Januar des betreffenden Jahres verflossenen Monate multiplicirt mit 30^0.

Tabelle B.

Correctionen für die jährliche Aenderung der täglichen

Jahr	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni
1845	+ 0'17	+ 0'14	+ 0'11	+ 0'08	+ 0'05	+ 0'02
1846	+ 0.24	+ 0.20	+ 0.16	+ 0.12	+ 0.06	+ 0.02
1847	+ 1.22	+ 1.00	+ 0.78	+ 0.56	+ 0.34	+ 0.02
1848	+ 0.93	+ 0.76	+ 0.59	+ 0.42	+ 0.25	+ 0.08
1849	— 0.71	— 0.58	— 0.45	— 0.32	— 0.19	— 0.06
1850	— 0.66	— 0.54	— 0.42	— 0.30	— 0.18	— 0.06
1851	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1852	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1853	...	...	...	...	...	...
1854	...	...	...	...	...	...
1855	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1856	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1857	+ 0.60	+ 0.49	+ 0.38	+ 0.27	+ 0.16	+ 0.05
1858	+ 1.00	+ 0.82	+ 0.64	+ 0.45	+ 0.27	+ 0.09
1859	+ 0.44	+ 0.36	+ 0.28	+ 0.20	+ 0.12	+ 0.04
1860	— 0.22	— 0.18	— 0.14	— 0.10	— 0.06	— 0.02
1861	— 0.65	— 0.53	— 0.41	— 0.29	— 0.17	— 0.05
1862	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1863	— 0.44	— 0.36	— 0.28	— 0.20	— 0.12	— 0.04
1864	— 0.13	— 0.11	— 0.09	— 0.07	— 0.05	— 0.03
1865	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1866	— 0.17	— 0.14	— 0.11	— 0.08	— 0.05	— 0.02
1867	+ 0.19	+ 0.16	+ 0.12	+ 0.09	+ 0.05	+ 0.02
1868	+ 0.39	+ 0.32	+ 0.25	+ 0.18	+ 0.11	+ 0.04
1869	+ 1.16	+ 0.95	+ 0.74	+ 0.53	+ 0.32	+ 0.11
1870	+ 1.53	+ 1.19	+ 0.88	+ 0.60	+ 0.36	+ 0.16
1871	— 0.61	— 0.50	— 0.39	— 0.28	— 0.17	— 0.06
1872	— 0.77	— 0.63	— 0.49	— 0.35	— 0.21	— 0.07
1873	— 0.99	— 0.81	— 0.63	— 0.45	— 0.27	— 0.09
1874	+ 0.66	+ 0.54	+ 0.42	+ 0.30	+ 0.18	+ 0.06
1875	— 0.88	— 0.72	— 0.56	— 0.40	— 0.24	— 0.08
1876	— 0.44	— 0.36	— 0.28	— 0.20	— 0.12	— 0.04
1877	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1878	— 0.33	— 0.27	— 0.21	— 0.15	— 0.09	— 0.03
1879	+ 0.27	+ 0.22	+ 0.17	+ 0.12	+ 0.07	+ 0.02
1880	+ 0.27	+ 0.22	+ 0.17	+ 0.12	+ 0.07	+ 0.02
1881	+ 0.47	+ 0.38	+ 0.30	+ 0.21	+ 0.13	+ 0.04
1882	— 0.25	— 0.20	— 0.15	— 0.11	— 0.06	— 0.02
1883	+ 0.65	+ 0.53	+ 0.41	+ 0.29	+ 0.17	+ 0.05
1884	— 0.55	— 0.45	— 0.35	— 0.25	— 0.15	— 0.05
1885	— 0.33	— 0.27	— 0.21	— 0.15	— 0.09	— 0.03

Amplitude für die Epoche des 1. Juli jeden Jahres.

Juli	August	September	October	November	December	Jahr
— 0′02	— 0′05	— 0′08	— 0′11	— 0′14	— 0′17	1845
— 0.02	— 0.06	— 0.12	— 0.16	— 0.20	— 0.24	1846
— 0.12	— 0.34	— 0.56	— 0.78	— 1.00	— 1.22	1847
— 0.08	— 0.25	— 0.42	— 0.59	— 0.76	— 0.93	1848
+ 0.06	+ 0.19	— 0.32	— 0.45	— 0.58	— 0.71	1849
+ 0.06	+ 0.18	+ 0.30	+ 0.42	+ 0.54	+ 0.66	1850
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1851
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1852
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	1853
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	1854
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1855
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1856
— 0.05	— 0.16	— 0.27	— 0.38	— 0.49	— 0.60	1857
— 0.09	— 0.27	— 0.45	— 0.64	— 0.82	— 1.00	1858
+ 0.01	+ 0.04	+ 0.07	+ 0.10	+ 0.13	+ 0.17	1859
+ 0.02	+ 0.06	+ 0.10	+ 0.14	+ 0.18	+ 0.22	1860
+ 0.05	+ 0.17	+ 0.29	+ 0.41	+ 0.53	+ 0.65	1861
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1862
+ 0.04	+ 0.12	+ 0.20	+ 0.28	+ 0.36	+ 0.44	1863
+ 0.03	+ 0.05	+ 0.07	+ 0.09	+ 0.11	+ 0.13	1864
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1865
+ 0.02	+ 0.05	+ 0.08	+ 0.11	+ 0.14	+ 0.17	1866
— 0.02	— 0.05	— 0.09	— 0.12	— 0.16	— 0.19	1867
— 0.04	— 0.11	— 0.18	— 0.25	— 0.32	— 0.39	1868
— 0.11	— 0.32	— 0.53	— 0.74	— 0.95	— 1.16	1869
— 0.12	— 0.20	— 0.24	— 0.24	— 0.24	— 0.24	1870
+ 0.06	+ 0.17	+ 0.28	+ 0.39	+ 0.50	+ 0.61	1871
+ 0.07	+ 0.21	+ 0.35	+ 0.49	+ 0.63	+ 0.77	1872
+ 0.09	+ 0.27	+ 0.45	+ 0.63	+ 0.81	+ 0.99	1873
— 0.06	— 0.18	— 0.30	— 0.42	— 0.54	— 0.66	1874
+ 0.08	+ 0.24	+ 0.40	+ 0.56	+ 0.72	+ 0.88	1875
+ 0.04	+ 0.12	+ 0.20	+ 0.28	+ 0.36	+ 0.44	1876
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1877
— 0.02	— 0.05	— 0.08	— 0.11	— 0.14	— 0.17	1878
— 0.02	— 0.07	— 0.12	— 0.17	— 0.22	— 0.27	1879
— 0.02	— 0.07	— 0.12	— 0.17	— 0.22	— 0.27	1880
— 0.04	— 0.13	— 0.21	— 0.30	— 0.38	— 0.47	1881
+ 0.02	+ 0.06	+ 0.11	+ 0.15	+ 0.20	+ 0.25	1882
— 0.05	— 0.17	— 0.29	— 0.41	— 0.53	— 0.65	1883
+ 0.05	+ 0.15	+ 0.25	+ 0.35	+ 0.45	+ 0.55	1884
+ 0.03	+ 0.09	+ 0.15	+ 0.21	+ 0.27	+ 0.33	1885

Tabelle C.

Jährlicher Gang der täglichen Amplitude,

Jahr	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni
1845	2'30	5'39	9'46	13'23	11'88	11'52
1846	3.32	4.05	10.03	13.19	12.83	11.39
1847	4.45	5.65	10.66	12.63	11.82	10.96
1848	8.18	8.16	14.57	15.72	14.15	15.16
1849	7.57	8.34	13.53	16.83	13.94	14.17
1850	5.66	8.49	12.68	15.00	13.68	14.61
1851	5.52	5.78	9.32	13.93	11.87	11.85
1852	5.00	5.73	10.23	13.38	11.47	11.87
1853	...	...	...	...	...	...
1854	...	...	...	...	...	...
1855	4.28	4.17	8.75	8.43	9.45	9.28
1856	3.82	4.53	7.07	11.27	8.27	9.85
1857	4.33	5.77	8.43	11.24	11.26	10.77
1858	6.00	7.17	12.36	14.38	12.40	10.71
1859	6.51	8.89	13.80	18.50	13.65	13.86
1860	5.60	6.93	13.98	15.10	13.61	15.56
1861	4.18	8.05	11.17	15.46	13.65	13.55
1862	5.40	6.17	9.87	12.10	10.40	12.65
1863	3.96	5.74	10.88	12.85	12.56	11.63
1864	4.00	4.46	11.43	12.43	11.37	11.42
1865	2.98	5.23	10.67	12.02	10.98	10.27
1866	3.95	8.04	7.54	11.64	10.13	9.80
1867	4.32	5.84	8.47	10.41	9.53	9.62
1868	3.91	4.55	9.10	13.43	10.34	10.22
1869	5.59	6.50	8.62	13.86	11.90	13.06
1870	6.76	9.51	14.61	17.42	18.03	15.44
1871	5.67	8.92	13.63	18.14	15.18	15.12
1872	5.11	7.47	12.09	14.52	14.94	14.66
1873	4.53	5.82	8.80	11.72	9.53	8.76
1874	5.59	5.16	8.35	12.45	10.41	9.78
1875	5.47	7.01	8.34	12.02	10.68	10.85
1876	3.59	3.59	7.65	10.18	7.81	9.84
1877	3.20	4.00	7.33	9.43	8.92	9.43
1878	2.30	4.10	7.02	9.93	8.19	9.72
1879	3.47	4.74	8.05	9.94	9.29	10.09
1880	3.75	5.45	7.45	11.05	10.75	10.62
1881	4.80	5.81	8.93	10.03	9.95	11.72
1882	4.47	7.68	9.87	11.67	11.27	10.01
1883	5.72	5.88	8.68	12.21	10.30	10.47
1884	5.48	7.08	11.33	14.15	11.22	13.80
1885	3.52	4.98	9.19	10.55	11.58	11.65

reducirt auf den 1. Juli jeden Jahres.

Juli	August	September	October	November	December	Jahr
10'61	11'12	9'25	7'37	4'09	3'15	1845
11.71	11.74	9.85	7.52	5.12	3.04	1846
9.78	12.16	11.99	10.90	5.92	3.58	1847
15.45	15.62	13.78	10.09	4.91	4.24	1848
12.51	12.26	11.15	10.12	5.78	4.44	1849
12.74	10.45	12.75	9.67	6.19	3.73	1850
11.40	11.23	9.03	9.17	4.83	3.03	1851
10.70	11.02	9.98	9.70	5.77	3.50	1852
...	...	...	...	...	...	1853
...	...	...	...	...	...	1854
9.65	9.87	8.63	7.03	4.55	2.60	1855
8.88	8.70	9.10	7.63	3.52	2.75	1856
10.23	10.62	8.70	6.89	4.91	2.90	1857
12.68	11.26	12.48	10.24	5.68	3.63	1858
13.28	14.67	13.50	10.87	7.96	5.25	1859
14.17	14.43	12.93	10.94	6.21	4.30	1860
12.13	13.42	11.56	9.38	7.10	5.72	1861
11.88	13.03	11.03	8.38	5.47	4.07	1862
11.02	10.04	9.22	8.48	4.96	3.59	1863
9.43	10.38	7.99	7.14	5.33	2.65	1864
8.80	10.50	9.13	5.53	4.47	2.93	1865
9.15	9.37	7.06	6.41	4.07	3.07	1866
9.81	9.60	7.89	5.41	3.91	2.73	1867
9.68	11.29	8.48	6.87	4.85	3.34	1868
11.99	11.66	11.45	8.23	4.20	2.49	1869
15.21	15.42	13.46	12.14	9.76	5.14	1870
13.69	14.84	12.88	10.86	7.28	5.93	1871
12.94	14.36	13.35	10.92	7.66	5.85	1872
9.51	7.57	8.02	7.86	5.49	4.39	1873
9.31	10.30	9.35	7.51	5.06	5.29	1874
8.91	10.59	10.03	10.11	7.84	4.85	1875
9.92	10.05	7.98	7.15	4.69	2.84	1876
8.65	9.22	8.23	7.27	4.08	1.98	1877
9.06	9.00	8.19	4.84	3.16	2.73	1878
9.01	9.78	8.43	7.65	3.40	2.33	1879
9.60	8.65	9.43	8.90	4.91	3.96	1880
11.38	11.72	10.84	9.27	5.20	3.15	1881
9.82	10.33	10.99	8.77	6.85	4.73	1882
10.92	10.46	10.21	9.96	6.60	3.52	1883
10.67	11.25	11.98	9.25	5.65	4.40	1884
11.58	10.62	8.72	7.11	5.24	3.66	1885

Tabelle D.

Werthe der Constanten in den auf Seite 477

Jahr	A_0	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2
1845	8'28	− 2'39	− 1'59	− 0'12	+ 2'35	+ 0'66
1846	8.65	4.34	1.59	− 0.14	2.14	0.48
1847	9 20	3.56	2.22	+ 0.15	1.10	1.27
1848	11.67	4.47	0.80	+ 0.20	2.67	1.82
1849	10 80	3.13	1.66	+ 0.14	3.20	0.87
1850	10.46	3.67	1.80	+ 0.08	2.70	0.89
1851	8.91	3.60	1.29	+ 0.14	2.13	0.38
1852	9.03	3.37	1.77	− 0.04	1.73	0.63
1853 *)	8.43	—	—	—	—	—
1854 *)	7.82	—	—	—	—	—
1855	7.22	3.08	0.72	− 0.10	0.95	0.88
1856	7.12	3.03	1.13	+ 0.29	1.24	0.72
1857	8.00	3.37	0.86	+ 0.12	1.85	0.53
1858	9.92	3.29	1.84	+ 0.03	1.89	1.56
1859	11.57	3.66	2.12	− 0.23	2.38	1.47
1860	11.15	4.66	1.50	− 0.37	2.22	1.05
1861	10.45	3.81	1.65	− 0.17	2.10	0.60
1862	9.20	3.82	0.60	− 0.06	1.31	1.09
1863	8.74	3.45	1.62	− 0.19	2.38	0.46
1864	8.17	3.24	1.19	− 0.47	2.49	0.50
1865	7.79	3.20	1.49	− 0.14	2.42	0.99
1866	7.52	2.49	0.70	− 0.10	2.27	0.71
1867	7.29	2.87	0.45	− 0.07	1.99	0.65
1868	8.08	3.33	1.40	− 0.15	1.97	0.66
1869	9.14	4.21	0.96	+ 0.69	2.09	0.95
1870	12.45	4.35	2.13	− 0.32	2.61	0.67
1871	11.84	4.11	1.46	− 0.14	2.73	1.17
1872	11.15	4.28	1.71	+ 0.12	1.63	0.60
1873	7.67	1.98	0.57	− 0.29	1.56	0.29
1874	8.21	2.54	0.35	+ 0.44	1.40	0.38
1875	8.89	2.33	− 1.56	+ 0.18	0.69	0.25
1876	7.11	3.29	+ 0.06	− 0.68	0.95	0.59
1877	6.81	3.22	− 1.13	+ 0.05	1.11	0.63
1878	6.66	3.30	0.60	− 0.04	1.58	0.65
1879	7.18	3.23	1.04	+ 0.12	1.40	0.85
1880	7.88	3.05	1.42	+ 0.33	1.20	0.11
1881	8.57	3.74	0.73	+ 0.01	0.07	1.11
1882	8.85	2.83	1.54	+ 0.03	1.18	0.87
1883	8,71	2.99	1.38	+ 0.01	0.88	0.59
1884	9.69	3.34	1.51	+ 0.17	1.96	9.95
1885	8.18	− 2.13	− 0.74	− 0.37	+ 1.75	+ 0.20

*) Für 1853 und 1854 sind die Coefficienten A.. interpolirt.

für die tägliche Amplitude angegebenen Formeln.

b_3	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3
— 0'54	+ 3'35	+ 1'75	+ 0'58	314°5	292°6	192°8
— 0.44	4.84	1.67	0.50	296.3	286.7	197.9
+ 0.33	3.72	2.56	0.36	287.2	299.7	24.6
— 0.17	5.21	1.99	0.25	300.9	334.0	130.8
+ 0.19	4 48	1.87	0.24	315.7	297.6	36.7
+ 0.60	4.56	2 01	0.63	306.4	296.3	0.8
— 0.23	4.18	1.35	0.27	300.6	286.7	147.4
— 0.10	3.79	1.86	0.11	297.1	289.6	182.4
—	3.60	1.62	0.11	—	—	—
—	3.41	1.38	0.12	—	—	—
— 0.07	3.22	1.14	0.12	286.8	320.9	234.5
— 0.12	3.28	1.34	0.31	292.3	302.6	112.3
— 0.22	3.85	1.02	0.25	298.8	301.5	151.6
— 0.19	3.80	2.41	0.19	299.8	310.4	172.0
— 0.80	4.36	2.58	0.83	297.3	304.7	196.0
+ 0.12	5.17	1.83	0.38	295.5	304.9	342.8
— 0.60	4.35	1.71	0.63	298.9	290.0	195.5
— 0.33	4.03	1.24	0.34	288.9	330.9	191.0
— 0.10	4.19	1.68	0.21	304.6	285.8	240.7
— 0.41	4.08	1.30	0.62	307.5	292.9	229.2
— 0.74	4.01	1.79	0.75	307.0	303.8	242.5
+ 0.03	3.37	1.00	0.11	312.3	315.3	285.2
— 0.31	3 49	0.78	0.32	304.7	325.4	193.5
— 0.79	3.87	1.55	0.80	300.6	295.1	190.7
— 0.23	4.71	1.35	0.73	296.4	275.7	108.5
+ 0.32	5.07	2.23	0.45	301.0	287.5	314.7
— 0.67	4.94	1.87	0.68	303.6	308.9	192.2
— 0.28	4.58	1.81	0.31	290.8	289.5	157.2
— 0.21	2.52	0.64	0.35	308.2	297.3	234.2
— 0.25	2.90	0.51	0.50	298.9	317.4	119.5
+ 0.08	2.43	1.58	0.87	286.4	279.2	65.0
— 0.41	3.42	0.60	0.79	286.1	6.0	239.0
+ 0.01	3.41	1.30	0.05	289.1	299.1	76.0
— 0.01	3.66	0.89	0.04	295.6	323.5	248.5
+ 0.07	3.52	1.34	0.14	293.5	309.3	59.5
— 0.11	3.28	1.42	0.35	291.5	274.3	109.5
+ 0.32	3.74	1.34	0 32	271.1	326.7	2.5
— 0.04	3.07	1.77	0.06	292.1	299.3	144.7
+ 0.02	3.12	1.50	0.02	286.4	293.4	14.0
+ 0.99	3.88	1.79	1.01	300.4	302.1	1.0
+ 0.05	+ 2.76	+ 0.77	+ 0.66	309.5	285.1	326.3

Die Betrachtung dieser Constanten führt zu der Thatsache, daß nicht allein die A_0 eine ungefähr elfjährige Periode aufweisen, wie dies schon seit Wolf's und Sabine's Entdeckung für die Beobachtungen vieler Beobachtungsorte nachgewiesen ist, sondern daß auch die A_1 und A_2 dieselbe Periode haben. Die A_3 zeigen die Periode freilich nicht mehr deutlich. Die Werthe der A_3 sind aber auch nur sehr klein und die größeren Störungen, welche in den angegebenen Monatsmitteln mitenthalten sind, werden dieselben verhältnismäßig stark beeinflussen.

Um die Länge der ungefähr elfjährigen Periode genau zu ermitteln, ist die Reihe der A_0 verwandt. Dieselbe ist einmal geordnet in eine Periode von 10 Jahren, dann in eine solche von 11 Jahren, das dritte Mal in eine von 12 Jahren. Es sind nämlich die Glieder der Reihe A_0 fortlaufend numerirt und aus denjenigen Gliedern, deren Ordnungszahlen einander beziehungsweise modulo 10, modulo 11, modulo 12 congruent werden, sind die Mittelwerthe M_{10}, M_{11}, M_{12} gebildet. Für jede dieser drei Reihen M_{10}, M_{11}, M_{12} ist eine Bessel'sche Formel aufgestellt, und aus dieser sind die Werthe der Reihe rückwärts berechnet. Die der Berechnung der Formel zu Grunde gelegten Werthe (M) und die aus ihr rückwärts berechneten (N) sind folgende.

		M_{10}	N_{10}	M_{11}	N_{11}	M_{12}	N_{12}
1845.5	I	8′07	8′00	7′34	7′13	8′50	8′52
1846.5	II	7.60	7.72	8.00	7.98	10.00	9.76
1847.5	III	7.82	7.92	9.03	9.34	10.33	10.59
1848.5	IV	9.08	8.78	11.06	10.32	10.91	10.60
1849.5	V	9.67	9.83	10.66	10.41	9.27	9.92
1850.5	VI	10.23	10.31	10.19	9.85	9.29	9.06
1851.5	VII	9.94	9.97	8.86	9.26	8.85	8.46
1852.5	VIII	9.56	9.25	8.54	8.90	8.10	8.14
1853.5	IX	8.39	8.69	8.37	8.53	7.68	7.65
1454.5	X	8.47	8.34	7.57	7.88	7.33	7.47
1455.5	XI			7.18	7.20	7.23	7.24
1856.5	XII					7.69	7.55

Die Formeln selbst lauten

$$N_{10} = 8'884 + 1'200 \sin \frac{j-38,50}{10,00} 360^0 + 0'302 \sin 2 \frac{j-38,91}{10,00} 360^0$$

$$N_{11} = 8'800 + 1'490 \sin \frac{j-36,14}{11,00} 360^0 + 0'481 \sin 2 \frac{j-35,89}{11,00} 360^0$$

$$N_{12} = 8'763 + 1'568 \sin \frac{j-33,46}{12,00} 360^0 + 0'462 \sin 2 \frac{j-34,10}{12,00} 360^0$$

Hier bedeutet j die Anzahl der seit 1800,00 verflossenen Jahre.

Die nach diesen Formeln berechneten Werth der N habe ich mit den in Tabelle D gegebenen Werthen der A_0 verglichen und in Tabelle E die Summe Q der Quadrate der Abweichungen gebildet und beziehungsweise gleich 53.6295, gleich 22.5861, gleich 28.2866 für die Periodenlängen von 10, von 11 und von 12 Jahren gefunden.

Indem ich nun für eine Periodenlänge von x Jahren die genannte Quadraten-Summe mit Q_x bezeichne und die obigen Gleichungen allgemein in der Form

$$N_x = \alpha_x + \beta_x \sin \frac{j-\varphi_x}{x} 360^0 + \gamma_x \sin 2 \frac{j-\chi_x}{x} 360^0$$

darstelle, drücke ich nach einem von Herrn Professor Schering ertheilten Rathe die hier in Betracht kommenden Größen mit Hülfe der oben gefundenen Werthe durch Interpolationsformeln aus und erhalte

$$\begin{aligned}
Q_x &= 53,6295 - 31,0434\,(x-10) + 18,3720\,(x-10)(x-11)\\
Q_x &= 20,4082 + 18,3720\,(x-11.3447)^2\\
\alpha_x &= 8'884 - 0'084\,(x-10) + 0'023\,(x-10)(x-11)\\
\beta_x &= 1'200 + 0'290\,(x-10) - 0'106\,(x-10)(x-11)\\
\gamma_x &= 0'302 + 0'179\,(x-10) - 0'099\,(x-10)(x-11)\\
\varphi_x &= 38,50 - 2,36\,(x-10) - 0,16\,(x-10)(x-11)\\
\chi_x &= 38,91 - 3,02\,(x-10) + 0,61\,(x-10)(x-11)
\end{aligned}$$

Indem ich mich auf die Angabe von zwei Decimalstellen beschränke, nehme ich entsprechend dem Minimal-Werthe von Q_x als angenäherten Werth der Periodenlänge $x = 11,34$ Jahre. Hiernach werden also die Werthe von A_0 näherungsweise durch die Formel

$$A_0' = 8'781 + 1'540 \sin \frac{j-35,27}{11,34} 360^0 + 0'497 \sin 2 \frac{j-35,14}{11,34} 360^0$$

dargestellt. Die Vergleichung der hiernach berechneten Werthe mit den vorgegebenen A^0 habe ich in den beiden letzten Spalten der Tabelle E zusammengestellt.

Tabelle E.

Zeit	A_0-N_{10}	$(A_0-N_{10})^2$	A_0-N_{11}	$(A_0-N_{11})^2$	A_0-N_{12}	$(A_0-N_{12})^2$	A_0-A_0'	$(A_0-A_0')^2$
1845.5	+ 0'28	0.0784	+ 1'15	1.3225	— 0'24	0.0576	+ 0'82	0.6724
1846.5	+ 0.93	0.8649	+ 0.67	0.4489	— 1.11	1.2321	— 0.17	0.0289
1847.5	+ 1.28	1.6384	— 0.14	0.0196	— 1.39	1.9321	— 0.76	0.5776
1848.5	+ 2.89	8.3521	+ 1.35	1.8225	+ 1.07	1.1449	+ 1.17	1.3689
1849.5	+ 0.97	0.9409	+ 0.39	0.1521	+ 0.88	0.7744	+ 0.58	0.3364
1850.5	+ 0.15	0.0225	+ 0.61	0.3721	+ 1.40	1.9600	+ 0.88	0.7764
1851.5	— 1.06	1.1236	— 0.35	0.1225	+ 0.45	0.2025	— 0.19	0.0361
1852.5	— 0.22	0.0484	+ 0.13	0.0169	+ 0.89	0.7921	+ 0.25	0.0625
1853.5	— 0.26	0.0676	— 0.10	0.0100	+ 0.78	0.6084	+ 0.12	0.0144
1854.5	— 0.52	0.2704	— 0.06	0.0036	+ 0.35	0.1225	+ 0.24	0.0576
1855.5	— 0.78	0.6084	+ 0.02	0.0004	— 0.02	0.0004	+ 0.21	0.0441
1856.5	— 0.60	0.3600	— 0.01	0.0001	— 0.43	0.1849	— 0.06	0.0036
1857.5	+ 0.08	0.0064	— 0.02	0.0004	— 0.52	0.2704	— 0.24	0.0576
1858.5	+ 1.14	1.2410	+ 0.58	0.3364	+ 0.16	0.0256	+ 0.33	0.1089
1859.5	+ 1.74	3.0276	+ 1.25	1.5625	— 0.02	0.0004	+ 1.24	1.5376
1860.5	+ 0.84	0.7056	+ 0.74	0.5476	+ 0.55	0.3025	+ 0.04	0.0016
1861.5	+ 0.48	0.2304	+ 0.60	0.3600	+ 0.53	0.2809	+ 0.65	0.4225
1862.5	— 0.05	0.0025	— 0.06	0.0036	+ 0.14	0.0196	— 0.03	0.0009
1863.5	+ 0.05	0.0025	— 0.16	0.0256	+ 0.28	0.0784	— 0.13	0.0169
1864.5	— 0.17	0.0289	— 0.36	0.1296	+ 0.03	0.0009	— 0.33	0.1089
1865.5	— 0.21	0.0441	— 0.09	0.0081	+ 0.14	0.0196	— 0.05	0.0025
1866.5	— 0.20	0.0400	+ 0.32	0.1024	+ 0.05	0.0025	+ 0.38	0.1444
1867.5	— 0.63	0.3969	+ 0.16	0.0256	+ 0.05	0.0025	+ 0.28	0.0784
1868.5	— 0.70	0.4900	+ 0.10	0.0100	+ 0.53	0.2809	+ 0.27	0.0729
1869.5	— 0.69	0.4761	— 0.20	0.0400	+ 0.62	0.3844	— 0.02	0.0004
1870.5	+ 2.14	4.5796	+ 2.13	4.5369	+ 2.69	7.2361	+ 2.21	4.8841
1871.5	+ 1.87	3.4969	+ 1.43	2.0449	+ 1.25	1.5625	+ 1.35	1.8225
1872.5	+ 1.90	3.6100	+ 1.30	1.6900	+ 0.55	0.3025	+ 1.13	1.2769
1873.5	— 1.02	1.0404	— 1.59	2.5281	— 2.25	5.0625	— 1.72	2.9584
1874.5	— 0.13	0.0169	— 0.69	0.4761	— 0.85	0.7225	— 0.78	0.6084
1875.5	+ 0.89	0.7921	+ 0.36	0.1296	+ 0.43	0.1849	+ 0.23	0.0529
1876.5	— 0.61	0.3721	— 0.77	0.5929	— 1.03	1.0609	— 0.98	0.9604
1877.5	— 1.11	1.2321	— 0.39	0.1521	— 0.84	0.7056	— 0.53	0.2809
1878.5	— 2.12	4.4944	— 0.47	0.2209	— 0.81	0.6561	— 0.30	0.0900
1879.5	— 2.65	7.0225	— 0.80	0.6400	— 0.06	0.0036	— 0.26	0.0676
1880.5	— 2.43	5.9049	— 1.46	2.1316	+ 0.33	0.1089	— 1.01	1.0201
Summe	+ 2.50	53.6295	+ 5.57	22.5861	+ 4.58	28.2866	+ 4.82	20.5526

Die dabei entstandene Summe der Quadrate 20,5526 läßt sich, weil die algebraische Summe der Abweichungen gleich + 4,82 wird, noch auf 19,2788 vermindern, wenn man die additive Constante in der Formel für A_0', nämlich 8'781, um + 0.134 vermehrt und also

dafür 8'915 anwendet. Indem ich in entsprechender Weise die additiven Constanten der Formeln für N_{10}, N_{11}, N_{12} corrigire, benutze ich die so erhaltenen vier Quadratsummen zur Aufstellung einer neuen Interpolationsformel und finde

$$Q_x = 19.2509 + 17.5165\ (x - 11.3001)^2 - 2.0161\ (x - 11.3001)^3$$

woraus ersichtlich ist, daß den vorliegenden Beobachtungswerthen die Periodenlänge $x = 11{,}34$ Jahre genau genug entspricht.

Herr Professor Spörer findet für die Länge der Periode in der Häufigkeit der Sonnenflecke den Werth von 11.328 Jahren*).

Im Wesentlichen nach dem hier angewandten Verfahren habe ich auch die trigonometrischen Formeln der A_1 und A_2 für die Zeit von 1845 bis 1880 berechnet. Die entsprechenden Beziehungen, welche M_{11}, M_{12}, N_{11}, N_{12}, A'_0 zu A_0 hatten, mögen nun M'_{11}, M'_{12}, N'_{11}, N'_{12}, A'_1 zu A_1 und M''_{11}, M''_{12}, N''_{11}, N''_{12}, A'_2 zu A_2 haben. Ich finde dann

		M'_{11}	M'_{12}	M''_{11}	M''_{12}
1845.5	I	3'37	3'97	1'29	1'37
1846.5	II	4.19	4.57	1.41	2.10
1847.5	III	4.08	4.34	2.10	2.34
1848.5	IV	4.88	4.99	2.27	1.88
1849.5	V	4.86	3.78	1.86	1.40
1850.5	VI	4.50	3.83	1.84	1.25
1851.5	VII	3.58	3.60	1.08	1.54
1852.5	VIII	3.63	3.76	1.35	1.25
1853.5	IX	3.37	3.67	1.50	1.57
1854.5	X	3.61	3.48	1.26	1.09
1855.5	XI	3.33	3.41	1.15	1.09
1856.5	XII		3.48		1.44

$$N'_{11} = 3'945 + 0'712 \sin \frac{j - 35.23}{11.00}\, 360^\circ + 0'240 \sin 2\, \frac{j - 36.72}{11.00}\, 360^\circ$$

$$N'_{11} = 3'907 + 0'518 \sin \frac{j - 32.93}{12.00}\, 360^\circ + 0'288 \sin 2\, \frac{j - 33.88}{12.00}\, 360^\circ$$

$$A'_1 = 3'932 + 0'646 \sin \frac{j - 34.45}{11.34}\, 360^\circ + 0'256 \sin 2\, \frac{j - 35.75}{11.34}\, 360^\circ$$

$$N''_{11} = 1'555 + 0'431 \sin \frac{j - 34.97}{11.00}\, 360^\circ + 0'269 \sin 2\, \frac{j - 36.04}{11.00}\, 360^\circ$$

$$N''_{12} = 1'527 + 0'378 \sin \frac{j - 32.66}{12.00}\, 360^\circ + 0'304 \sin 2\, \frac{j - 33.62}{12.00}\, 360^\circ$$

$$A'_2 = 1'546 + 0'413 \sin \frac{j - 34.18}{11.34}\, 360^\circ + 0'281 \sin 2\, \frac{j - 35.22}{11.34}\, 360^\circ$$

*) Astron. Nachr. Bd. 98. 1881.

Die Werthe der fünf Constanten in A_1' habe ich aus den entsprechenden Constanten in N_{11}' und N_{12}' durch lineare Interpolation von den Periodenlängen $x = 11$ und $x = 12$ nach der Periodenlänge $x = 11.34$ berechnet. Das gleiche Verfahren habe ich bei A_2' angewandt.

Um zu sehen, in welcher Weise die additiven Constanten in den Formeln für A_0, A_1, A_2 von der Zeit abhängen, habe ich diejenigen Mittelwerthe aus ihren Werthen in Tabelle D gebildet, welche die Periode von 11.34 Jahren nicht mehr enthalten. Da die hier gegebenen Werthe von Jahr zu Jahr aufeinander folgen, das Jahr aber kein aliquoter Theil der Periode ist, so mußte hier an dem arithmetischen Mittel aus zwölf aufeinander folgenden Werthen eine Correction angebracht werden, welche man folgendermaßen näherungsweise erhält:

Bezeichnen wir mit $f(1), f(2), f(3) \,..\, f(n+1)$ zwölf vorgegebene Werthe, so sind $f(1), f(2-\theta), f(3-2\theta) \ldots f(n+1-n\theta)$ Werthe, welche in aliquoten Theilen der Periode aufeinander folgen, wenn $n+1-n\theta = 11.34$, θ also $= 0.06$ ist. Aus letzteren Werthen wäre eigentlich das Mittel zu bilden. Es wird aber bei linearer Interpolation:

$$\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{\nu=n} f(\nu+1-\nu\theta) = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{\nu=n}\left\{\nu\theta f(\nu) + (1-\nu\theta) f(\nu+1)\right\}$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{\nu=n} f(\nu+1) + \theta\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{\nu=n} f(\nu+1) - f(n+1)\right\}$$

Dieses Mittel gilt für den Zeitpunkt $\frac{1}{2}\left\{Z(1) + Z(n+1) - \theta n\right\}$, wo $Z(1)$ die Zeit für $f(1)$, $Z(n+1)$ für $f(n+1)$ bezeichnet.

Die auf diese Art berechneten Mittel zeigen im Allgemeinen, namentlich aber in der letzten Zeit, eine Abnahme, welche auf eine noch größere Periode der A_0, A_1 und A_2 hinzuweisen scheint.

Zeit	(A_0)	(A_1)	(A_2)	(A_3)
	8'915	3'932	1'546	0'391
1850.67	+ 0'159	+ 0'079	+ 0'188	— 0'091
1856.67	+ 0'142	— 0'019	+ 0'100	— 0'088
1862.67	+ 0'127	+ 0'126	+ 0'029	+ 0'040
1868.67	+ 0'134	+ 0'110	— 0'118	+ 0'094
1874.67	— 0'117	— 0'204	— 0'258	+ 0'052
1879.67	— 0'863	— 0'638	— 1'284	— 0'005

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

16. November. № 17. 1887.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber n-dimensionale complexe Zahlen.

Von

Julius Petersen.

(Vorgelegt von H. A. Schwarz.)

1. Die folgenden Bemerkungen stehen in Beziehung zu dem Inhalte einer Mittheilung des Herrn Weierstraß „Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Größen"[1]) und zu den im Anschlusse an diese Mittheilung von den Herren H. A. Schwarz[2]), R. Dedekind[3]) und O. Hölder[4]) veröffentlichten Ausführungen. In einem in Zeuthens Zeitschrift veröffentlichten Aufsatze (Januar 1885) habe ich dasselbe Thema für den Fall $n = 3$ behandelt; aus diesem Aufsatze werde ich in dem Folgenden einige Beispiele entnehmen.

Der Hauptsatz, für den ich im Folgenden einen Beweis mitzutheilen beabsichtige, daß nämlich jedes nach den von Herrn Weierstraß aufgestellten Grundsätzen zulässige Multiplicationsgesetz für die aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Größen

1) Diese Nachrichten, 1884, Seite 395—419.
2) Diese Nachrichten, 1884, Seite 516—519.
3) Diese Nachrichten, 1885, Seite 141—159; 1887, Seite 1—7.
4) Diese Nachrichten, 1886, Seite 241—244.

bestimmt ist durch n Systeme von je n reellen oder gewöhnlichen complexen Zahlen, wobei die aus diesen n^2 Größen gebildete Determinante n^{ter} Ordnung einen von Null verschiedenen Werth hat, ist bereits von Herrn Dedekind ausgesprochen. Der von mir gefundene Beweis scheint mir etwas einfacher zu sein, als derjenige, welchen Herr Dedekind veröffentlicht hat.

Um die folgenden Entwickelungen leichter lesbar zu machen, wiederhole ich die Hauptpunkte der von Herrn Weierstraß aufgestellten Theorie.

2. Wir betrachten eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen, welche dadurch ensteht, daß in dem Ausdrucke

$$\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n$$

die Größen ξ alle reellen Werthe annehmen. Werden den Größen ξ bestimmte Werthe beigelegt, so ergibt sich ein Element der betrachteten Mannigfaltigkeit, welches ich einen Punkt nenne. Die Größen ξ heißen die Coordinaten dieses Punktes. Die Punkte $e_1, e_2, \cdots e_n$, die Haupteinheiten des Herrn Weierstraß, nenne ich die Grundpunkte und zwar nehme ich an, daß sie von einander linear unabhängig sind, so daß zwei Punkte nur dann gleich gesetzt werden dürfen, wenn die gleichnamigen Coordinaten beider Punkte einzeln einander gleich sind. Den Punkt, dessen n Coordinaten gleich Null sind, nennen wir Null und bezeichnen denselben mit 0.

Unter der Summe zweier Punkte soll der Punkt verstanden werden, dessen Coordinaten durch Addition der gleichnamigen Coordinaten der Summanden gebildet werden. Aus der Definition der Summe ergibt sich auf die gewöhnliche Weise der Begriff der Differenz. Es ist klar, daß die Regeln für die Addition und die Subtraction mit den gewöhnlichen Regeln für diese beiden Operationen übereinstimmen.

3. Zum Zwecke der Feststellung des Begriffes der Multiplication stellen wir die Forderung, dass die als Multiplication zu bezeichnende Operation uns nicht aus der betrachteten Mannigfaltigkeit herausführen darf, daß also das Product zweier Punkte wieder ein Punkt sein soll. Ferner können wir fordern, daß entweder, wie bei den Hamilton'schen Quaternionen, nur einige, oder daß alle gewöhnlichen Regeln der Multiplication ihre Gültigkeit behalten sollen. Ich beschränke mich mit Herrn Weierstraß auf den letzteren Fall.

Damit das Product zweier Punkte wieder ein Punkt werde, müssen Gleichungen von der Form

$$(1.) \qquad e_b e_c = \sum_a \varepsilon_{a,b,c} e_a$$

bestehen, wo die Größen $\varepsilon_{a,b,c}$ reelle Zahlen bedeuten. Diese Gleichungen sollen Operationsgleichungen genannt werden. Die Zahlen $\varepsilon_{a,b,c}$ können nicht willkürlich gewählt werden, dieselben müssen alle diejenigen Gleichungen befriedigen, welche ausdrücken, dass bei einem Producte von drei Factoren die Reihenfolge derselben ohne Einfluß auf den Werth des Productes ist. Auf diese Forderung kommen wir später wieder zurück. Vorläufig nehmen wir mit Herrn Weierstraß an, daß alle Systeme der Zahlen $\varepsilon_{a,b,c}$, welche die genannte Forderung nicht befriedigen, von der Betrachtung ausgeschlossen werden. Die nicht ausgeschlossenen Systeme ergeben eben so viele von einander verschiedene Regeln für die Multiplication der Grundpunkte; in allen Fällen werden aber die gewöhnlichen die Multiplication betreffenden Sätze der Algebra aufrecht erhalten.

4. Um den Begriff der Division zu entwickeln setzen wir

$$\frac{x}{y} = z,$$

wo x und y beliebige Punkte sind. Wir verstehen unter z den durch die Gleichung $x = yz$ bestimmten Punkt. Geben wir z vorläufig unbestimmte Coordinaten und führen wir die Multiplication yz aus, so erhalten wir durch Vergleichung des Productes mit x n lineare Gleichungen zur Bestimmung der Coordinaten von z. Hieraus folgt, daß die Division stets dann eine eindeutige Operation ist, wenn die aus den Coefficienten der Unbekannten in den erwähnten n Gleichungen gebildete Determinante nicht gleich Null ist. Diese Determinante, welche von Herrn Weierstraß mit ε bezeichnet wird, ist eine homogene Function n^{ten} Grades in Bezug auf die Coordinaten des Divisors. Betrachten wir diese als unbestimmt, so wird durch die Bedingung, daß die erwähnte Determinante den Werth Null annehmen soll, eine Mannigfaltigkeit von $n-1$ Dimensionen bestimmt, welche in der gegebenen Mannigfaltigkeit enthalten ist. Diese Mannigfaltigkeit, welche von Herrn Weierstraß das Gebiet der Theiler der Null genannt wird, kann das Nullgebiet genannt werden, weil jeder Quotient, dessen Divisor ein Punkt dieses Gebietes ist, unbestimmte oder unendliche Coordinaten besitzt.

Die Fälle, in denen die erwähnte Determinante identisch, das heißt für alle Punkte der betrachteten Mannigfaltigkeit, den Werth Null hat, werden von Herrn Weierstraß ausgeschlossen.

Ist x ein nicht zum Nullgebiet gehörender Punkt, so läßt sich auf die angegebene Weise ein Punkt e_0 bestimmen, so daß

$$x = e_0 x;$$

hieraus erhält man, indem man mit einem passend gewählten Punkt multiplicirt,

$$y = e_0 y,$$

wo y ein beliebiger Punkt ist. Der Punkt e_0 besitzt also die für die Zahl Eins charakteristischen Eigenschaften, man könnte ihn mit 1 bezeichnen und dadurch ausdrücken, daß die betrachtete Mannigfaltigkeit auch die reellen Zahlen als Elemente einschließt. Dieses wäre vielleicht am consequentesten, da wir einen besonderen Punkt mit 0 bezeichnet haben; die Bezeichnungsart ist aber unwesentlich.

5. Herr Weierstraß führt jetzt ein neues System von Grundpunkten ein; er wählt dazu einen beliebigen Punkt g und seine Potenzen bis g^n. Die Bedingung dafür, daß diese Punkte als Grundpunkte angewendet werden können, ist, daß die ursprünglichen Grundpunkte sich durch die neuen linear ausdrücken lassen. Hierzu wird erfordert, daß die n Gleichungen

$$2)\qquad g^{\mu} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots \alpha_n e_n, \qquad \mu = 1, 2, \cdots n$$

eine nicht verschwindende Determinante haben. Man muß daher zu den früher ausgeschlossenen Systemen der Constanten des Multiplicationsgesetzes diejenigen hinzufügen, für welche die besprochene Determinante, die Herr Weierstraß mit X_0 bezeichnet, (dentisch verschwindet.

Durch Elimination der Punkte $e_1, e_2, \cdots e_n$ wird die Gleichung

$$3.)\qquad X_0 g^{n+1} + X_1 g^n + X_2 g^{n-1} + \cdots + X_n g = 0$$

gebildet, welche nach Division mit $X_0 g$ die Form

$$(4.)\qquad g^n + \varepsilon_1 g^{n-1} + \varepsilon_2 g^{n-2} + \cdots + \varepsilon_n e_0 = 0$$

annimmmt.

Herr Weierstraß betrachtet hierauf eine gewöhnliche algebraische Gleichung mit denselben Coefficienten, wie die eben gefundene, nämlich

$$(5.)\qquad f(x) = x^n + \varepsilon_1 x^{n-1} + \varepsilon_2 x^{n-2} + \cdots + \varepsilon_n = 0,$$

und benutzt die reellen Factoren ersten und zweiten Grades von i(x) zu einer Art neuer Coordinatenänderung. Hier werde ich von Herrn Weierstraß abweichen, indem ich sowohl die reellen,

als auch die complexen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ benutzen werde. Dies läßt sich auf zweifache Weise auffassen. Man kann dies so ansehen, als ob zu den früheren n Haupteinheiten n neue Haupteinheiten

$$e_1 i, \; e_2 i, \; \cdots \; e_n i$$

hinzugefügt werden; man kann aber auch die Anwendung imaginärer Größen nur als ein Mittel zur Vereinfachung der Rechnungen betrachten, da wir wissen, daß die auf diese Weise abgeleiteten reellen Resultate mit denjenigen übereinstimmen müssen, die sich ergeben würden, wenn wir mit Herrn Weierstraß die ganze Untersuchung so führen, daß in den Rechnungen nur von reellen Zahlen die Rede ist.

Die Wurzeln der Gleichung

$$f(x) = 0$$

seien

$$x_1, \; x_2, \; \cdots \; x_n.$$

Wir nehmen mit Herrn Weierstraß an, daß diese n Größen alle von einander verschieden seien und führen ein System neuer Grundpunkte (wirklicher oder fingirter)

$$p_1, \; p_2, \; \cdots \; p_n$$

ein, indem wir setzen

$$(6.) \qquad p_a = \frac{f(x)}{f'(x_a)(x - x_a)}; \; (x = g).$$

Dies ist so zu verstehen, daß nach ausgeführter Division für x überall g, für x^0 e_0 gesetzt werden soll. Jeder der neuen Grundpunkte p wird auf diese Weise linear durch die Punkte e_0, g g^2, $\cdots$ g^{n-1} ausgedrückt. Wo solches kein Mißverständniß veranlassen kann, behalten wir im Folgenden die Größe x statt der Größe g bei.

6. Für die neuen Grundpunkte werden die Operationsgleichungen besonders einfach, nämlich

$$(7.) \qquad p_b \cdot p_c = 0 \; (b \gtrless c), \qquad p_a^2 = p_a.$$

Man sieht nämlich, daß das Product

$$\frac{f(x)}{x - x_b} \cdot \frac{f(x)}{x - x_c}, \qquad b \gtrless c$$

die Function $f(x)$ als Factor enthält, es wird daher $p_b \cdot p_c$ durch $f(g)$ theilbar und reducirt sich daher auf Null. Um die zweite Gleichung zu beweisen, bemerken wir, daß p_a sich auf 1 reducirt, wenn wir für g die Wurzel x_a einsetzen, dagegen auf Null, wenn

wir eine der übrigen Wurzeln einsetzen. Denken wir uns jetzt p_a^2 auf die Form gebracht

$$p_a^2 = Af(g) + R,$$

wo A eine ganze Function und R höchstens vom Grade $n-1$ ist, und setzen wir hier der Reihe nach für g die Wurzeln x_1, x_2, $\cdots x_n$, so ergibt sich, daß R dieselben Werthe, wie p_a annimmt. R muß daher mit p_a identisch sein.

Indem wir als Grundpunkte e_0, g, g^2, $\cdots g^{n-1}$ benutzen, wird ein beliebiger Punkt durch eine Gleichung von der Form

$$\varphi(g) = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 g + \alpha_2 g^2 + \cdots + \alpha_{n-1} g^{n-1}$$

bestimmt. Nun ist identisch

$$\varphi(g) = \varphi(x_1)p_1 + \varphi(x_2)p_2 + \cdots \varphi(x_n)p_n, \tag{8.}$$

denn diese Gleichung wird befriedigt, wenn man für g der Reihe nach die Wurzeln x_1, x_2, $\cdots x_n$ einsetzt.

Insbesondere ergibt sich

$$g = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n;$$
$$e_0 = g^0 = p_1 + p_2 + \cdots + p_n.$$

Aus den Operationsgleichungen (7.) ersieht man leicht, daß bei Zugrundelegung der Grundpunkte p die Coordinaten eines Productes gefunden werden, indem die gleichnamigen Coordinaten der einzelnen Factoren mit einander multiplicirt werden. Hieraus folgt dann wieder, daß die Coordinaten eines Quotienten gefunden werden, indem jede Coordinate des Zählers durch die gleichnamige Coordinate des Nenners dividirt wird. Bemerkt man jetzt, daß die linearen Transformationen, vermittelst welcher man von einem der betrachteten Coordinatensysteme zu einem anderen übergeht, alle von der Art sind, daß alle Punkte, welche in dem einen Systeme endliche und bestimmte Coordinaten haben, auch in den übrigen Systemen endliche und bestimmte Coordinaten besitzen, so ersieht man, daß das Nullgebiet unabhängig ist von dem zu Grunde gelegten Systeme der Grundpunkte [1]). Es muß daher aus den Punkten bestehen, von deren Coordinaten in dem neuen Systeme eine oder mehrere gleich Null sind.

Betrachten wir den Punkt g als beliebig, so daß x_1, x_2, $\cdots x_n$ allgemeine Ausdrücke für die Coordinaten sind, vorausgesetzt, daß die Punkte p zu Grundpunkten gewählt werden, so nimmt die Gleichung des Nullgebietes in diesem Systeme die Form

1) Siehe auch den in der Einleitung angeführten Aufsatz des Herrn H. A. Schwarz.

$$(9.)\qquad x_1 x_2 \cdots x_n = 0$$

an. Denken wir uns die Größen $x_1, x_2, \cdots x_n$ durch die früheren Coordinaten $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$ ausgedrückt, so ergibt sich

$$(10.)\qquad \varepsilon = x_1 x_2 \cdots x_n .$$

7. Wenn g einen unbestimmten Punkt bezeichnet, so bestehen die Gleichungen

$$(11.)\qquad \begin{aligned} g &= x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n \\ g^2 &= x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \cdots + x_n^2 p_n \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ g^{n+1} &= x_1^{n+1} p_1 + x_2^{n+1} p_2 + \cdots + x_n^{n+1} p_n . \end{aligned}$$

Durch Elimination der Grundpunkte ergibt sich hieraus die Gleichung

$$(12.)\qquad X_0 g^{n+1} + X_1 g^n + \cdots + X_n g = 0$$

in welcher, da die früheren Bezeichnungen $X_0, X_1, \cdots X_n$ beibehalten sind, die Größen $x_1, x_2, \cdots x_n$ durch die Größen $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$ auszudrücken sind.

Es ergibt sich also

$$(13.)\qquad X_0 = \begin{vmatrix} x_1 x_2 \cdots x_n \\ x_1^2 x_2^2 \cdots x_n^2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_1^n x_2^n \cdots x_n^n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \varepsilon (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_{n-1} - x_n).$$

oder

$$(14.)\qquad X_0 = \varepsilon D,$$

wo D^2 die Discriminante der Gleichung $f(x) = 0$ bedeutet, vorausgesetzt, daß diese Gleichung für einen beliebigen Punkt gebildet wird.

Ferner ergibt sich

$$\begin{aligned} X_1 &= - X_0 (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \\ X_2 &= X_0 (x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n) \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ X_n &= (-1)^n \varepsilon X_0 . \end{aligned}$$

Es sind demnach die Coefficienten $X_1, X_2, \cdots X_n$ durch X_0 theilbar[1]). Nach der Division mit $X_0 g$ erhält man, wie sich voraussehen ließ, die Gleichung mit den Wurzeln $x_1, x_2, \cdots x_n$.

1) Siehe den angeführten Aufsatz des Herrn H. A. Schwarz.

Hätten wir statt des Punktes g^{n+1} den Punkt e_0 genommen, so würden sich dieselben Coefficienten, nur von dem Factor ε befreit, ergeben haben.

Wir bemerken, daß das constante Glied der Function $f(x)$, welches Herr Weierstraß mit ε_n bezeichnet, durch die Gleichung

$$\varepsilon_n = (-1)^n \varepsilon$$

bestimmt ist.

8. Ich betrachte jetzt das Nullgebiet. Dasselbe hat die Gleichung

$$x_1 x_2 \cdots x_n = 0$$

und besteht daher aus n Mannigfaltigkeiten von $n-1$ Dimensionen. Diese Mannigfaltigkeiten, welche ich die n Nullebenen nennen werde, sind bestimmt durch die Gleichungen

$$(16.) \qquad x_1 = 0; \; x_2 = 0; \; \cdots \; x_n = 0.$$

Jede der Nullebenen bildet für sich eine Mannigfaltigkeit, welche dieselben Eigenschaften besitzt, wie die ursprünglich betrachtete Mannigfaltigkeit. Wenn diejenige Coordinate, welche für alle Punkte der Nullebene gleich Null ist, weggelassen wird, so führen die vier Rechnungsoperationen, auf die Punkte der Nullebene angewendet, immer wieder zu Punkten derselben Nullebene. Wir können sagen, daß die Punkte der Nullebene in der betrachteten Mannigfaltigkeit eine Untergruppe bilden. Die zu dieser Gruppe gehörende der Gleichung $f(x) = 0$ entsprechende Gleichung wird erhalten, wenn wir einen linearen Factor von $f(x)$ weglassen, ebenso wie die der Untergruppe angehörende der Größe ε entsprechende Größe dadurch erhalten wird, daß aus der ursprünglichen Größe ε derjenige Factor weggelassen wird, welcher für die Punkte der Untergruppe gleich Null ist. Zwei beliebige der n Nullebenen haben eine Mannigfaltigkeit von $n-2$ Dimensionen gemeinsam, die wieder eine Untergruppe bildet. Diese Betrachtung läßt sich fortsetzen, bis man zuletzt zu n Gruppen gelangt, von denen jede nur eine Dimension hat und für die der Punkt Null gemeinschaftlich ist. Von den n Grundpunkten p liegt je einer in einer dieser Gruppen.

(Eindimensionale Theilgebiete des Herrn Weierstraß.)

9. Alle gefundenen Untergruppen haben die Eigenschaft, daß ein Product, welches einen der Gruppe angehörigen Factor enthält, während die übrigen Factoren beliebige Punkte der betrachteten Mannigfaltigkeit sind, selbst zu der Gruppe gehört. Die Punkte der Gruppe sind nämlich dadurch charakterisirt, daß ge-

wisse der Coordinaten x gleich Null sind. Da aber die Multiplication dadurch ausgeführt wird, daß die gleichnamigen Coordinaten mit einander multiplicirt werden, so müssen diejenigen Coordinaten des Productes gleich Null werden, welche für einen der Factoren gleich Null sind. Gehören mehrere Factoren verschiedenen Untergruppen an, so gehört das Product der diesen Untergruppen gemeinsamen Untergruppe an.

So wird beispielsweise ein Product aus n Factoren gleich Null, wenn diese n Factoren einzeln den n verschiedenen Nullebenen angehören, so daß jede der n Nullebenen einen der Factoren enthält.

10. Die gefundenen Resultate wende ich auf eine Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen an. Die drei Grundpunkte seien e_0, e_1, e_2; die Operationsgleichungen seien die folgenden

$$\begin{aligned} e_0^2 = e_0,\ e_0 e_1 &= e_1,\ e_0 e_2 = e_2, \\ e_1^2 &= e_2,\ e_1 e_2 = e_0, \\ e_2^2 &= e_1. \end{aligned}$$

Wird

$$g = \xi e_0 + \eta e_1 + \zeta e_2$$

gesetzt, so ergibt sich die Gleichung

$$x^3 - 3\xi x^2 + 3(\xi^2 - \eta\zeta)x - (\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3 - 3\xi\eta\zeta) = 0.$$

Das Nullgebiet ist also bestimmt durch die Gleichung

$$\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3 - 3\xi\eta\zeta = 0,$$

welche sich in die Gleichungen der drei Nullebenen

$$\xi + \eta + \zeta = 0,\ \xi + \alpha\eta + \beta\zeta = 0,\ \xi + \beta\eta + \alpha\zeta = 0$$

spaltet, wo α und β die beiden primitiven dritten Wurzeln der Einheit bezeichnen. Wählen wir für g entweder e_1 oder e_2, so ergibt sich

$$x^3 - 1 = 0,$$

woraus gefunden wird

$$p_1 = \tfrac{1}{3}(e_0 + e_1 + e_2),\ p_2 = \tfrac{1}{3}(e_0 + \alpha e_1 + \beta e_2),\ p_3 = \tfrac{1}{3}(e_0 + \beta e_1 + \alpha e_2).$$

11. Die im Vorhergehenden bestimmten Untergruppen haben die Eigenschaft, daß ein Product einer solchen Gruppe angehört, sobald einer der Factoren dieses Productes der Gruppe angehört. Man kann die Aufgabe stellen, alle Untergruppen zu finden, welche die Eigenschaft haben, daß ein Product der Gruppe angehört stets dann, wenn alle Factoren desselben der Gruppe angehören.

Wir wählen, um diese Aufgabe zu lösen, die Punkte p zu den Grundpunkten und nehmen an, daß die Coordinaten zweier Punkte x und y die Gleichungen

$$x_1 = \varphi(x_2, x_3, \cdots x_n); \; y_1 = \varphi(y_2, y_3, \cdots y_n)$$

befriedigen. Wir suchen die Function φ so zu bestimmen, daß dieselbe Relation zwischen den Coordinaten des Productes stattfindet. Diese Coordinaten sind

$$x_1 y_1, \; x_2 y_2, \cdots x_n y_n.$$

Man erhält also die Gleichung

$$\varphi(x_2, x_3, \cdots x_n) \cdot \varphi(y_2, y_3, \cdots y_n) = \varphi(x_2 y_2, x_3 y_3, \cdots x_n y_n).$$

Hieraus folgt bekanntlich, daß die Function φ ein Product von Potenzen ihrer Argumente ist. Die gesuchte Untergruppe wird daher durch eine Gleichung von der Form

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} = 1 \tag{17.}$$

definirt, wobei zu bemerken ist, daß in Folge der gewählten Form der Bedingungsgleichungen die früher gefundenen Untergruppen hier ausgeschlossen sind.

Alle Untergruppen, welche die angegebene Eigenschaft haben, werden mit Ausschluß der Nullebenen, durch eine oder mehrere Gleichungen von der angegebenen Form charakterisirt. Hat die Untergruppe q Dimensionen, so wird dieselbe durch eine q-fache Unendlichkeit von linearen Substitutionen in sich selbst transformirt, nämlich durch Multiplication mit jedem Punkte der Untergruppe. Als Beispiele solcher Untergruppen ergeben sich für die in dem vorhergehenden Art. besprochene Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen

$$\xi+\eta+\zeta = 1, \; \xi^2+\eta^2+\zeta^2-\eta\zeta-\zeta\xi-\xi\eta = 1, \; \xi^3+\eta^3+\zeta^3-3\xi\eta\zeta = 1.$$

12. Ich gehe jetzt dazu über, die Bedingungen dafür näher zu untersuchen, daß ein gegebenes Multiplicationsgesetz zu denjenigen gehöre, die nach den von Herrn Weierstraß aufgestellten Gesichtspunkten zulässig sind.

Herr Weierstraß drückt diese Bedingungen etwa so aus: Die Coefficienten der Operationsgleichungen müssen so gewählt werden, daß die Anwendung der gewöhnlichen für die Multiplication geltenden Regeln nicht zu widersprechenden Ergebnissen führt.

Von den dieser Bedingung genügenden Werthsystemen der Coefficienten müssen alle diejenigen ausgeschlossen werden, für welche eine der beiden Determinanten ε, X_0 oder die Discriminante der Gleichung $f(x) = 0$, welche mit D^2 bezeichnet werden möge, identisch gleich Null wird.

Es könnte scheinen, daß von diesen drei Bedingungen eine

bereits eine Folge der beiden anderen wäre und daher überflüssig sei; denn es hatte sich

$$X_0 = \varepsilon D,$$

oder, wenn die Gleichung $f(x) = 0$ mittelst der Grundpunkte $e_0, g, g^2, \cdots g^{n-1}$ gebildet wird,

$$X_0 = D$$

ergeben. Es darf aber aus diesen Gleichungen nicht geschlossen werden, daß die Bedingung, die Discriminante D^2 dürfe nicht identisch gleich Null sein, überflüssig sei. Denn die angeführten Gleichungen sind nur unter der Voraussetzung hergeleitet, daß weder die Determinante X_0, noch die Discriminante D^2 identisch gleich Null ist.

Schon die Betrachtung der aus zwei Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlen führt zu der Einsicht, daß die Discriminante identisch gleich Null werden kann, während die Determinanten ε und X_0 im Allgemeinen von Null verschiedene Werthe annehmen.

Setzt man nämlich

$$e_0^2 = e_0, \; e_0 e_1 = e_1, \; e_1^2 = \delta e_0$$

so ergibt sich

$$\varepsilon = \xi_1^2 - \delta \xi_2^2,$$
$$X_0 = \xi_2 (\xi_1^2 - \delta \xi_2^2),$$

für die Größe $g = \xi_1 e_0 + \xi_2 e_1$ besteht die quadratische Gleichung

$$g^2 - 2\xi_1 g_1 + (\xi_1^2 - \delta \xi_2^2) e_0 = 0,$$

es ist daher

$$D^2 = \delta \xi_2^2.$$

Gibt man nun der Größe δ den Werth Null, so wird D identisch gleich Null, während ε und X_0 nicht identisch verschwinden.

13. Bei der Form, in welcher Herr Weierstraß die angeführten Bedingungen ausgesprochen hat, ist es etwas umständlich, zu untersuchen, ob ein vorgelegtes System von Operationsgleichungen zu den zulässigen gehört oder nicht. Ich werde jetzt zeigen, daß es möglich ist, jene Bedingungen in anderer Weise und zwar überraschend einfach auszudrücken.

Wenn wir die Operationsgleichungen für die Grundpunkte p

$$p_b p_c = 0, \quad p_a^2 = p_a \tag{18.}$$

betrachten, so sehen wir, daß diese, als gewöhnliche Gleichungen aufgefaßt, durch genau n Systeme von Zahlen befriedigt werden, wenn die Lösung

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 0$$

nicht mitgerechnet wird. Diese n Lösungen sind die folgenden, wobei die unter einander stehenden Zahlen zusammengehören

$$(19.)\qquad \begin{array}{l} p_1 = 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots 0 \\ p_2 = 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ \cdots 0 \\ p_3 = 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots 0 \\ \cdot\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdots\ \cdot \\ p_n = 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots 1 \end{array}$$

Zugleich bemerkt man, daß, wenn aus diesen Lösungen bei der vorstehenden Anordnung derselben eine Determinante gebildet wird, diese den Werth 1 hat.

Da nun der Uebergang zu einem neuen Systeme von Grundpunkten stets durch ein System von linearen Substitutionen mit nicht verschwindender Determinante vermittelt wird, so müssen auch die dem neuen Systeme entsprechenden Operationsgleichungen, als gewöhnliche Gleichungen aufgefaßt, genau n Systeme von Lösungen besitzen, deren Determinante nicht verschwindet. Ich werde zeigen, daß das Erfülltsein der so gefundenen nothwendigen Bedingung für ein System von Operationsgleichungen auch hinreicht, um schließen zu können, daß dasselbe zu denjenigen gehört, welche nach den von Herrn Weierstraß aufgestellten Gesichtspunkten zulässig sind.

Es sei gegeben ein System von Operationsgleichungen und es werde vorausgesetzt, daß diese Gleichungen, als gewöhnliche Gleichungen aufgefaßt, die Lösungen haben

$$e_a = e_{a,1},\ e_{a,2},\ \cdots\ e_{a,n} \qquad (a = 1, 2, \ldots n)$$

wo die Determinante

$$|e_{b,c}|$$

einen von Null verschiedenen Werth hat.

Mit Hülfe der Operationsgleichungen bilden wir das Product zweier willkürlicher Punkte der Mannigfaltigkeit und erhalten

$$(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n)(\eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \cdots + \eta_n e_n) = (\zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \cdots + \zeta_n e_n).$$

Diese Gleichung muß befriedigt werden, wenn an die Stelle der Haupteinheiten e ein beliebiges der erwähnten n Größensysteme eingesetzt wird, denn diese Größen befriedigen die Operationsgleichungen und außer diesen sind nur die gewöhnlichen Rechnungsregeln angewendet.

Wir wollen jetzt jedem Punkte

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n$$

n reelle oder complexe Zahlen adjungiren, nämlich

(20.) $$x_b = \xi_1 e_{1,b} + \xi_2 e_{2,b} + \cdots + \xi_n e_{n,b} \qquad (b = 1, 2, \dots n).$$

Diese Zahlen nennen wir die zu dem Punkte x gehörenden Zahlen $x_1, x_2, \cdots x_n$.

Die zu einem Producte gehörende Zahl x_b ist gleich dem Producte der zu den einzelnen Factoren gehörenden Zahlen x_b.

Es ergibt sich, daß die n Zahlen x_b eines Punktes x diesen Punkt eindeutig bestimmen, sowie daß ein Punkt x nur dann unbestimmte oder unendliche Coordinaten hat, wenn eine oder mehrere der Zahlen x_b unbestimmt oder unendlich sind. Hieraus folgt, daß das Nullgebiet durch die Gleichung

(21.) $$x_1 x_2 \cdots x_n = 0$$

definirt ist.

Die Zahlen x_b können wir als Coordinaten für ein neues System von Grundpunkten auffassen, indem wir setzen

(22.) $$\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n.$$

Zur Bestimmung der Grundpunkte p erhalten wir die Gleichungen

(23.) $$e_{a,1} p_1 + e_{a,2} p_2 + \cdots + e_{a,n} p_n = e_a, \qquad (a = 1, 2 \dots n)$$

deren Determinante der Voraussetzung zufolge einen von Null verschiedenen Werth hat.

Setzen wir in diese Gleichungen für die Haupteinheiten e_a der Reihe nach die n Zahlensysteme ein, so wird ersichtlich, daß in Folge dieser Gleichungen für die Größen p sich die folgenden n Systeme von Zahlenwerthen

$$\begin{matrix} 1, & 0, & 0, & 0 & \cdots & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 & \cdots & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & 0 & \cdots & 1 \end{matrix}$$

ergeben.

Hieraus erhellt aber, daß die neuen Grundpunkte p mit den früher ebenso bezeichneten zusammenfallen. Die n Systeme von Zahlen sind nämlich ausreichend, um die Coefficienten der Operationsgleichungen zu bestimmen, indem die n Coefficienten jeder ein-

zelnen Operationsgleichung durch n lineare Gleichungen bestimmt werden, deren Determinante nicht verschwindet.

Da die Grundpunkte p und das zu denselben gehörende Multiplicationsverfahren aufgefunden sind, hat sich herausgestellt, daß das betrachtete System von Operationsgleichungen zu den zulässigen gehört.

Das Ergebniß der vorstehenden Untersuchung kann ausgedrückt werden wie folgt:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein gegebenes System von Operationsgleichungen eine zulässige Algebra charakterisire, ist, daß es n Systeme von reellen oder complexen Zahlen gibt, welche diese Gleichungen befriedigen und deren Determinante einen von Null verschiedenen Werth besitzt. Jedem Systeme, welches nicht bloß reelle Zahlen enthält, muß hierbei ein anderes zur Seite stehen, welches von den conjugirten complexen Zahlen gebildet wird.

Statt der Operationsgleichungen können n beliebige Systeme von Zahlenwerthen gegeben werden, welche die angegebene Beschaffenheit besitzen.

Alle zulässigen Systeme können durch lineare Substitutionen mit reellen oder complexen Coefficienten in einander übergeführt werden.

Bemerkungen zu einer Note des Herrn Hurwitz, enthalten in No. 6 Jhrg. 1887 p. 104 sqq. der Nachrichten.

Von **L. Fuchs**,
auswärt. Mitgliede.

Sitzung am 21. Mai.

Herr F. Klein hat der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eine Arbeit des Herrn Hurwitz über algebraische Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen, überreicht, welche in No. 6 der Nachrichten (20. April 1887 p. 85 sqq.)

abgedruckt worden ist. Dieser Arbeit ist ein Nachtrag angefügt, mit welchem ein Angriff auf mich beabsichtigt ist. Indem Herr Hurwitz einen an mich adressirten Brief zum Abdruck bringt, fordert er das Urtheil des Lesers darüber heraus, ob ich Herrn Hurwitz's Verdienste durch mein Citat in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie 24. Februar 1887 p. 162 genügend gewürdigt habe.

Wäre Herr Hurwitz hierbei stehen geblieben, so hätte ich um so weniger Veranlassung von meiner Gewohnheit, derartige Angriffe mit Stillschweigen zu übergehen, abzuweichen, als ich ganz und gar mit Herrn Hurwitz einverstanden bin, das Urtheil über diese Frage dem Forum der vorurtheilslosen Sachverständigen zu überlassen.

Aber Herr Hurwitz hat ein Weiteres gethan, das nicht mit Stillschweigen übergangen werden darf. Er hat einige Worte aus einem auf den genannten Brief von meiner Seite erfolgten Antwortschreiben herausgegriffen und dieselben an der oben genannten Stelle abdrucken lassen. Wenn es nun die gute Sitte verbietet, den Brief eines Anderen ohne Erlaubniß des Briefschreibers zu veröffentlichen, so gestattet es die gute Sitte noch weniger einige Worte eines solchen Briefes — wie man sie gerade brauchen zu können glaubt — ohne Erlaubniß der Oeffentlichkeit zu übergeben.

Ich bin daher genöthigt mein erwähntes an Herrn Hurwitz gerichtetes Antwortschreiben hier vollständig zum Abdruck zu bringen. Dasselbe lautet wie folgt:

Berlin, 26. Januar 1887.

„Ihr geschätztes Schreiben fand ich am Anfange dieses Monats vor, als ich von einer in Familienangelegenheiten unternommenen Reise zurückkehrte. Eine große Last von Geschäften und andere Umstände trauriger Natur haben mich indessen bis jetzt verhindert mich mit dem Gegenstande zu befassen. Entschuldigen Sie daher, daß ich mich heute damit begnüge, Ihnen meinen Dank für Ihre freundliche Mittheilung auszusprechen. Demselben füge ich aber noch eine Bitte hinzu. Ich kenne bis jetzt die von Ihnen in Ihrem Briefe angeführten Untersuchungen aus den Sitzungsberichten der Königl. Sächsischen Gesellsch. der Wissensch. nicht, habe auch einen Abzug derselben von Ihnen nicht erhalten. Meine Bitte geht nun dahin, Sie möchten, falls Sie noch Abzüge besitzen, mir einen derselben gütigst zusenden. Mit freundlichem Gruß

Ihr ergebener etc.

Hieran gestatte ich mir noch eine Bemerkung zu knüpfen. Das Zartgefühl des Herrn Hurwitz in Hinsicht der Würdigung

seiner Verdienste ließe erwarten, daß derselbe auf das Citiren anderer Autoren die peinlichste Sorgfalt verwendete. Es würde mich zu weit führen hier in eine Untersuchung der Frage einzutreten, in wie fern Herr Hurwitz dieser Erwartung bisher gerecht geworden ist. Es genüge daher, daß ich ein Citat desselben beleuchte, welches sich in eben derselben Arbeit des Herrn Hurwitz vom 20. April 1887 p. 92 der Nachrichten befindet.

In einer Note vom 22. Juli 1886 in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie p. 797 wende ich auf die Transformation der Abel'schen Integrale erster Gattung ein Verfahren an, welches ich bei einem analogen Probleme der Theorie der linearen Differentialgleichungen gegeben hatte (vergl. z. B. Borchardts Journal B. 66 p. 131—138). Dieses Verfahren hat durch eine Arbeit des Herrn Hamburger (Borchardts Journal B. 76 p. 121), wie ich auch in meiner erwähnten Note vom 22. Juli 1886 Sitzungsber. p. 799 citirt, eine elegante Vereinfachung erfahren. Herr Hurwitz bedient sich nun p. 92 l. c. ebenfalls für die Transformation der Abel'schen Integrale meines Verfahrens, citirt aber nur die Abhandlung des Herrn Hamburger.

Aus welchem Grunde? Nun wohl aus demselben Grunde, aus welchem er in seiner in Leipzig im Jahre 1881 verfaßten Inauguraldissertation „Grundlagen der Theorie der elliptischen Modulfunktionen“ es zu erwähnen unterlassen hat, daß ich in meiner Arbeit über die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale (Borchardts Journ. B. 71 p. 91) (12. August 1869) und später ausführlicher in einem Briefe an Herrn Hermite (gedruckt in Borchardts Journal B. 83 p. 13 Jhrg. 1876) einen Beitrag zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen geliefert hatte.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

23. November. **№ 18.** 1887.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung vom 5. November.

Riecke, Ueber die scheinbare Wechselwirkung von Ringen, welche sich in einer incompressibelen Flüssigkeit in Ruhe befinden.

Hermann in Königsberg, Kleiner Nachtrag zu der Mittheilung in den Nachrichten 1887 S. 326 ff. (Vorgelegt von Herrn Riecke).

Voigt, Bestimmung der Elasticitätsconstanten für Topas und Baryt.

Klein, Zur Theorie der hyperelliptischen Functionen beliebig vieler Argumente.

Reifferscheid in Greifswald, Des Kaiser Sigismund Buch von Eberhard Windeck. (Vorgelegt von Sauppe.)

de Lagarde, Agathangelus.

V. Meyer, a) Ueber die negative Natur organischer Radicale. b) Weitere Beobachtungen über die Haltbarkeit antiseptischer Sublimatlösungen.

Ueber die scheinbare Wechselwirkung von Ringen, welche in einer incompressibeln Flüssigkeit in Ruhe sich befinden.

Von **Eduard Riecke.**

Die folgende Mittheilung enthält einen Beweis des bekannten Kirchhoffschen Satzes, welcher allgemeiner ist als der von Kirchhoff gegebene, in sofern er über die Dimensionen und Entfernungen der Ringe keiner beschränkenden Voraussetzungen bedarf. Die Verallgemeinerung wird ermöglicht durch eine eigenthümliche Wahl der erzeugenden Curven und bleibt daher auf Ringflächen von einem gewissen besonderen Charakter beschränkt. Die Grundlage des Beweises wird durch einige Sätze über elektro-

magnetische und elektrodynamische Fernwirkung geliefert, mit welchen wir uns zuerst zu beschäftigen haben.

I.

Es sei gegeben ein beliebiges System galvanischer Ströme $i_1, i_2, i_3 \ldots$, welche in den geschlossenen Curven $s_1, s_2, s_3 \ldots$ cirkuliren. Wir bestimmen das elektromagnetische Potential φ derselben und konstruiren die Flächen konstanten Potentiales, sowie die Kraftlinien. Die Flächen konstanten Potentiales werden begrenzt von den Stromcurven; jeder bestimmten solchen Curve ordnet sich ein bestimmtes System fächerartig von derselben ausstrahlender Flächen zu; die Zahl dieser Systeme ist daher ebenso groß wie die Zahl der Stromcurven. Sie werden von einander getrennt durch Flächen, welche zwischen den Stromcurven verlaufen und welche den Raum in einzelne Zellen theilen, deren Kerne durch die Stromkurven repräsentirt sind. Auf jenen Flächen, welche wir als Grenzflächen bezeichnen, ist das Potential konstant, aber in verschiedenen Theilen derselben verschieden. Die Grenzflächen werden nemlich zu vollständigen Potentialflächen ergänzt durch eine zweite Art von Flächen, welche die einzelnen Stromcurven untereinander verbinden. Sie durchschneiden die zwischen den letzteren liegenden Grenzflächen in gewissen Linien, den Grenzlinien. Betrachten wir eine bestimmte Grenzlinie, etwa diejenige, welche von der Verbindungsfläche der Ströme i_1 und i_2 erzeugt wird, so unterscheiden sich die Potentialwerthe zu beiden Seiten derselben um $4\pi i_1$ beziehungsweise $4\pi i_2$.

Die Kraftlinien bilden geschlossene Ringe, welche in der unmittelbaren Nachbarschaft einer Stromcurve nur diese eine umschließen, bei größerer Entfernung zwei und mehr Stromcurven umschlingen. Der Uebergang wird gebildet durch Curven, welche in der Form einer 8 zwei benachbarte Stromcurven umlaufen. Die Doppelpunkte derartiger Kraftlinien liegen auf den zuvor besprochenen Grenzlinien; die elektromagnetische Wirkung selbst ist in den Doppelpunkten gleich Null. Die Kraftlinien werden im Folgenden bezeichnet durch den Buchstaben m.

Die Potentialflächen P besitzen eine doppelte Schaar von Krümmungslinien; die Linien der einen Schaar sind geschlossen; die äußersten von ihnen laufen parallel mit dem Rande s der Fläche; die folgenden werden von den vorhergehenden stets vollständig umschlossen; wir bezeichnen diese Curven als Parallelcurven p. Ziehen wir alle durch die Punkte einer Parallelcurve gehenden Kraftlinien, so entsteht eine ringförmige Fläche, R, welche

die Stromcurve s umhüllt. Die Curve p kann jederzeit so gewählt werden, daß die Fläche R nur diese eine Stromcurve umschließt. Eine zweite Erzeugungsart des Ringes ergiebt sich, wenn wir erst eine einzige von den Kraftlinien zeichnen, welche bei der vorhergehenden Construktion auftraten; durch diese legen wir dann Parallelcurven und verbinden dieselben durch eine Fläche, welche identisch ist mit dem zuvor erhaltenen Ringe. Wir erkennen hieraus, daß jede Ringfläche R überzogen ist mit einem Netze sich rechtwinklig durchschneidender Curven, den Parallelcurven p und den Kraftlinien oder Meridiancurven m.

Wir setzen nun voraus, daß jede der Stromcurven s_1, s_2, s_3 .. in der angegebenen Weise umschlossen worden sei von einem Ringe, R_1, R_2, R_3 . . ., auf welchem die Schaaren der Curven m und p verzeichnet sind. Wir denken uns weiter jene Flächen bedeckt mit galvanischen Strömen, welche in der Richtung der Parallelcurven p cirkuliren. Die Stärke der Strömung sei an irgend einer Stelle m einer Meridiancurve gegeben durch

$$\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d\varphi}{dm}$$

wo φ wie früher das elektromagnetische Potential der Ströme i_1, i_2, i_3 . . . bezeichnet. Die gesammte Elektricitätsmenge, welche in der Zeiteinheit durch die Meridiancurve m hindurchgeht ist hiernach gleich

$$\int \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d\varphi}{dm}\, dm;$$

wird das Potential φ so definirt, daß die Componenten der elektromagnetischen Kraft durch seine positiven Differentialquotienten dargestellt werden, so ist dieses Integral gleich i, d. h. gleich der Stärke des Stroms, welcher in der von dem Ringe umhüllten Stromcurve s cirkulirt. Wenn wir also die Stärke der zu m senkrechten Strömung in der angegebenen Weise bestimmen, so erscheint der in der Axe s des Ringes laufende Strom i ohne Aenderung seiner Stärke ausgebreitet über die Oberfläche. Mit Bezug auf diese in den Ringflächen R_1, R_2, R_3 . . . cirkulirenden galvanischen Ströme gelten nun die folgenden Sätze.

1. Die elektromagnetische Wirkung auf alle Punkte im Inneren der Ringe ist Null.

2. Die elektromagnetische Wirkung auf alle Punkte außerhalb der Ringe ist dieselbe, wie die der Ströme i_1, i_2, i_3 . ., welche in den Ringaxen s_1, s_2, s_3 . . . cirkuliren.

Man kann hiernach die Ströme i bezeichnen als die Bilder der an der Oberfläche der Ringe vorhandenen galvanischen Strömungen.

Um diese Sätze zu beweisen, ziehen wir erst auf irgend einer Potentialfläche P_0 das System der Krümmungslinien, die Parallelcurven p und die zu ihnen senkrechten Linien, welche wir durch n bezeichnen. Der Rand der Fläche P_0 wird gebildet durch eine Parallelcurve p_0, welche auf der die Stromcurve s umhüllenden Ringfläche liegt. Wir ziehen auf der letzteren auch eine Meridiancurve m_0 und nehmen auf dieser zwei Punkte O' und O'' so, daß die zwischen ihnen liegende Strecke durch den Schnittpunkt O der Curven m_0 und p_0 halbirt wird; der Abstand von O' und O'' sei dm_0. Wir ziehen endlich die Parallelcurven p' und p'', welche durch O' und O'' hindurchgehen und konstruiren die von jenen begrenzten Potentialflächen P' und P''. Die gesammte Stärke der zwischen den Curven p' und p'' enthaltenen Strömung ist gleich $\frac{1}{4\pi}\frac{d\varphi}{dm_0}dm_0 = \frac{1}{4\pi}(\varphi''-\varphi')$; hier sind unter φ'' und φ' diejenigen Potentialwerthe zu verstehen, welche den durch p' und p'' begrenzten Flächen entsprechen. Wir denken uns jetzt die ganze Strömung koncentrirt in der mittleren Curve p_0; wir ersetzen also die in dem ringförmigen Streifen $p'p''$ ausgebreitete Strömung durch eine lineare. Zerlegt man die ganze Oberfläche des Ringes durch aufeinander folgende Curven $p'p''$ in Parallelstreifen, so können die in ihnen enthaltenen Strömungen alle ersetzt werden durch lineare in den Mittelcurven p laufende Ströme; es wird so die Strömung, welche über die Oberfläche des Ringes kontinuirlich ausgebreitet war, wieder aufgelöst in ein System von linearen Strömen. Die Stärke derselben ist gleich der Differenz der Potentialwerthe, welche den die Streifen begrenzenden Zwischencurven p' und p'' entsprechen.

Wir kehren nun zurück zu der Betrachtung der Potentialfläche P_0; dieselbe zerfällt in eine Reihe von Quadraten durch das System ihrer Krümmungslinien. Denken wir uns alle diese Quadrate umflossen von Strömen von der Stärke $\frac{1}{4\pi}(\varphi''-\varphi')$, so wird das so entstehende System geschlossener und unendlich kleiner Ströme auf alle außerhalb der Fläche liegenden Punkte genau dieselbe Wirkung ausüben, wie der in der Curve p_0 cirkulirende Strom. Vorausgesetzt ist natürlich, daß die Richtung der die Quadrate umfließenden Ströme übereinstimmt mit der Stromrichtung in p_0.

Durch die Seiten eines der auf P_0 befindlichen Quadrate ziehen

wir Kraftlinien; es entsteht dann eine in sich zurücklaufende Röhre, von welcher zunächst vorausgesetzt werde, daß sie nur die eine betrachtete Ringfläche umschlingt. Die Röhre durchschneidet alle Potentialflächen, welche durch die Parallelcurven p, p', p'' hindurchgehen. Sie wird ihrerseits durch die Flächen, welche den Zwischencurven p', p'' entsprechen, in eine Reihe aufeinander folgender Zellen zerlegt; diese sind in ihren mittleren Querschnitten umzogen von den Linien, in welchen die Röhre von den Potentialflächen der Parallelen p durchschnitten wird. Jeden der auf dem Ringe cirkulirenden linearen Ströme können wir ersetzen durch ein System unendlich kleiner Ströme auf der entsprechenden Potentialfläche. Die Eintheilung der letzteren stellen wir her mit Hülfe der von den Quadraten der Fläche P_0 ausgehenden Röhren. Es sind dann die von Strömen umflossenen Elemente der Potentialflächen gleichzeitig Querschnitte der von den Kraftlinien gebildeten Röhren oder der in diesen von den Flächen P' und P'' ausgeschnittenen Zellen. Bei der von uns betrachteten Röhre werden also die mittleren Querschnitte umflossen sein von Strömen von der Stärke $\frac{1}{4\pi}(\varphi''-\varphi')$, wo φ'' den Potentialwerth auf der Endfläche, φ' den auf der Anfangsfläche der entsprechenden Zelle repräsentirt. Diese Ströme können wir weiter ersetzen durch magnetische Pole auf den Endflächen der Zellen. Ihre Stärke ist so zu bestimmen, daß das magnetische Moment der durch sie gebildeten Magnete gleich ist dem galvanischen Moment der entsprechenden Ströme. Ist also μ die Stärke des auf der Endfläche liegenden Nordpoles, dm die Länge einer Zelle, $d\omega$ ihr Querschnitt, so ist

$$\mu dm = \frac{1}{4\pi}(\varphi''-\varphi')\,d\omega\,; \quad \mu = \frac{1}{4\pi}\frac{d\varphi}{dm}\,d\omega.$$

Nach einem bekannten Satze ist $\frac{d\varphi}{dm}\,d\omega$ innerhalb einer von Kraftlinien gebildeten Röhre konstant; die Stärke der auf den Endflächen der Zellen liegenden Nordpole ist also bei allen dieselbe. Nun bildet aber jede solche Fläche gleichzeitig die Anfangsfläche einer folgenden Zelle, sie trägt also gleichzeitig einen Südpol von derselben Stärke $\frac{1}{4\pi}\frac{d\varphi}{dm}\,d\omega$. Die Wirkungen der Pole heben sich somit auf in all denjenigen Punkten, welche außerhalb der betrachteten Röhre sich befinden. Dasselbe ist auch dann der Fall, wenn die betrachtete Röhre gleichzeitig mehrere Ringflächen

umschlingt; nur entspringen dann die Potentialflächen, welche die Zelltheilung bewirken, nicht mehr von einem einzigen, sondern gleichzeitig von all den umschlungenen Ringen.

Der ganze zwischen den Ringflächen enthaltene Raum wird ausgefüllt von den durch die Kraftlinien erzeugten Röhren; auf jede derselben findet die vorhergehende Betrachtung Anwendung. Die Gesammtwirkung der in den Röhren hergestellten magnetischen Vertheilung ist also gleich Null für die innerhalb der Ringe liegenden Punkte. Die magnetische Vertheilung ist aber substituirt an Stelle der Ströme, welche die Querschnitte der Zellen umfließen; diese ihrerseits sind für alle im Inneren der Ringe liegenden Punkte äquivalent mit der auf der Oberfläche der Ringe vorhandenen Strömung. Es ist somit gezeigt, daß auch diese auf die in dem Inneren der Ringflächen befindlichen Punkte keine elektromagnetische Wirkung ausübt.

Es bleibt also noch übrig der Beweis des zweiten Satzes, welcher die Wirkung der Strömung auf einen außerhalb der Ringe gelegenen Punkt betrifft. Wir verfahren in diesem Fall zunächst ganz ebenso wie in dem vorhergehenden. Ausgehend von den auf der Fläche P_0 gezeichneten Quadraten erfüllen wir den ganzen Raum mit den Röhren, welche durch die von dem Rande der Quadrate aufsteigenden Kraftlinien erzeugt werden. Innerhalb einer dieser Röhren liegt der Punkt A mit der magnetischen Masse $+1$. Wir grenzen ein als geradlinig zu betrachtendes Stück S der Röhre so ab, daß der Punkt A in der Mitte desselben liegt. Die Länge von S sei sehr groß im Vergleich zu den Dimensionen des Querschnittes, es enthalte also der Röhrentheil S seiner Länge nach eine große Zahl einzelner Zellen. Wie früher können wir zunächst an Stelle der auf der Oberfläche der Ringe vorhandenen Strömung das System der unendlich kleinen Ströme substituiren, welche die Querschnitte der einzelnen Zellen umfließen. Die Ersetzung der Ströme durch magnetische Pole ist aber jetzt nur anwendbar bei denjenigen Zellen, welche außerhalb des Abschnittes S sich befinden. Die Ströme, welche die Oberfläche von S umziehen, bilden in ihrer Gesammtheit ein Solenoid. Die Wirkung eines solchen auf einen inneren Punkt ist gleich der Wirkung derjenigen magnetischen Belegung der Endflächen, welche für alle äußeren Punkte mit dem Solenoid äquivalent ist, vermindert um eine in die Richtung der Axe fallende Kraft, welche gleich ist 4π multiplicirt mit der auf die Längeneinheit der Axe kommenden Stromstärke [1]). Um die Wirkung des Röhrenabschnittes S auf den Punkt

1) Riecke, Pogg. Ann. 145 S. 218.

A zu ermitteln, können wir also zunächst wieder die Ströme ersetzen durch die äquivalenten Pole. Wir erhalten dann ganz dieselbe magnetische Vertheilung wie in dem vorhergehenden Falle und die Wirkungen der Pole werden sich daher auch jetzt wieder zerstören. Es bleibt also nur übrig die in die Richtung der Solenoidaxe, also in unserem Falle in die Richtung einer Kraftlinie fallende Wirkung. Um diese zu berechnen, beachten wir, daß auf die Strecke dm der Axe die Stromstärke $\frac{1}{4\pi}(\varphi''-\varphi')$, also auf die Längeneinheit die Stromstärke $\frac{1}{4\pi}\frac{\varphi''-\varphi'}{dm}=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d\varphi}{dm}$ kommt. Die elektromagnetische Wirkung der auf den Ringen vorhandenen Strömungen ist somit in dem betrachteten Punkte A gegeben durch $\frac{d\varphi}{dm}$, sie ist also in der That identisch mit der Wirkung der die Curven s durchlaufenden Ströme i.

II.

Wir gehen nun über zu der Betrachtung der von den Strömen i_1, i_2, i_3 . . . ausgeübten elektrodynamischen Wirkung. An der Stelle A, welche durch die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z bestimmt werden möge, befinde sich ein Stromelement jds mit den Richtungscos. α, β, γ. Wir denken uns in A einen magnetischen Punkt von der Masse 1, und bezeichnen die Componenten der Kraft, welche von den Strömen i auf diesen Punkt ausgeübt wird, durch A, B, C; die Componenten der auf das Element jds ausgeübten elektrodynamischen Wirkung sind dann gegeben durch:

$$X = j\,(\beta C-\gamma B)\,ds$$
$$Y = j\,(\gamma A-\alpha C)\,ds$$
$$Z = j\,(\alpha B-\beta A)\,ds.$$

In diesen Formeln ist der bekannte Satz enthalten, daß die elektrodynamische Wirkung senkrecht steht gegen das Stromelement und gegen die durch seinen Anfangspunkt hindurchgehende Kraftlinie. Die Formeln gelten unter der Voraussetzung, daß die Axen des Coordinatensystems in der Reihenfolge x, y, z ein rechtläufiges Strahlenbündel darstellen. Die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ A & B & C \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

ist vermöge der für X, Y, Z geltenden Werthe positiv. Folglich

bilden die Richtungen des Stromelementes, der Magnetkraftlinie und der elektrodynamischen Kraft gleichfalls ein rechtläufiges Strahlenbündel. Legen wir eine menschliche Figur in die Richtung des Elementes, wenden wir das Gesicht derselben nach der Magnetkraftlinie, so giebt die ausgestreckte linke Hand die Richtung der elektrodynamischen Kraft an. Ihre Stärke ist gleich

$$\sqrt{X^2+Y^2+Z^2} = j\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sin(ds, m)\, ds.$$

Wir werden diese Sätze nun auf das System unserer ringförmigen Stromflächen in Anwendung bringen. Ihre elektromagnetische Wirkung auf einen äußeren Punkt ist gleich der Wirkung der linearen Ströme i. Aus dem vorhergehenden Satze folgt, daß auch die elektrodynamische Wirkung der auf den Ringen ausgebreiteten Strömung auf ein außerhalb derselben befindliches Stromelement dieselbe ist, wie die Wirkung der in den Axen der Ringe cirkulirenden Ströme i_1, i_2, i_3 .... Die elektromagnetische Wirkung der auf den Ringen angenommenen Strömung verschwindet im Inneren derselben; gleiches gilt somit auch von der elektrodynamischen Wirkung auf ein beliebiges im Inneren der Ringe liegendes Stromelement.

Wir lassen den Punkt A, den Anfangspunkt des Elementes jds auf einem beliebigen Wege der Oberfläche eines Ringes näher und näher rücken; immer besteht zwischen den in demselben vorhandenen elektromagnetischen und elektrodynamischen Wirkungen die zuvor gegebene Beziehung. Dieß wird auch dann noch der Fall sein, wenn der Punkt A unmittelbar an die äußere Ringoberfläche sich anlegt. Die magnetische Kraftlinie, welche durch A hindurchgeht, ist dann gleichzeitig eine Meridiancurve m des Ringes. Die Richtung der magnetischen Kraft ist dadurch bestimmt, daß das Strahlenbündel, welches durch die Stromrichtung p, die äußere Ringnormale n und die Richtung von m gebildet wird, der Ampèreschen Regel entsprechend ein rechtläufiges sein muß. Lassen wir nun die Richtung des Stromelementes jds zusammenfallen mit der Parallelcurve p, so berührt die durch das Element und die magnetische Kraft gelegte Ebene die Oberfläche des Ringes. Es fällt also die Richtung der elektrodynamischen Kraft in die Normale n und zwar nach dem vorhergehenden Satze in die Richtung der inneren Normale. Da der Winkel (ds, m) bei der angenommenen Lage des Elementes ds ein Rechter ist, so ergiebt sich für die Größe der elektrodynamischen Wirkung der Ausdruck:

$$jds\,\frac{d\varphi}{dm}.$$

Wenn der Punkt A und mit ihm das Stromelement jds auf die innere Seite der Ringfläche tritt, so verschwindet die auf dasselbe ausgeübte elektrodynamische Wirkung.

III.

Wir wenden die vorhergehenden Sätze an auf die Elemente der auf den Ringflächen vorhandenen Strömungen selbst. Grenzen wir auf irgend einem der Ringe ein Element ab von der Länge dp, der Breite dm, so hat der in demselben in der Richtung p laufende Strom die Stärke $\frac{1}{4\pi}\frac{d\varphi}{dm}\,dm$. Wir denken uns, daß der Ring aus einer Membran von endlicher Dicke hergestellt sei, und nehmen an, daß die Strömung sich nicht beschränke auf seine Oberfläche, sondern vertheile über die ganze Dicke. Bezeichnen wir diese durch N, ein Element der Normalen, welches im Abstand ν von der inneren Oberfläche sich befindet durch $d\nu$, so kommt auf das Volumelement $dp\;dm\;d\nu$ die Stromstärke

$$\frac{1}{4\pi}\frac{d\varphi}{dm}\,dm\,\frac{d\nu}{\mathrm{N}}$$

Ist M die magnetische Kraft, welche das gegebene Stromsystem an der Stelle des betrachteten Elementes ausübt, so ist die elektrodynamische Wirkung auf dieses letztere gleich

$$\frac{1}{4\pi}\frac{d\varphi}{dm}\,dp\;dm\;M\,\frac{d\nu}{\mathrm{N}}\,.$$

Nun ist M an der inneren Oberfläche, d. h. für $\nu = 0$ ebenfalls gleich Null; an der äußeren für $\nu = \mathrm{N}$ gleich $\frac{d\varphi}{dm}$, somit kann an der Stelle ν gesetzt werden

$$M = \frac{\nu}{\mathrm{N}}\frac{d\varphi}{dm}.$$

Die ganze elektrodynamische Kraft, welche auf das dem Oberflächenelement $dp\;dm$ entsprechende Stück des Ringes ausgeübt wird, ist demnach gegeben durch

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\varphi}{dm}\right)^2 dp\,dm\;\frac{1}{\mathrm{N}^2}\int_0^{\mathrm{N}}\nu\,d\nu = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{d\varphi}{dm}\right)^2 dp\;dm.$$

Diese Kraft stellt sich also dar in der Form eines auf die Ringoberfläche nach innen zu ausge-

übten Druckes, welcher bezogen auf die Flächeneinheit den Werth besitzt

$$\frac{1}{8\pi}\left(\frac{d\varphi}{dm}\right).$$

Die elektrodynamische Wechselwirkung der Ringe R_1, R_2, R_3 ... setzt sich zusammen aus der Gesammtheit aller dieser Drucke; betrachten wir einen einzelnen Ring R_1, so ist die Wirkung der auf seine Oberfläche ausgeübten Drucke dieselbe wie die Wirkung der elektrodynamischen Fernkräfte, welche auf seine einzelnen Elemente ausgeübt werden von den Ringen R_2, R_3 ... und von den anderen Elementen des Ringes R_1 selbst. Sind die Ringe starr, so setzen sich jene Drucke zu denselben translatorischen und rotatorischen Kräften zusammen, welche auf der anderen Seite durch die Differentialquotienten des elektrodynamischen Potentiales dargestellt werden.

IV.

Aus den vorhergehenden Betrachtungen folgt endlich in einfachster Weise der Beweis des Kirchhoff'schen Satzes. Es seien gegeben die Curven s; in denselben denken wir uns die galvanischen Ströme i_1, i_2, i_3 ... cirkulirend und berechnen das elektromagnetische Potential φ derselben. Wir umschließen die Curven s durch die Ringe R_1, R_2, R_3 ..., welche durch das Netz der sich kreuzenden Parallel- und Meridiancurven erzeugt werden. Den Raum zwischen den Ringen erfüllen wir mit einer incompressibeln Flüssigkeit von der Dichte μ, welche im Unendlichen ruht; der konstante Druck, welchen sie im Unendlichen besitzt sei gleich Null. Befindet sich die Flüssigkeit in einer stationären Strömung, deren Geschwindigkeitspotential gleich dem elektromagnetischen Potential φ ist, so ist der Druck an einer beliebigen Stelle gegeben durch

$$-\frac{\mu}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}.$$

An der Oberfläche eines Ringes ist somit der Druck gleich

$$-\frac{\mu}{2}\left(\frac{d\varphi}{dm}\right)^2$$

d. h. entgegengesetzt gleich dem früher betrachteten elektrodyna-

mischen Druck, wenn wir die Dichte der Flüssigkeit gleich $\frac{1}{4\pi}$ setzen.

Wenn also eine Flüssigkeit von der Dichte $\frac{1}{4\pi}$ in der angegebenen Weise durch die Ringe hindurch in Cirkulation versetzt wird, so üben die letzteren eine scheinbare Wechselwirkung auf einander aus, welche der elektrodynamischen Wechselwirkung der entsprechenden auf den Ringoberflächen ausgebreiteten galvanischen Strömungen entgegengesetzt gleich ist.

Nachtrag zu der Abhandlung über Polarisation zwischen Electrolyten (No. 11 der Nachrichten).

Von **L. Hermann.**

Bei der Literaturangabe S. 327 Anm. 1 ist noch hinzuzufügen, daß eine etwas ausführlichere Darstellung der angeführten Untersuchung von du Bois-Reymond 1884 in dem Schlußheft seiner „Untersuchungen zur thierischen Electricität" erschienen ist (Bd. II. Abth. 2. S. 398—422).

Zur Theorie der hyperelliptischen Functionen beliebig vieler Argumente.

Von **Felix Klein.**

Im 27. Bande der mathematischen Annalen habe ich betreffs der hyperelliptischen Functionen zweier Variabler gewisse Untersuchungen veröffentlicht[1]), deren Eigenthümlichkeit in der folgerichtigen Heranziehung der Invariantentheorie der binären Formen bestand, wodurch sich die Definition der Thetafunctionen am algebraischen Gebilde, ihre Reihenentwickelung etc. überraschend einfach gestaltete. Diese Untersuchungen habe ich mittlerweile auf hyperelliptische Functionen beliebig vieler Argumente ausgedehnt, worüber nachstehend kurz berichtet werden soll.

---

1) „Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen."

Sei $f(z) = a_z^{2p+2}$ eine binäre Form $(2p+2)$ten Grades von nicht verschwindender Discriminante. Wir betrachten die zugehörigen überall endlichen Integrale

$$(1) \qquad \int \frac{z_1^{p-1}(z\,dz)}{\sqrt{fz}}, \quad \int \frac{z_1^{p-2} z_2 (z\,dz)}{\sqrt{fz}}, \ldots .$$

die wir mit $w_1, w_2, \ldots w_p$ bezeichnen. Die Bedeutung der Buchstaben w erweitern wir dann gleich, indem wir statt der einzelnen Integrale Integralsummen in Betracht ziehen. In dieser Hinsicht mag die folgende Formel zu Grunde gelegt werden:

$$(2) \qquad w_\alpha = \int_a^{x'} dw_\alpha + \int_a^{x''} dw_\alpha + \ldots\ldots \int_a^{x^{(2\nu)}} dw_\alpha.$$

Hier soll a irgend einen der Verzweigungspuncte $f = 0$ bedeuten — seine specielle Auswahl ist für alles Folgende gleichgültig, insofern eine Umänderung von a nur eine Vermehrung der w_α um ganzzahlige Multipla von Perioden bewirken würde —, $x', x'', \ldots x^{(2\nu)}$ sind die veränderlichen Grenzen, ν eine beliebige ganze Zahl.

Wir denken uns jetzt die 2^{2p} zum hyperelliptischen Gebilde gehörigen Thetareihen $\vartheta(w_1 \ldots w_p)$ irgendwie gebildet, substituiren in sie für die w die Ausdrücke (2) und fragen nach der algebraischen Darstellung der ϑ-quotienten durch die $x', x'', \ldots x^{(2\nu)}$. Diese Frage ist im Wesentlichen bereits vor langer Zeit von Herrn Prym beantwortet worden[1]; ich gehe auf dieselbe hier nur ein, weil ich das explicite Resultat für meine weiteren Zwecke gebrauche. Bei der hier festgehaltenen Verwendung homogener Variabler gelangt man zu folgender einfachen, alle Einzelfälle umfassenden Regel: Man zerlege die gegebene Form $(2p+2)$ten Grades f_{2p+2} auf alle Weisen in das Product zweier Factoren φ, ψ, deren Grade sich um Multipla von 4 unterscheiden:

$$(3) \qquad f_{2p+2} = \varphi_{p+1-2\mu} \cdot \psi_{p+1+2\mu} \quad \left(\mu = 0, 1 \ldots \left[\frac{p+1}{2}\right]\right),$$

und bilde nun, indem man ν hinreichend groß voraussetzt, die 2ν-reihigen Determinanten:

---

1) „Zur Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche." Bd. XXII der Denkschriften der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft. Zürich. 1866.

$$D = \left| x_1^{\nu-1+\mu} \sqrt{\varphi x}, \ldots . \; x_2^{\nu-1+\mu} \sqrt{\varphi x},\; x_1^{\nu-1-\mu} \sqrt{\psi x}, \ldots . \; x_2^{\nu-1-\mu} \sqrt{\psi x} \right| \quad (4)$$
$$(x = x', x'', \ldots \ldots . \; x^{(2\nu)}).$$

Die 2^{2p} Thetareihen $\vartheta(w_1 \ldots w p)$ verhalten sich dann einfach wie die mit gewissen Constanten multiplicirten D, in der Art, daß geraden und ungeraden μ gerade und ungerade ϑ correspondiren. — Hierzu folgende Bemerkung. Die Determinante (4) enthält $\nu + \mu$ Colonnen mit $\sqrt{\varphi x}$, $\nu - \mu$ Colonnen mit $\sqrt{\psi x}$; sie verliert also ihre Bedeutung, wenn $\nu < \mu$ wird, — während sie für $\nu = \mu$ trotz der dann scheinbar auftretenden negativen Exponenten der x noch bestehen bleibt, indem die Glieder mit $\sqrt{\psi x}$ einfach in Wegfall kommen. Dem entspricht, daß das zugehörige ϑ für $\nu < \mu$ identisch verschwindet und zwar $(\mu - \nu)$-fach. Insbesondere verschwindet ϑ für die Nullwerthe der Argumente w μ-fach, d. h. mit seinen ersten, zweiten, ... $(\mu - 1)$ten Differentialquotienten [1]).

Es sei nunmehr

$$P_{x,y}^{x',y'} \tag{5}$$

irgend ein Integral dritter Gattung mit den Gränzen x, y und den Parametern x', y'. Wir betrachten dasselbe insbesondere unter der Annahme, daß x', $\sqrt{fx'}$ mit $x, -\sqrt{fx}$, und y', $\sqrt{fy'}$ mit $y, -\sqrt{fy}$ coincidire, was wir durch die Schreibweise

$$P_{x,y}^{\bar{x},\bar{y}} \tag{6}$$

zur Anschauung bringen. Wir bilden uns ferner den Ausdruck:

$$\Omega(x, y) = \frac{(xy) \cdot e^{\frac{1}{2} P_{x,y}^{\bar{x},\bar{y}}}}{\sqrt[4]{fx \cdot fy}}. \tag{7}$$

Derselbe ist in x_1, x_2 (und ebenso in y_1, y_2) von der $-\frac{p-1}{2}$ten Dimension und also für $p > 1$ keineswegs im gewöhnlichen Sinne des Wortes eine „Function" der Stelle x, oder y, des hyperelliptischen Gebildes. Trotzdem kann er beim Studium irgendwelcher auf diesem Gebilde verlaufender Functionen vortheilhafter Weise verwendet werden. Da er nämlich nirgends unendlich wird und nur verschwindet, wenn $x = y$, $\sqrt{fx} = \sqrt{fy}$ ist, so kann man ihn als eine Art von Primfactor benutzen. Wir gebrauchen insbesondere noch den Werth, den $\Omega(x, y)$ annimmt, wenn y mit $\bar{x}$ zusam-

1) Vergl. hierzu die Angaben bei Weber im 13. Bande der mathematischen Annalen: „Ueber gewisse in der Theorie der Abel'schen Functionen auftretende Ausnahmfälle."

menfällt (also $y = x$, $\sqrt{fy} = -\sqrt{fx}$ ist). Formel (7) liefert dann zunächst $0 . \infty$ und es muß der wahre Werth durch Grenzübergang gefunden werden. Ich bezeichne diesen wahren Werth mit:

$$(8) \qquad \mathrm{X}(x) = \left(\frac{(xy) \cdot e^{\frac{1}{2} P_{x,y}^{\bar{x},\bar{y}}}}{\sqrt[4]{fx \cdot fy}} \right)_{\lim (y-\bar{x})} .$$

$\mathrm{X}(x)$ wird nirgends unendlich und nur Null, wenn x mit einem Verzweigungspuncte a coincidirt.

Auf Grund dieser Definitionen ist es nunmehr leicht, aus den Determinanten D (Formel (4)) durch Zufügung geeigneter Factoren rückwärts Thetafunctionen aufzubauen. Sei

$$G(w_1 \ldots \ldots w_p)$$

eine homogene Function zweiten Grades der w, C eine Constante, die von der einzelnen Thetafunction ϑ zur anderen wechseln mag, so will ich den 2^{2p} Functionen ϑ allgemeine Thetafunctionen Θ an die Seite stellen, indem ich die Formel schreibe:

$$(9) \qquad \vartheta(w_1 \ldots . w_p) = C \cdot e^{G(w_1 \ldots w_p)} \cdot \Theta(w_1 \ldots w_p).$$

Derartige Functionen Θ werden nun einfach, den einzelnen Determinanten D entsprechend, durch folgende Formel geliefert:

$$(10) \qquad \Theta(w_1 \ldots w_p) = \frac{D}{(\Pi \sqrt{fx^{(i)}})^{\frac{\nu}{2}}} \cdot \frac{(\Pi \, \mathrm{X}(x^{(i)}))^{\frac{\nu}{2}}}{\Pi \Pi \, \Omega(x^{(i)} x^{(k)})} .$$

In derselben beziehen sich die einfachen Producte auf die Indiceswerthe $i = 1 \ldots 2\nu$, das Doppelproduct auf $i = 1 \ldots 2\nu$, $k = 1 \ldots 2\nu$ mit Ausschluß der Combinationen $i = k$. — Der Beweis ergibt sich, indem wir in (10) beiderseits durch die betreffende Thetareihe $\vartheta(w_1 \ldots w_p)$ dividiren und die entstehenden Quotienten als Functionen von x', x'', ... successive untersuchen. — Mit der Wahl des in Ω, X benutzten Integrals dritter Gattung P ändern sich natürlich die durch (10) definirten Thetafunctionen Θ. Nehmen wir bespielsweise P in bekannter Weise so, daß die erste Hälfte seiner Perioden verschwindet, so stimmen die Θ (10) bis auf constante Factoren mit den ϑ selbst überein. Statt dessen werden wir P in anderer Weise normiren. Wir werden nämlich für P jenes Integral dritter Gattung Q einführen, dessen besondere algebraische Bedeutung ich in meiner zu Eingang genannten Arbeit in Bd. 27 der mathematischen Annalen entwickelte, und das hier, wo p beliebig ist, durch die Formel definirt sein wird:

$$(11) \qquad Q_{xy}^{x'y'} = \int_y^x \int_{y'}^{x'} \frac{(z\,dz)}{\sqrt{fz}} \cdot \frac{(z'dz')}{\sqrt{fz'}} \cdot \frac{\sqrt{fz}\,\sqrt{fz'} + a_z^{p+1} a_{z'}^{p+1}}{2(zz')^2} .$$

Formel (10) liefert dann Θ-Functionen, die einen ganz besonderen Anspruch auf unsere Beachtung haben, und diese sind es, die ich als σ-Functionen bezeichne.

Die ausgezeichnete Eigenschaft der σ-Functionen tritt zu Tage, wenn wir dieselben in Reihen entwickeln, die nach Potenzen der $w_1 \dots w_p$ fortschreiten. Es zeigt sich nämlich, daß die Coëfficienten dieser Entwickelung ganze rationale Functionen der Coëfficienten jener Formen φ, ψ werden, in die wir f behufs Construction der Determinante D gespalten haben. Untersuchungen über das recurrente Gesetz dieser Entwickelungen wird demnächst Hr. Wiltheiß in den mathematischen Annalen veröffentlichen. Ich meinerseits habe mich darauf beschränkt, gewisse einfache Eigenschaften der Entwickelungsterme gleicher Dimension festzustellen. Sei eine Function, homogen vom $k$ten Grade in den w, desgleichen vom $m$ten Grade in den Coëfficienten von φ, vom $n$ten Grade in den Coëfficienten von ψ, folgendermaßen bezeichnet:

$$(\overset{k}{w}, \overset{m}{\varphi}, \overset{n}{\psi}).$$

Dann schreibt sich die Reihenentwickelung des einzelnen, zur Zerlegung $f = \varphi \cdot \psi$ gehörigen σ in Uebereinstimmung mit dem, was oben über das Verschwinden des zugehörigen ϑ für die Nullwerthe der Argumente gesagt wurde, folgendermaßen:

$$\sigma(w_1 \dots w_p) = (\overset{\mu}{w}, \overset{\mu}{\varphi}, \overset{0}{\psi}) + (\overset{\mu+2}{w}, \overset{\mu+1}{\varphi}, \overset{1}{\psi}) + \dots (\overset{\mu+2\varrho}{w}, \overset{\mu+\varrho}{\varphi}, \overset{\varrho}{\psi}) + \dots . \tag{12}$$

Jeder einzelne in Klammer stehende Theil erweist sich dabei als simultane Invariante von $\varphi(z)$, $\psi(z)$ und einer Form $(p-1)$ten Grades $\chi(z)$, deren Coëfficienten folgenderweise von den w abhängen:

$$\chi(z) = w_1 z_2^{p-1} - (p-1) w_2 z_2^{p-2} z_1 + \frac{(p-1)(p-2)}{2} w_3 z_2^{p-3} z_1^2 - \dots \tag{13}$$

Insbesondere gelingt es ohne Weiteres, den ersten Term in (12) hinzuschreiben. Ich will symbolisch setzen:

$$\chi(z) = \chi_z'^{\,p-1} = \chi_z''^{\,p-1} = \dots,$$

und ebenso

$$\varphi(z) = \varphi_z'^{\,p+1-2\mu} = \varphi_z''^{\,p+1-2\mu} = \dots\dots .$$

Dann wird der erste Term sich folgendermaßen darstellen:

$$(\overset{\mu}{w}, \overset{\mu}{\varphi}, \overset{0}{\psi}) = c \cdot \prod_i (\varphi^{(i)} \chi^{(i)})^{p+1-2\mu} \cdot \prod_i \prod_k (\chi^{(i)} \chi^{(k)})^2, \tag{14}$$

(wo i die Werthe 1, 2, ... μ, k die gleichen Werthe mit Ausnahme der Combinationen $i = k$ durchlaufen soll).

Es gibt einen interessanten Weg, um ohne alle Rechnung auf diese Formel (14) zu kommen. Aus der bekannten Theorie der Potenzdarstellungen binärer Formen kann man nämlich ableiten, daß (14) eine simultane Invariante von φ und χ vorstellt, die bei beliebigem φ verschwindet, sobald sich χ als lineares Aggregat von nur $\mu - 1$ $(p-1)$ten Potenzen von Linearformen darstellen läßt:

$$(15)\qquad \chi(z) = c'(x'z)^{p-1} + c''(x''z)^{p-1} + \ldots . c^{(\mu-1)}(x^{(\mu-1)}z)^{p-1},$$

und daß es zugleich der einzige Ausdruck dieser Art vom Grade μ in den Coëfficienten von φ und χ ist. Hieraus allein folgt schon, daß besagter Ausdruck den Anfangsterm in der Reihenentwickelung des σ ausmachen muß. Um dies einzusehen, gehen wir davon aus, daß σ identisch verschwindet, sobald wir für die w $2(\mu-1)$-gliedrige Integralsummen einsetzen:

$$w_\alpha = \int_a^{x'} dw_\alpha + \int_a^{x''} dw_\alpha + \ldots . . \int_a^{x^{(2\mu-2)}} dw_\alpha .$$

Indem wir, wie oben, einen Horizontalstrich über dem x benutzen, um die Stelle $x, -\sqrt{fx}$ von $x, \sqrt{fx}$ zu unterscheiden, können wir diese Werthe der w_α auch so schreiben:

$$w_\alpha = \int_{\bar{x}^{(\mu)}}^{x'} dw_\alpha + \int_{\bar{x}^{(\mu+1)}}^{x''} dw_\alpha + \ldots . \int_{\bar{x}^{(2\mu-2)}}^{x^{(\mu-1)}} dw_\alpha .$$

Wir lassen jetzt $\bar{x}^{(\mu)}$ an x', $\bar{x}^{(\mu+1)}$ an x'' etc. unendlich nahe heranrücken und setzen dementsprechend:

$$\bar{x}^{(\mu)} = x' - dx', \quad \bar{x}^{(\mu+1)} = x'' - dx'', \ldots . .$$

Dann reducirt sich, indem wir Unendlich-Kleine höherer Ordnung fortwerfen, w_α auf die Summe der Differentiale:

$$w_\alpha = \frac{(x'dx')}{\sqrt{fx'}} \cdot x_1'^{p-\alpha} x_2'^{\alpha-1} + \frac{(x''dx'')}{\sqrt{fx''}} \cdot x_1''^{p-\alpha} x_2''^{\alpha-1} + \ldots ,$$

also $\chi(z)$ (13) auf folgenden Ausdruck:

$$(16)\qquad \chi(z) = \frac{(x'dx')}{\sqrt{fx'}}(x'z)^{p-1} + \frac{(x''dx'')}{\sqrt{fx''}}(x''z)^{p-1} + \ldots ,$$

während bei σ nur noch der erste Entwickelungsterm in Betracht kommt, eben unser

$$(\overset{\mu}{w}, \overset{\mu}{\varphi}, \overset{0}{\phi}).$$

Nun ist aber σ identisch Null. Unser Term muß also ver-

schwinden, wenn χ die Form (16) annimmt. Jetzt ist (16) nichts Anderes als (15); es sind nur statt der in (15) auftretenden Constanten c', c'', ... die Ausdrücke $\frac{(x'dx')}{\sqrt{fx'}}$, $\frac{(x''dx'')}{\sqrt{fx''}}$, ... geschrieben. Daher u. s. w.

Ich bespreche zum Schlusse den Zusammenhang zwischen den σ und den ϑ. Derselbe subsumirt sich natürlich als specieller Fall unter Formel (9). Zunächst wird man den Exponenten $G(w_1, w_2, .. w_p)$ bestimmen, indem man die Periodicitätseigenschaften von σ und ϑ vergleicht, was keinerlei Schwierigkeit hat. Was ferner den Factor C angeht, so sei A die Determinante, die sich aus den p Perioden erster Art der Integrale w_1, w_2, ... w_p zusammensetzen läßt, Δ_φ die Discriminante von φ, Δ_ψ diejenige von ψ. Ich beziehe mich nun auf eine Arbeit von Hrn. Thomae[1]), in welcher sich derselbe, wenn ich meine Ausdrucksweise gebrauchen darf, mit dem Anfangsgliede der Potenzentwickelungen derjenigen hyperelliptischen ϑ beschäftigt hat, die $\mu = 0$ und $\mu = 1$ entsprechen. Sein Resultat ist, daß in diesen Fällen

$$C = c\sqrt{A} \,.\, \sqrt[8]{\Delta_\varphi \,.\, \Delta_\psi} \tag{17}$$

zu nehmen ist, wo c rein numerisch. Es scheint unzweifelhaft, daß die Formel (17) auch bei höheren Werthen von μ richtig bleibt; auf den Beweis soll an einer anderen Stelle eingegangen werden. — Will man umgekehrt von den Thetareihen ausgehend zu den σ-Functionen gelangen, so bestimmt sich der zuzufügende Exponentialfactor durch Betrachtung des Productes derjenigen geraden σ, welche für die Nullwerthe der Argumente nicht verschwinden. Besagtes Product hat nämlich die Eigenschaft, eine Reihenentwickelung nach Potenzen der w_1 ... w_p zu liefern, in welcher der Term zweiter Ordnung fehlt. Man vergleiche die auf den Fall $p = 2$ bezüglichen Betrachtungen in meiner zu Eingang genannten Arbeit in Bd. 27 der mathematischen Annalen.

---

1) Beitrag zur Bestimmung von $\vartheta(0, 0, \ldots 0)$ durch die Klassenmoduln algebraischer Functionen. Crelle's Journal Bd. Bd. 71.

Des Kaiser Sigismund Buch von Eberhard Windeck und seine Ueberlieferung[1]).

Von Professor **Al. Reifferscheid** in Greifswald.

Vorgelegt von Sauppe.

Eberhard Windecks Werk, welches er selbst 'des Keiser Sigismunds buch' betitelte, erfreute sich bei seinen Zeitgenossen und noch Jahrhunderte später bei den Geschichtsfreunden solcher Beliebtheit, daß es sowohl im 15. als im 17. Jahrhunderte oft abgeschrieben werden mußte. J. B. Mencken ließ es 1728 im 1. Bande seiner 'Scriptores rerum Germanicarum' abdrucken, aber so daß der ursprüngliche Charakter der Schrift ganz verwischt ist, die Kapitel stellte er nach eigenem Gutdünken um, über ein Drittel des Ganzen ließ er fort, den Text der Gothaer Handschrift, die er im wesentlichen zu Grunde legte, entstellte er durch willkürliche Aenderungen auf Grund seiner jüngeren Handschrift oder nach eigener unverständiger Vermuthung. Erst J. Aschbach in seiner Geschichte Kaiser Sigmunds 1838 bis 1845 förderte die Windeckforschung durch Nachricht über die ihm bekannt gewordenen Handschriften und durch Veröffentlichung mehrerer Kapitel aus denselben zur Ergänzung des Menckenschen Textes. Ohne zureichenden Grund sprach er von einer ersten und zweiten Redaktion. Diesen Gedanken griff J. G. Droysen auf, der in den Abhandlungen der phil.-hist. Classe der Kgl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1857, 149 fgg. eingehend über Eberhard Windeck handelte. Er glaubte sogar in einer Wiener Handschrift des 17. Jahrhunderts die ältere Gestalt des Buches entdeckt zu haben, welches Windeck dann durch immer neue Einschiebungen und Zusätze bis zu der wüsten zusammenhanglosen Form, in der es in der Gothaer und Ebnerschen Handschrift vorliege, ausgeweitet habe, a. a. O. 221. Er meinte fünf Texte unterscheiden zu dür-

---

1) Meine Untersuchungen über die Ueberlieferung des Windecktextes wurden wesentlich gefördert durch das freundliche Entgegenkommen der Bibliotheken in Gotha, Göttingen, Hannover, München, Weimar, die mir ihre Windeckhandschriften auf der hiesigen Universitätsbibliothek zur Verfügung stellten. Zu ganz besonderm Danke verpflichtete mich unser Universitätsbibliothekar Herr Prof. Dr. Gilbert, dessen außerordentliche Liberalität mir die Benutzung der Handschriften in jeder Weise zu erleichtern verstand. Herr Bibliothekar Dr. Escher in Zürich gestattete mir in der liebenswürdigsten Weise zu jeder Tageszeit auf der dortigen Stadtbibliothek zu arbeiten.

fen, a. a. O. 223. Auf ein wirkliches wissenschaftliches Bedürfnis wies der Verwaltungsrath der Wedekindschen Preisstiftung für deutsche Geschichte hin, als er 1877 eine den Anforderungen der Wissenschaft entsprechende Ausgabe der Denkwürdigkeiten Eberhard Windecks verlangte. Zur Förderung des Unternehmens beschaffte er eine Abschrift der Handschrift des Sir Thomas Phillipps. Vgl. Göttinger Nachrichten 1877, 137 fg., 1882, 417 fg. Aber es fand sich kein Bearbeiter, wenigstens kein Bewerber, vgl. a. a. O. 1886, 221 fg. Man mußte daraus schließen, daß die Geschichte der Ueberlieferung des Windecktextes sich zur Zeit nicht entwirren lasse. Glücklicher Weise ist das nicht der Fall, wie sich mir bei der Prüfung der Ueberlieferung aus Anlaß der Neubearbeitung des Gedichtes von der gewaltsamen Unterdrückung der Zunftherrschaft zu Achen im J. 1429, des 'buches von einer Acher vart', ergab [1]). Wenn man die Ueberlieferung von dem künstlich über sie gebreiteten Nebel befreit, ist sie sogar ziemlich durchsichtig. Zur Zeit ist zwar keine Handschrift bekannt, welche den ächten Text unverdorben enthielte, allein derselbe läßt sich mit leichter Mühe aus den erhaltenen Handschriften wiederherstellen, wenn man sich nur das Verhältnis der Handschriften zu einander und zu der Urvorlage klar macht.

Folgende Handschriften sind bisher bekannt, alle auf Papier:

A. Aus dem 15. Jahrhundert.

1) *H.* Die Handschrift in folio auf der kgl. Bibliothek zu Hannover, XIII, 917, genannt zuerst von Pertz, Archiv der Gesellschaft für ältere deutsche Geschichtskunde, I (1820), 469, nr. 13, beschrieben von Bodemann, Die Handschriften der kgl. öffentl. Bibliothek zu Hannover, 181. Die Handschrift war früher im Besitz von Leibniz. Die Lagen der Handschrift sind von alter Hand bezeichnet, es sind Sexternionen, es fehlt der 1. Sexternio und von dem 2. das 1. Blatt. Das fehlende versuchte eine Hand des 17. Jahrhunderts aus einer andren Vorlage zu ergänzen, vgl. darüber unten B. 2. Die Handschrift wurde foliiert, nachdem sie diese Ergänzung erhalten. Der erhaltene alte Bestand beginnt mit fol. 15, der letzten Hälfte des 36. Kapitels, S. 68 der Gothaer

1) Die erste Bearbeitung erschien in den 'Zwei Achener historischen Gedichten des 15. und 16. Jahrhunderts von H. Loersch und Al. Reifferscheid' zuerst als Beilage zum 2. Bande von Friedr. Haagens Geschichte Achens, dann selbständig Achen 1874. Die neue Bearbeitung bringt der XXI. Band der Chroniken deutscher Städte.

Handschrift, mit den Worten: 'welhenn wir zum vnnsernn schriber hernach benant vnnd wir habenn gebetthen zu schribenn mit gezugnisse der brieffsigel vnnd gende in dem vorhuse der vestenn zu Swodentz'. Zwischen den Abschnitten, die selten dem Umfange der Kapitel der übrigen Handschriften entsprechen, ist Raum gelassen, der wohl nicht für Ueberschriften bestimmt war. Vgl. S. 537. Diese Abschnitte sind nicht beziffert. Die Versehen des Schreibers sind theils von ihm selbst, theils von einer zweiten Hand verbessert, die fol. 42ª einen ganzen Abschnitt auf dem untern Rande nachgetragen hat. Die Vorlage scheint theilweise aus losen Blättern bestanden zu haben, nur unter dieser Voraussetzung erklären sich die verschiedenen Verschiebungen der Handschrift: so fehlt das Gedicht des Frauenzucht, v. Liliencron, Histor. Volkslieder I, 329 fgg., fol. 139ª, wo es stehen müßte (es steht in der Gothaer Handschrift S. 457 fgg. im 261. Kapitel), es kommt erst fol. 148ᵇ fgg. nach dem Abschnitte, welcher das 287. Kapitel in der Gothaer Handschrift ist. Was auf fol. 94ª—96ª steht wiederholt sich auf fol. 98ª—100ª und steht dort an der richtigen Stelle. Vgl. noch unten die Bemerkung über den Anhang.

Der Text schließt mit den Kapiteln 348 und 349 der Gothaer Handschrift. In dem ersten dieser zwei Kapitel fol. 217ª steht die Notiz, welche andeutet, daß hier der ursprüngliche Schluß des Werkes war: 'nu hait der Keiser Sigmundts buch und bey seinen leben ein teils geschehenn ist eyn ende, der almechtig got alles ubel und boss vonn unns wende'. Darauf kommt ein Hinweis auf den kurzen Anhang, das 349. Kapitel der Gothaer Handschrift: 'Nu findestu hernoch alle die konig vnnd herzog die ye zu vngern renngnert hannt unnd wie lang'. Seltsamer Weise folgt dann zuerst aber noch die Angabe über die Beisetzung des Kaisers in der Ladislauskirche zu Ofen. An das letzte Kapitel schließt sich fol. 218ᵇ folgende Bemerkung: 'Dieß schriefft hait geschribenn Reynnhart Brunnwart vonn Miltennberg Eberhart Windecks diner unnd geendet off Sannt Margeretten abent Anno domini M CCCC XXXVIII'. Leider ist dieses nicht die Subscriptio des Schreibers der Hannoverschen Handschrift, welche viel später entstanden, sondern abgeschrieben aus der Vorlage. Das ergibt sich deutlich aus dem Umstande, daß auf die Subscriptio von der Hand desselben Schreibers mit derselben Tinte die Kapitel 350 und 351 der Gothaer Handschrift folgen, welche die Erzählung bis zum Tode Albrechts führend, erst 1440 verfaßt sein können. Vor das 2. Kapitel hat sich fol. 219ª die Einleitung zu der 3. Mainzer Rachtunge geschoben, welche schließt mit der Bemerkung: 'Das ist die Rachtunge'.

Statt derselben folgt aber fol. 219b—220b das 2. Kapitel und erst nach dem Schlusse desselben, kommt die Rachtunge: 'Wir burgermeister und Rait der Stat wormbs, spier, franckfurt und oppenheim bekennen .... so als die ... burgermeister und Rait der Stat Mentz uns geschriben und gebetten haben ..' Sie schließt fol. 228b. In Verbindung mit ihr steht der Inhalt von fol. 229, die Angabe, welche im Rheingau, zu Oppenheim, Weissenau, Niderulm bei Mainz, zu Frankfurt, Worms und Mainz wohnten. Dieses Blatt ist sehr beschädigt. Am Schlusse sind der Handschrift 50 Blätter, von Barings Hand, beigebunden, die Abschrift des Anfangs, fol. 15 fgg., enthaltend.

2) *G*. Die Handschrift in folio auf der herzoglichen Bibliothek zu Gotha, Chart. A. Nr. 23, beschrieben von Fr. Jacobs, Beiträge zur älteren Literatur oder Merkwürdigkeiten der Herzogl. öffentl. Bibliothek zu Gotha II, 2. Leipzig 1837, 395 fgg. Die ersten 18 Blätter der Handschrift enthalten das Register, die Angabe des Inhaltes der Kapitel. Diese Inhaltsangabe stimmt in der Fassung nicht mit den Kapitelüberschriften überein, welche im Werke selbst in rother Schrift vor jedem Kapitel, meist auf einem eigenen Blatte, oft aber auch am Schlusse des vorhergehenden Kapitels, oder sogar am Schlusse des Kapitels, zu dem sie gehören, stehen. Der freie Raum, der in den meisten Fällen nach ihnen gelassen, sollte durch Bilder ausgefüllt werden, auf welche die Ueberschrift oft ausdrücklich Bezug nimmt. Abgesehen von zwei Federzeichnungen entbehrt die Handschrift des Bilderschmuckes. Die Gedankenlosigkeit des Rubrikators zeigt sich besonders in den Kapitelzahlen, so beziffert er z. B. das 20. Kapitel mit XXX, das darauf folgende 21. mit XX, u. s. w. Zum 21. (d. h. 22.) Kapitel fehlt das Nigrum. Da auch die Ueberschrift des folgenden Kapitels fehlt, darf man annehmen, daß der benutzten Vorlage schon ein Blatt gefehlt hat, auf dessen Vorderseite Kapitel 22, auf dessen Rückseite die Ueberschrift des Kapitels 23 gestanden. Das Register hat die richtige Ueberschrift des 23. Kapitels. Noch an zwei anderen Stellen war die Vorlage der Gothaer Handschrift lückenhaft: 1) folgt auf Kapitel 142 das 144. Auch im Register fehlt das 143. Kapitel. Es steht in der Hannoverschen Handschrift fol. 52b—53a und enthält den Traum Eberh. Windecks aus dem Jahre 1419. 2) folgt auf Kapitel 345 das 347. Nach dem Register war das fehlende 346. überschrieben: 'dicz ist die ander abschrifft der anderen richtunge briff von meincze.' Es ist die Rachtunge vom 18. März 1430, von der Droysen a. a. O. 209 spricht. Nach der Hannoverschen Handschrift und nach der Abschrift der

Cheltenhamer fehlt auch der Schluß des vorhergehenden Kapitels, von den Worten an: 'In der selben zite worent der rot und die gemeind zu mentz ouch in irrunge'. Es fehlt also was die Hannoversche auf fol. 210ᵇ—215ᵃ, die Abschrift der Cheltenhamer auf fol. 285ᵇ—290ᵃ hat, jedenfalls mehrere Blätter der Vorlage. Vielleicht fehlte noch in der Vorlage das Blatt mit Kapitel 358, das Rubrum desselben ist erhalten, das Nigrum fehlt, wie schon Mencken, a. a. O. 1286, bemerkte [1]). Die Handschrift zählt 360 Kapitel [2]), entsprechend der Zahl des Registers, aber nicht übereinstimmend mit den übrigen Handschriften, welche ihre Kapitel zählen; das deutet nicht auf verschiedenen Bestand, sondern erklärt sich einfach daher, daß die eine Handschrift als ein Kapitel faßt, was die andere als zwei oder mehrere bezeichnet. So ist z. B. das 41. Kapitel der Gothaer Handschrift in der Ebnerschen und in der Cheltenhamer in die Kapitel 41—44 zerlegt. Nach dem 360. Kapitel steht in der Gothaer Handschrift folgende Subscriptio:

> 'Dicz puch ist gend worden zu Eger am freitage nach
> sant veitz tag nach cristi gepurgt tausent virhun
> dert vnd in dem ein vnd sechczigistem iare geschriben
> vlric9 aicher Diner ader eicher der stat Eger mit
> seiner hant vnd ist der gepurt von Koczing got
> helff ym mit lib vnd die iuncfraw maria das er das
> vnd mer schriben müsse vnd lange pleibe gesunt
> mit sein' schonen frawen frawen Barbara des
> caspar richters do selbs tochter etc.'

Auch diese Subscriptio ist der Handschrift, in der sie steht, nicht eigenthümlich, sie ist aus der Vorlage übernommen. Da der Abschreiber auch hier gedankenlos verfuhr, so löste er in der 6. Zeile 'maia' auf, setzte aber trotzdem über das aufgelöste 'maria'

---

1) Das Rubrum sollte vielleicht nur auf die Abbildung gehen, es lautet: 'Hie siczet der romisch konig friderich von osterreich mit seinen kurfursten zu tische zu Oche (im Register: 'zu offe') auf dem ratthaus und dint im zu tische der herczog von perge, der herczog von gelre, der bischon luthich (im Register: 'bischoff von lutich') und der juncher von cleffe.' Ebenso hat die Ebnersche Handschrift als Kapitel 300 und 301 nur Ueberschrift und Bild, vgl. Aschbach, a. a. O. IV, 463 fg. In der Cheltenhamer steht beidemal statt des Bildes der Doppeladler.

2) S. 226 ist das 181. Kapitel zum zweitenmal geschrieben, nachdem es schon auf S. 224—225 eingetragen war, was schon ein alter Benutzer der Handschrift am Rande bemerkt hat. Die Verwirrung, die dadurch in den Kapitelzahlen entsteht, wird durch die Nachlässigkeit des Rubrikators gehoben, der das zweitfolgende Kapitel unbeziffert läßt. Auf das 184. folgt dann freilich das 186.

das Kompendium. In der 8. Zeile schrieb er wie bei einer vornehmen Dame zweimal 'frawen', was der Rubrikator nach der Vorlage durch Streichung des zweiten verbesserte. Auf Abschrift deutet auch das 'etc.' am Schlusse. Der Schreiber der Vorlage der Gothaer Handschrift nennt sich noch im Kapitel 192, bei einem Zusatze[1]), den er zum Text gemacht hat, Aschbach a. a. O. IV, 457 hat schon darauf hingewiesen. Der Zusatz lautet: 'und do ich vlricze dicz buch auch schreib, do was das wirdig helitum auch noch zu nurmberg, do mon schreib XIIII hundert und LXI iar geschriben zu Eger'. Auch hier verräth sich der gedankenlose Schreiber der Gothaer Handschrift als Abschreiber: in der Vorlage stand jedenfalls 'vlric9'.

Der Text der Gothaer Handschrift läßt sich zeitlich genau bestimmen: in Kapitel 88 wird der Tod Albrechts erwähnt, † 26. Oktober 1439, und in Kapitel 209 heißt es, daß die Reichskleinodien noch in Nürnberg gewesen, als man 1440 geschrieben. Im Einklang damit steht die Fortführung der Erzählung im Anhange der Handschrift, das letzte Kapitel, 360., berichtet, wie der Herzog von Heidelberg u. a. zu Achen vor Friedrich III. ihr Lehen empfingen. Sie reicht also bis zum Juni 1442. Da Windeck erst 1443 gestorben, können die Zusätze und Fortführungen von ihm selbst herrühren. Dagegen scheinen Kapitel 352—354 zu sprechen, die den Zusammenhang unterbrechen. 352. handelt von Erbauung der Stadt Trier, 353. 'von der Christenheit', d. h. von der christlichen Zeit Triers, 354. 'wie Mainz den Rittern gegeben ward'. Die Ebnersche und die Cheltenhamer Handschrift erklären in der Ueberschrift des ersten dieser Kapitel das Auffallende: 'Hier wolt keiser Sigmund wissen, warumb trier XIIIC jor alter were denne Rom. Darumb ist dise legend in dis buch geschriben, wan keiser Sigmunt die geschicht und ander geschicht wissen wolt. Das geschach, do der von mandelschid wolte mit gewalt ein bischof sin

---

1) Wichtig ist die voraufgehende Stelle: 'Also was es noch als mon schreib XIIII hundert und XXXIII iar, do ditz buch zusammengelesen wart und geschriben'. Auch noch anderes weist auf das Jahr 1433, beziehungsweise 1433/4 zurück, vgl. Droysen, a. a. O. 222 fg. Mit Unrecht schließt Droysen daraus auf zwei Texte, den einen aus dem Jahre 1433, den andern aus dem Jahre 1433/4, und da im Kapitel 339 das Jahr 1437 genannt, auf einen dritten Text aus dem Jahre 1437. In Wirklichkeit erfahren wir dadurch nur, daß Eberhard Windeck 1433 bei der Arbeit war und bis zum Kapitel 192 vorgerückt war, daß er aber im Jahre 1437 seine Arbeit beendigte. Das stimmt genau mit der Subscriptio in der Hannoverschen Handschrift, die Droysen vor manchen Fehlschlüssen hätte bewahren können, wenn er sie beachtet hätte, das Vorhandensein der Hannoverschen Handschrift mußte er aus dem Pertzschen Archiv I, 469 wissen.

wider den bobst und den keiser und wider das konsilium'. Droysen schließt hieraus auf eine für Sigmund gemachte Ausgabe des ganzen Buches, während Windeck offenbar nur sagen will, daß er auf Geheiß des Kaisers eine Denkschrift über den Ursprung und das Vorrecht Triers verfaßt, die er, weil sie für den Kaiser bestimmt gewesen, nunmehr auch in das Buch, welches vom Kaiser handle, habe aufnehmen wollen. Der Anhang, dessen Beginn schon der Text vom J. 1437 in der Hannoverschen Handschrift vor der Subscriptio zeigte, der dann nach der Subscriptio in derselben Handschrift selbständig erweitert erscheint, ist hier am stärksten ausgebildet, er enthält, wenn der Ausdruck nicht zu gewagt ist, eine Sammlung kleinerer historischer Aufsätze Windecks, die er 1442 mit seinem Hauptwerke ausgehen ließ[1]).

3) *E*. Die Ebnersche Handschrift, zur Zeit verschollen. Sie befand sich früher in der Ebnerschen Bibliothek zu Nürnberg, kam dann in die Kloßsche Bibliothek nach Frankfurt a. M., von da um das Jahr 1832 nach England. Eine kurze Notiz über sie gaben 1821 Mone und Dümge, Archiv III, 263 fg., eine genauere Beschreibung Aschbach, a. a. O. IV, 458 fgg. Darnach umfaßte die Handschrift ursprünglich drei Foliobände mit vielen Abbildungen, bei manchen Kapiteln ist für die Abbildungen leerer Raum gelassen. Oft sind halbe Seiten unbeschrieben geblieben: in den Prachthandschriften des Mittelalters wird ebensowenig wie in modernen Prachtwerken mit dem Raume gespart[2]). Der 2. Band, Kapitel 121—227 umfassend, ist früh verloren, auch einzelne Blätter mit Abbildungen sind herausgerissen. Der Schluß des Werkes, Kapitel 367—372, fehlt ebenfalls. Die Handschrift beginnt mit dem Register, von demselben sind aber nur 14 Blätter erhalten mit den Ueberschriften der Kapitel 33—58, 113—372. Aschbach, der diese Handschrift für die älteste der bekanntgewordenen hielt, hat mehrere Stücke aus ihr abdrucken lassen, a. a. O. I, 457 fg. das 22. Kapitel, II, 454 fg. das 81. (eigentlich nur das 1. Drittel desselben), 83., 86., 87., 112., 104. Kapitel, III, 416 das 250. Kapitel, IV, 459 fgg. die Ueberschriften der Kapitel, welche bei Mencken fehlen, in seiner Geschichte der Grafen von Wertheim II, Frankf. 1843, 255 fgg. das Gedicht des Frauenzucht über den Krieg des Bischofs von Würzburg mit Michel von Wertheim.

4) *C*. Die Handschrift Nr. 10, 381 in der jetzt zu Chelten-

1) Auch die im folgenden unter 3—7 aufgeführten Handschriften enthalten diese Redaktion vom Jahre 1442.

2) Falsch ist Aschbachs Auslegung a. a. O. 458 fg.

ham befindlichen Bibliothek des verstorbenen Sir Thomas Phillipps. Eine Abschrift derselben von Dr. Patzig, im Auftrage der Wedekindschen Preisstiftung, gefertigt, befindet sich auf der Kgl. Universitätsbibliothek in Göttingen. In Bilderschmuck und äußerer Einrichtung scheint diese Handschrift mit der Ebnerschen durchaus übereinzustimmen. Sie ist aber noch schlechter als jene erhalten, sie zählt nur noch 306 in 2 Kolumnen beschriebene Blätter. Das Register fehlt ihr ganz, ferner der Anfang der Einleitung, nicht ganz soviel wie das 1. Blatt der Gothaer Handschrift enthält, sie beginnt jetzt: 'ste basz glouben was ich von disen worten wercken geschriben han'. Außerdem fehlen ihr 121 ganze Kapitel und von 7 Kapiteln Anfang oder Schluß, abgesehen von der großen Lücke in der Mitte, welche Schluß von Kapitel 120 bis Anfang von Kapitel 227 umfaßte, fehlen ihr noch 22 Blätter [1]). Leider hat Aschbach die Lücken der Ebnerschen Handschrift nicht genau bezeichnet, so daß sich nicht bestimmen läßt, wie viele von den Lücken der Cheltenhamer schon in ihrer Vorlage vorkamen. Jedenfalls zeigt der Umstand, daß in *E* und in *C* die Mitte fehlt, daß die Vorlage diesen Theil schon entbehrte.

5) V^1. Die Handschrift auf der K. K. Hofbibliothek zu Wien Nr. 13975, Suppl. 1667, früher im Besitz von Guido Görres in München, 460 Blätter in Großfolio, mit Bildern. Mehrere Blätter sind zerrissen, andere fehlen, vgl. Tabulae codicum manuscripto-

---

1) In der Abschrift sind die Lücken meistens, aber nicht immer vermerkt, manchmal unrichtig bemessen. In der folgenden Uebersicht dessen, was fehlt, sind die Zahlen derjenigen Kapitel, deren Ueberschrift, beziehungsweise Bild, fehlt, in eckige, diejenigen, deren Text fehlt, in runde Klammern geschlossen, in den übrigen Fällen fehlt, wenn nichts besonderes angegeben, Titel und Text.

Nach	fol.	11	fehlen	2	Blätter	enthaltend	(9.) 10. [11.]
„	„	25	fehlt	1	Blatt	„	(25.) [26.]
„	„	41	„	1	„	„	Schluß von 37. [38.]
„	„	84	fehlen	2	Blätter	„	(85.) 86. [87.]
„	„	86	fehlt	1	Blatt	„	89.
„	„	88	„	1	„	„	92.
„	„	92	„	1	„	„	96.
„	„	96	„	1	„	„	Schluß von 100. [101.]
„	„	116	fehlen	sehr	viele Bl.	„	Schluß von 120—Anfg. 227.
„	„	119	„	2	„	„	231. [232.]
„	„	139	„	2	„	„	Schluß von 246. 247.
„	„	184	fehlt	1	Blatt	„	267.
„	„	191	„	1	„	„	Titel und Anfang von 273.
„	„	192	„	1	„	„	Schluß von 273. [274.]
„	„	305	fehlen	2	Blätter	„	Schluß von 367. 368.
„	„	306	„	3	„	„	370. 371. 372.

rum in bibliotheca Palatina Vindobonensi asservatorum vol. VIII, 290, wo die Jahreszahl 1447, wahrscheinlich aus der Subscriptio, genannt wird. Es wäre zu untersuchen, ob die Subscriptio authentisch, oder mit dem übrigen abgeschrieben worden. Aschbach konnte nur den 1. Band der früher 2 Bände bildenden Handschrift benutzen, vgl. a. a. O. IV, 458. Er ließ daraus I, 454 das 11. Kapitel, 458 das 17. Kapitel abdrucken und gab II, 457 für das 104. Kapitel ihre Abweichungen von der Ebnerschen Handschrift an.

6) V^2. Die Handschrift auf der K. K. Hofbibliothek zu Wien Nr. 2913, Histor. prof. 563, 472 in 2 Kolumnen beschriebene Blätter, in folio, kurz beschrieben von Hoffmann von Fallersleben, Verzeichnis der altd. Handschriften der K. K. Hofbibliothek zu Wien, 218, vgl. Tabulae II, 154. In der Subscriptio ist das Jahr 1456 genannt, vielleicht das Jahr der benutzten Vorlage.

7) *Z*. Die Handschrift B. 2. folio der Stadtbibliothek zu Zürich, kurz erwähnt von Mone und Dümge, Archiv III, 262, die sie in den Ausgang des 16. Jahrhunderts setzen. Der 1. Sexternio, welcher wahrscheinlich das Register enthielt, ist abgeschnitten. Die Handschrift, in 2 Kolumnen geschrieben, beginnt jetzt S. 1 mit der Vorrede. Sie schließt S. 398ᵇ mit der Subscriptio 'Deo gratias Anno etc. 1479'. Die Handschrift gegen die Subscriptio in das 16. Jahrh. zu rücken, wie Mone und Dümge es gethan, ist kein Anlaß. Vgl. Anm. S. 533.

8) *W*. Von einer Handschrift in Großfolio mit Bildern sah ich 1875 mehrere ganze Blätter und Blatttheile im Besitze des Herrn Prof. E. ausm Weerth zu Kessenich bei Bonn.

B. Aus dem 17. Jahrhundert.

1) *v*. Die Handschrift Nr. 112, Locatio 110 im Staatsarchiv zu Wien, vgl. Mone, Anzeiger für Kunde der teutschen Vorzeit VII, 1838, 434 fg. [1]) Sie enthält 67 Kapitel nach Ausscheidung alles dessen, was auf Eberhard Windeck Bezug hat oder nicht zu der Geschichte des Kaiser Sigismund gehört. Sogar in der Vorrede ist die auf Eberhard Windeck bezügliche Stelle gestrichen; daß sie gestrichen ist und nicht etwa von Anfang an gefehlt hat, zeigt das hinzugefügte, statt des geschriebenen gesetzte 'etc.' dem noch ein 'zu vernemen ist' folgte, welches dann auch getilgt wurde. Diese Redaktion des 17. Jahrhunderts, welche sich der späteren

1) Herr Prof. Dr. W. Ritter von Hartel vermittelte mir gütigst nähere Mittheilung des Herrn Staatsarchivars Dr. K. Schrauf über die Hs. Sie steht jetzt 89, Absatz 3. Die S. 533 angenommene Lücke ist in der Hs. äußerlich nicht zu bemerken. Kap. 3 schließt in der Mitte von fol. 253ᵃ. Die Lücke war also schon in der Vorlage von *v*, vgl. unter *B*. 2.

willkürlichen Umgestaltung des Textes durch J. B. Mencken vergleichen läßt, setzt den Text voraus, welcher durch die Hannoversche Handschrift vertreten ist, nicht bloß das Buch vom Kaiser Sigismund vom Jahre 1437, sondern auch den Anhang über Albrecht II. aus dem Jahre 1440. Daß die Vorrede an einer Stelle anderen Wortlaut zeigt als die der Gothaer Handschrift, erklärt sich einfach daher, daß sie zum Texte vom Jahre 1437, jene zum Texte vom Jahre 1442 gehört[1]). Die beigeschriebene Korrektur, welche Caspar Schlick einschwärzt, ist die willkürliche Aenderung eines Gelehrten des 17. Jahrhunderts und ohne jeden Werth. Droysens Vermuthung, daß diese Wiener Handschrift eine ältere Gestalt des Werkes von Windeck zeige, entbehrt jeglicher Begründung, wie aus ihrer offenbaren Abhängigkeit von dem Texte der Hannoverschen Handschrift erhellt.

2) *h*. Die Ergänzung von der Hand des 17. Jahrhunderts in der Hannoverschen Handschrift, fol. 1^a—14^a. Sie trägt die Ueberschrift: 'Vita Sigismundi Rom: Imperatoris, qui fuit filius Caroli Quarti Imp. et Regis Boiemiae (verbessert aus: 'Boiemia'): Socer aūt fuit Alberti. Rom. Imp. Scripsisse aūt videtur eam Latine Eberhardus à Windeck Moguntinensis, quo Sigismundus usus est familiariter'. Darauf folgt die Vorrede, in der die Korrekturen von *v* schon berücksichtigt sind. Die Ueberschriften der folgenden Kapitel muß ich anführen, da die weitere Erörterung auf sie zurückkommen muß. Wo keine Zahl steht, fehlt sie auch in der Handschrift.

Fol. 1^a II. Also Keiser Karle Konig zu Behem vor syme tode ordenierte, wie er Marggrofe Wentzla von merichern noch syme tode sich halten solten und bestalte jeglichem syn lant.

Fol. 1^b. III. Wie Keiser Karle Konnig zu behem synen son Sigemont fürt in das lant und die marg zu brandenburg und macht in einen Herren darinne.

Fol. 2^a. Alß Konig Sigemont gon mernhern wolt ziehen und ym die bottschafft kam daß in die Korfürsten einhellichlichen hettent zu eim Romschen Konige erkorn.

Fol. 2^b. V. Von dem zeichen das do beschach zu Offen in der Kirchen, die man nennet vnser lieben frouwen Kirche, do viel der Kirchthorn, do gar vil lütt darinne was, und geschach nie keim menschen nie kein leytt zum tode.

1) Weshalb die Handschrift im 52. Kapitel von der Gefangenschaft des Königs von Cypern handelt, wovon in den bekannten Windeckhandschriften nichts steht, bedarf noch näherer Untersuchung. Vielleicht geht das auch auf den gelehrten Geschichtsfreund des 17. Jahrhunderts zurück, der den Auszug gemacht hat.

Fol. 3ᵃ. VI. Alß Konnig Karle von behem an dem andern tage noch sant Dorotheen tag zu offen ob syme tische von eym erslagen wart, der was genant fargas welan.

Fol. 3ᵃ. VII. Alß Konnig Sigemont wart gecrönet zu Vngerschem Konnige von etlichen sinen lantherren vff den palmtag.

Fol. 3ᵃ. VIII. Also die Vngerschen Herren yren rechten herren König Sigmont vingent und in und alles sin volg beroubtent und was fromde by yme was, das vertribent sie uß dem lande.

Fol. 4ᵃ. IX. Dis ist die schencke die Hertzoge Witolt dem Konnige Sigemont dett.

Fol. 4ᵃ. X. Dis ist herlich schenck die die Hertzogyn Wittols hußfrouwe von Pollanden Konnig Sigemont geschencket.

Fol. 4ᵇ. XI. Dis ist die schenck die Hertzouwe Wittoltz frouwe schant der Königin Sigmondus frouwe.

Fol. 4ᵇ. XII. Alß die von Venedie drye junge Herren von bebern vertriben hettent, und furt sie her Marsilien für den Konig Sigemont und dett sine Rede.

Fol. 5ᵃ. XIII. Alß Konnig Sigemont mit XII tusent Mannen zoch in das lant gon Behem und noch allen synen reten und herren sante in dem Lande.

Fol. 5ᵇ. XIIII. Alß die von Vngern von Konning Sigmont slugent und sie huldetent Konnig Karle von Nappels und brochten in über Mere gon sades, und die Statt goben sie Im in.

Fol. 6ᵇ. XV. Alß der Konig Sigemont mit LX tusent gewopenter über den Konig zu wohssen zoch und lag dry Jor in dem lande und gewan ein großmechtige Statt und ließ hundert und LXXI den Kopff abe slahen ytel landes herren, und fürt den Konig mit Im gon Offen.

Fol. 7ᵃ. XVI. Als Konnig Sigemont zouch in Sirsien und rantzen und machte einen friden mit Hertzoge Dischbotten in dem gantzen landee.

Fol. 7ᵇ. XVII. Als die herren von Prüssen santen dem Konnige von Vngern XL tusent gulden, das er in zu helffe keme, wanne der Konnig von Pollanden sie überzogen hette mit grosser macht.

Fol. 8ᵃ. XVIII. Alß Hertzouch Albrecht von Sassen und Burggrefe Friderich von Nürenberg zwen Fürsten komen zu Konig Sigemont, und worent lange gevigent gewesen, und gap des hertzogen dochter von Sassen des burggrofen sone von Nürenberg.

Fol. 8ᵃ. XIX. Als Konig Sigemont sin dochter Hertzoge albrecht von Oesterich. —

Fol. 13ᵃ. XXIX. Als Kennig Sigemont den Spruchbrieff dett

lesen, den er gemacht hette anderweibe zwuschent dem Konnige von Pollant und den Herren von Prüssen.

Fol. 14ª. XXX. Als der Konnig von Pollanden Konig Sigemondes botten einen brieff macht und gewalt git, das sie sich und der dutschen hern verrichtent noch liepstem willen.

Wladislaus von gottes gnoden Konnig von Pollant etc.

Ein Drittel der Seite und fol. 14ᵇ leer.

Ein Vergleich dieser Kapitelüberschriften mit den von Mone, Anzeiger VII, 435 mitgetheilten, ergibt, daß in *v* Kapitel 5—18 der Handschrift *h* fehlen: da in *v* die Vorrede nicht gezählt, ist Kapitel 3 von *v* = Kapitel 4 von *h*, darauf folgt in *v* gleich das Kapitel 19 von *h*. Hier liegt nicht eine andere Redaktion vor, sondern *v*, beziehungsweise ihre Vorlage war an dieser Stelle lückenhaft. Vgl. unter B. 4.

Der Ergänzer von *h* hat übrigens zu schnell seine Thätigkeit abgebrochen. Sein Kap. 29 ist gleich dem Kapitel 34 der Gothaer Handschrift. Die Ueberschrift des 30. ist die des 35. in *G*. Er bricht nach den ersten Textworten ab, weil er das Kapitel am Schlusse des fol. 15ª zu beginnen glaubt, dies ist aber das 38. Kapitel, welches denselben Anfang hat wie das 35. Er übersah, daß der alte Bestand der Handschrift mit dem Schlusse des 36. Kapitels der Gothaer begann.

3) *z*. Die Handschrift B. 3 der Stadtbibliothek zu Zürich, 609 beschriebene Seiten, folio, von Mone und Dümge kurz erwähnt Archiv III, 262 fg. und dem Schlusse des 17. Jahrhunderts zugewiesen. Auf dem Titelblatt trägt sie die Jahreszahl 1704. Sie erweist sich deutlich als Abschrift der Hannoverschen Handschrift mit ihrer Ergänzung. Am Rande führt sie sorgfältig die Seitenzahlen der Vorlage an, 1ª—14ª, worauf 15ª folgt. Auf den Blättern 1ª—14ª sind die Kapitel gezählt, sie tragen genau dieselben Ueberschriften wie in *h*, abgesehen von unbedeutenden willkürlichen Aenderungen. Die Abschrift wurde gemacht, als in der Ueberschrift noch 'Boiemia', vgl. oben S. 531, stand. Das Versehen seiner Vorlage hat der Schreiber zu bessern versucht, den Schluß des 36. und das 37. Kapitel nimmt er als 30. mit der Ueberschrift: 'Wo und wann in diesem satz gehandelt worden, wer dabey gewesen und wer geschriben'. Da er die ersten Worte des alten Bestandes von *H* nicht zu entziffern vermochte, begann er mit 'Vnd wir haben gebotten zu schriben mit getzügnisse der Brieff, sigel'. Von

1) Ueber die Windeckhandschriften in Zürich handelte mein Vortrag in der deutsch-romanischen Sektion der deutschen Philologenversammlung zu Zürich, am 30. Sept. 1887, vgl. die Verhandlungen.

da an schreibt er seine Vorlage bis zur letzten Seite ab, die Seitenzahlen genau vermerkend, er schließt mit dem Namensverzeichnisse fol. 229 seiner Vorlage.

4) *k*. Sieben Folioblätter im Archiv zu Karlsruhe einer Abschrift des vollständigen Werkes, vgl. Mone, Anzeiger VII, 189 fgg., alle die Kapitel enthaltend, die in *v* nach Kap. 3 fehlen.

5) *w*. Die Handschrift auf der großherzoglichen Bibliothek zu Weimar, Q. 122, 334 Blätter in 4°. Sie ist von zwei Händen geschrieben, die erste geht von 3—234, die zweite von 235 bis 336. Die erste ist die Hand eines Gelehrten, die zweite die eines gewöhnlichen Schreibers. Sie bietet den Text der Gothaer Handschrift, mit vielfachen willkürlichen Veränderungen. Dieselben rühren nicht von dem (1.) Schreiber der Handschrift her, sondern sind aus der Vorlage übernommen. Der 1. Schreiber verfährt in so gelehrter Weise, daß er an denjenigen Stellen, wo er einzelne Worte nicht lesen konnte, wo er eine Verderbnis oder Lücke vermuthete, am Rande die Seitenzahl der Gothaer Handschrift vermerkte. Seit Droysen, a. a. O. 149 fg. hält man die Weimarer Handschrift für eine Abschrift direkt aus der Gothaer Handschrift. Das ist sie thatsächlich nicht, sondern sie geht auf eine Handschrift des 15. Jahrhunderts zurück, welche selbst eine Abschrift der 1461 von Ulricus geschriebenen Handschrift kopierte mit vielen willkürlichen Aenderungen. Die Vorlage der Weimarer Handschrift unterschied sich, abgesehen von den Aenderungen, hauptsächlich dadurch von der Gothaer Handschrift, daß ihr nicht nur das Register fehlte, sondern sehr oft die Kapitel auch einer Ueberschrift entbehrten, oder eine Ueberschrift hatten von anderem Wortlaute als der der Gothaer Handschrift. Wie wahrscheinlich alle Abschriften von der Handschrift des Ulricus, hielt auch die Weimarer Handschrift die ursprüngliche Subscriptio bei. Einiges ist in der Weimarer Handschrift dem 1. Schreiber eigenthümlich. Fol. 213^b schrieb er im Achener Gedicht, v. 57 nach seiner Vorlage 'das verstehe ich mich', strich dann 'verstehe' durch und schrieb 'wil' darüber, nach 'mich' 'verstehen' schreibend. Auch dieses 'verstehen' strich er dann und schrieb weiter 'zu Euch versehn' (:geschehn). Fol. 217^a schrieb er 'Levale', a. a. O. v. 223, fügte später hinzu: 'steht Levart p. 379'. 379 ist die betr. Seitenzahl der Gothaer Handschrift. Fol. 217^b schrieb er, a. a. O. v. 242 'die kriegen wir zu kranken die frommen', strich dann die drei ersten Worte durch, tilgte auch das 2. 'die' und schrieb am Rande an Stelle dieses 'die' 'die unschuldig'. Fol. 218^a schrieb er 'drey auf einem pfile', a. a. O. v. 271, strich dann 'auf einem'

durch. Auf derselben Seite, a. a. O. v. 273 steht 'geracht ·/. gerächet', a. a. O. v. 284 geharten ·/. geharret, a. a. O. v. 298 Kule ·/. grube.

6) (*m.*) Die Handschrift in der Bibliothek J. B. Menckens, die jüngere Handschrift seiner praefatio, deren Lesarten er manchmal unter dem Texte anführt. Sie war eine Abschrift der Weimarer Handschrift, die dieser eigenthümlichen Lesarten hat Mencken theils in den Text aufgenommen, theils am Fuße desselben angeführt, oft aber auch in die Gothaer Handschrift eingetragen [1]). Der Verbleib dieser Handschrift ist zur Zeit unbekannt.

7) *g.* Die Handschrift der Universitätsbibliothek zu Greifswald, Mss. German. Quart. 18, vgl. Zeitschrift für deutsche Philologie VI, 116. Sie zählt 538 Blätter und ist von mehreren Händen geschrieben. Sie ist unverkennbar Abschrift der Weimarer Handschrift, oder vielmehr einer Abschrift derselben, mit den Verweisungen derselben auf die Gothaer Handschrift und mit den der Weimarer Handschrift eigenthümlichen Aenderungen. Daß die Weimarer Handschrift nicht ihre direkte Vorlage gewesen, sondern wahrscheinlich eine Abschrift derselben, zeigt Achener Gedicht v. 242, wo sie wie Menckens 'andere Handschrift' 'unschuldig und frommen' hat, v. 223, wo sie deutlich 'Lenele' mit dem Hinweis auf die Gothaer Handschrift hat.

8) *m.* Die Handschrift der Kgl. Hof- und Staatsbibliothek zu München, Cod. German. 1006, 4°, vgl. Catalogus codd. mss. bibl. regiae Monacensis V, 165. Sie stammt aus der Bibliothek des Klosters zu Pollingen, vgl. Archiv III, 264. Sie steht der Weimarer Handschrift noch ferner als die Greifswalder. Die Verweise auf die Gothaer Handschrift sind seltener geworden. Sie hat auch 'lenele', von dem Hinweis auf die Gothaer Handschrift ist bloß 'steht levart p.' übrig geblieben. Lehrreich ist ein Versehen, welches sie von fol. 386—fol. 396 zeigt, auf diesen Blättern stehen Kapitel 204—210, während fol. 373^b schon Kapitel 254 stand und fol. 397 Kapitel 241 kommt. Das beruht auf folgendem Mißverständnis, der Schreiber, oder sein Vorgänger, las

1) Schon Fr. Jacobs Beiträge II, 2, 396 Anm. 2 tadelte es, daß Mencken willkürlich Zusätze und Veränderungen sogar in den Text der Gothaer Handschrift selbst eingeschrieben habe. Er sagt: 'Einiges mag aus seiner späteren Handschrift geflossen sein, hätte aber doch nicht in den ihm geliehenen Kodex eingeschwärzt werden sollen'. Droysen ignoriert diese ganz zutreffende Bemerkung und behauptet, a. a. O. 150, die Handschrift Menckens sei eine Kopie der Gothaer gewesen, aber vor der Korrigierung derselben angefertigt, nicht selten habe Mencken sich dann durch diese Emendationen irre führen lassen. Mencken folgte seinen eigenhändig geschriebenen Notizen, nur Droysen hat sich irre führen lassen.

in seiner Vorlage 'CClV', er nahm es für 'CClV'. Beachtenswerth ist, daß auch die Greifswalder Handschrift hier 'CCIV' hat, bei den folgenden Kapiteln aber 'CCLVI' u. s. w. Die späteren Versehen in der Bezifferung der Kapitel lassen sich weder aus der Weimarer noch aus der Greifswalder Handschrift erklären, sie deuten auf eine dritte Abschrift aus der Weimarer.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich die große Beliebtheit des Windeckschen Werkes, außer den namhaft gemachten Handschriften muß man noch auf eine ziemliche Anzahl verlorener oder doch bis jetzt nicht aufgefundener schließen. Offenbar fand das im freien Geiste, aber im Sinne des Kaiser Sigismund geschriebene Werk große Verbreitung in den kaiserlich gesinnten Kreisen des 15. Jahrhunderts. Die ersten Handschriften traten einfach, ohne Bilderschmuck auf. Der Erfolg, den sie hatten, veranlaßte vielfache Abschriften, von denen die für die Vornehmen mit Bildern prächtig ausgestattet wurden, unseren Prachtausgaben vergleichbar, für die weniger Bemittelten, aber immer noch Begüterten, wurde durch Handschriften ohne Bilder, also durch Volksausgaben gesorgt. Die Art und Weise, wie von einer Kopie mehrere Abschriften genommen sein müssen, deutet auf einen entwickelten gegeschäftsmäßigen Vertrieb. Man würde demselben längst auf die Spur gekommen sein, wenn man darauf geachtet hätte, welche Werke in Deutschland während des Mittelalters, besonders im 14. und 15. Jahrhunderte, für die einzelnen Gegenden abgeschrieben worden. Nur so lassen sich die ersten Anfänge des deutschen Buchhandels bloß legen. Auffallend sind die zahlreichen Abschriften des Werkes aus dem 17. Jahrhunderte für gelehrte Geschichtsfreunde, sie zerfallen in zwei Gruppen, die einen gehen auf den Text von 1437, beziehungsweise 1440, den sie willkürlich verkürzen, die andern auf den Text vom Jahre 1442, alle erklären sich aus dem neu erwachenden Eifer für die Erforschung der älteren deutschen Geschichte, der durch Leibniz in die rechte Bahn geleitet wurde.

Eberhard Windecks Werk liegt uns also in zwei Fassungen vor, von denen die eine aus dem Jahre 1440, die andere aus dem Jahre 1442 stammt. Während wir nicht mehr erkennen können, wie sich des Kaiser Sigmund Buch vom Jahre 1437 zu der Fassung vom Jahre 1440 verhalten hat, ob es nur den oben bezeichneten Anhang erhalten, oder stärkere Umgestaltung erfahren hat, läßt sich das Verhältnis der beiden erhaltenen Fassungen auf Grund einer Vergleichung der Hannoverschen Handschrift mit den übrigen scharf und genau bestimmen. Nur darf man nicht auf for-

male Aenderungen großes Gewicht legen, man muß vielmehr bedenken, daß die Schreiber der Handschriften besonders im 14. und 15. Jahrhunderte in Deutschland das Werk, welches sie abschrieben, ihrem Auftraggeber, beziehungsweise dem Kreise, für welchen es bestimmt war, so lesbar und verständlich wie möglich machen wollten, daß sie also, da die Mundarten damals immer entschiedener sich vordrängten, nicht blos den lautlichen Typus nach Bedürfnis änderten, sondern auch statt der vom Schriftsteller gesetzten Worte, die der Gegend, für welche sie arbeiteten, wählten.

Der Hannoverschen Handschrift und wohl auch der älteren Fassung eigenthümlich sind die vielen kleinen Abschnitte, die durch freien Raum von einander getrennt sind, sie entsprechen durchaus nicht den späteren Kapiteln, sondern mehrere zusammen bilden erst ein Kapitel der späteren Fassung. Es ist unverkennbar, daß die Eintheilung in Kapitel und die Angabe des Inhaltes derselben durch Ueberschriften erst bei der Redaktion vom Jahre 1442 vollzogen worden. Aber schon in der früheren finden sich vor einigen größeren Abschnitten Vorbemerkungen, welche die Aufgabe von Ueberschriften erfüllen und welche wahrscheinlich Anlaß gegeben haben zu den später durchgeführten Kapitelüberschriften. Sie scheinen der Anführung werth zu sein. Fol. 118ᵇ 'Item so sind angeslagen grafen, hern, ritter und knecht dar zu zu geben, also hernach geschriben stet', fol. 119ᵇ 'Item ist geratslagt solich gelt in den freien und rich steden uf zu heben und in zu nemen in massen, wie hernoch geschriben stet', fol. 123ᵇ 'Item hant unser hern die kurfursten und andern fursten geratslaget, als hernoch geschriben stet', fol. 126ᵇ 'Der ketzer Brief in dem jare, do man zalte nach cristus geburt dusent fierhundert und in dem ein und dryssegsten jar', fol. 133ᵃ 'Diß ist auch ein anslag uf die hussen', fol. 177ᵇ 'Auch seint diß die artikel, die mit den brifen ausgegangen seint, als hernoch geschriben stet', fol. 188ᵃ 'Diß ist die schrift des concilium, die sie aus santen zu der selben zeit den krichen', fol. 199ᵃ 'Also keiser Sigmond zu Beheim was, do was gar gros ebendure uf dem Reine, mit gros behendikeit alles den keiser fur kam', fol. 200ᵃ 'Also graf Michel von Wertheim allen fursten, herren, rittern und knechten und stetten disen brief sante', fol. 203ᵃ 'Dieß ist der spruch den graf Michel det machen, do im sein sloss wart abgewonnen von dem bischof von menz'. Die Vermuthung liegt nahe, daß Eberh. Windeck diese Aktenstücke gleich als sie in seinen Besitz gekommen, mit diesen Vorbemerkungen versah, und daß er sie später mit denselben in sein Werk aufnahm [1]).

1) Aehnliche Vorbemerkungen finden sich manchmal in der späteren Redak-

Außer den aufgeführten finden sich noch einige Vorbemerkungen anderer Art, sie deuten, wie mir scheint, auf ein an jener Stelle eingelegtes oder einzulegendes Bild: fol. 18b 'Hie fant man in des konigs kochen gen und solde dem konig vergeben mit vergift von der Venediger wegen mit einem loffele', fol. 78b 'Hie wart Eberhart Windeck geluhen sein lehen uf dem zolle zu Menz', fol. 79a 'Hie sprach der Romische konig zu eberhart windeck, habt euch die lehen und seit frome'. Man wird nicht fehlgehen, wenn man behauptet, daß diese drei Stellen den Schriftsteller am ehesten zur Illustrierung auffordern mußten. Der vierte Fall bestätigt diese Ansicht. Dem Liedlein, welches Eberh. Windeck zu Constanz auf das Treiben der Kurtisanen gemacht hat, v. Liliencron a. a. O. I, 264 fg., folgt in der Hannoverschen Handschrift fol. 115a die Bemerkung: 'Diß sint die corthesan und die schriber mit den fehen in alten umbhangen, komen zu den hubschen frawen und werden von in liplich entpfangen'. Windeck wollte die ihm verhaßten Kurtisanen auch noch im Bilde verspotten. Noch an einer fünften Stelle möchte ich eine Illustration annehmen: fol. 208a heißt es: 'In der selben zeit geschag diß vorgezeichent wunder in Brobant bey leven, sent druden und alk'. Der Abschnitt beginnt erst mit den darauf folgenden Worten, er erzählt die Naturschrecken, die dem Tode Kaiser Sigmunds vorausgingen, für Windeck also wiederum eine Stelle von höchster Bedeutung, die er auch durch ein Bild markieren wollte. Fast alle diese Vorbemerkungen wurden bei der Redaktion vom Jahre 1442 gestrichen, beibehalten sind in der Gothaer Handschrift nur die auf fol. 200a und auf fol. 203a, die auf fol. 118b (Als die joden angeslagen sein) ist so verändert 'Das saget uns wie die juden angeslagen wurden', von der auf fol. 126b ist nur der erste Theil 'dicz ist der ketzer brief' als Ueberschrift geblieben, der folgende wurde zum Kapitel geschlagen.

tion zu Anfang der Kapitel, nicht mehr als Ueberschrift, so z. B. zu Anfang des 46. Kapitels in *G*, des 59. in *C*, was in *H* fol. 20a steht: 'Hie ist gemirket in disen nochgeschriben artikeln alle sache und schulde, die der allerdurchluchtigste furste und herre hern Wentzlawe Romischer konig zu allen zeiten merer des reichs und konig zu Beheim hat wider den konig zu Ungern sinen bruder Sigmont genant, der darnoch Romischer konig wart'. Einmal findet sich in *H* eine Vorbemerkung, welche mehrere folgende Abschnitte zusammenfaßt, so daß man an eine Sonderexistenz dieses Theiles denken könnte. Sie fehlt in der späteren Redaktion vor Kap. 312 *G*, 323 *C*. Sie lautet fol. 167a: 'Nu finstu hernoch wie das heilige grab zu Jerusalem stet mit allen seinen Cappellen, finstern und altaren und staffeln, und wie vil etzliche cappellen staffeln han und wie weit sie sint und in wes ere iglich cappel geweihet ist, und darnoch aber wie iz ge mit dem Romischen keiser und ouch mit der phaffheit zu Menz und mit der stait und etzlich luden, die zu Menz zwo zungen haint, got geb uns ein gut ende'.

Die Thätigkeit des Redaktors vom Jahre 1442 äußert sich, abgesehen von der schon gekennzeichneten Erweiterung des Anhangs, besonders in Streichungen, er beseitigte planmäßig die zu starken Ausfälle gegen die Fürsten und vor allem gegen die Pfaffen, so daß man glauben könnte, nicht Eberhard Windeck selbst habe diese Redaktion vorgenommen.

Das 220. Kapitel in *G*, das 230. in *C*, schließt: 'Herzog Otto half dem lantgraven mit ganzen rechten truwen', *H* hat statt der 4 letzten Worte fol. 86[a]: 'nach rechter traw der fursten, da la dich nit fast noch dursten, wan ens hies der phenig, der macht es hin und her wendig'.

Nach Kap. 291 in *G*, 302 in *C*, stehen noch zwei Abschnitte in *H* fol. 152[a] und fol. 152[b]: 'Item gedenk an den winschanke von der domherrn und der leyen wegern, darumb die phaftheid us der stad Menz zogen, alle knonkin und vicarien zum dome und alle prister. Dar umb wart ein dag gemacht gen Eltvil uf den donstag noch sant Jacobs dag. Dar quam fele der phaffheit und der bischof Conrad von Menz, was ein Reingrafe, von Isenberg, von Hanaw, der bischof von Kollen, was einer von Morse, und der von Katzenelenbogen, die von Epenstein, von Isenberg, von Hanawe, Bomberg und vil fromen unde edelen hern und knecht, des rads frunde Wormbs, Spier und Frankfurt, phalzgrafe, rede und schiden ane enders von dannen; und was alles in dem der keiser Sigmond zu Rome was und erst keiser was worden; und is was worden bos und nit gut und wart hernoch ie lenger ie arger. Das machet alles der paffin ubirnid und darzu auch ir gros geitikeit'.

'Item in der selben zeit als der keiser Sigmond gen Rom zog und keiser warden wolt, under des waren die hern von Prussen und der konig von Bolan zu krig komen und vermassen sich eins krigs zu striden, und striden auch am andern dag noch Sant Johans dag zu mittensomer, und die Prussen verloren vil lude, aber sie behilden das feld. Also gar wunderlich stund iz in der christenheit mit vil bosen sachen und furnemen, idel geidikeit und bosheit, das iz nit wonder were, das got die welt hette vergen lassin. Doch so worden vil grosse wasser und wetter in dem selben jare, dan der Rin ging mannes hoch zu dem isendorlin in und ging fur das kaufhaus by fur den borne, der uf dem bran stet, das man mit nochin fur den burn fur'.

Vor Kap. 293 in *G*, 304 in *C*, steht folgender Abschnitt noch in *H* fol. 153[b]: 'Item in dem waren der stad frunde von Menz gen Basel gereden von der phaffheit wegen und umb den winschanke, den die stat hette uf gerucket und einen gemeinen notz, mit

namen Henz Rebstock, Johannes zum Sutters und der stadschriber Nicolai Wirstad'.

Vor Kap. 295 in *G*, 306 in *C*, steht noch ein großer Abschnitt in *H*, fol. 155ᵃ: 'Item in dem waren alle die phaffen us Menz und man sang noch inlas kein messe in derkeinen kirchen, dan heimlich, von unser frawen abent assumptionis, in dem jar, do man zalt noch Christ geburt dusent IIIIᶜ und in dem druunddrissigsten jar bit uf unser frawen abent zu lichtmesse in dem M IIIIᶜ XXXIIII jar. Und ging doch ie wol, das ging ie mit artikeln, eitel boser behendikeit etzlicherers des jars und diekein hatten kein acht dar uf und worden ie lenger ie herter, und blib auch also sten mit uf den Sambstag fur unser frawen dag kerzweiche oder lichtmesse. Do fingen sie wider an zu singen und gluck zu luden, als man zalt M IIIIᶜ funfunddrissig jar, und gotzdinst verleip also lang durch eitel geitzigkeit und eigen willen, homut, gros hofart, und nicht umb gotz ere und der gemeinen werlde notz, wan die merdeil der phaffheit, die warn also gestalt, das sie die leien gern hetten ferner gedrungen, dan billich und recht was. Den almechtigen got mochte iz wol erbarmet han. Und ich glaube ganz in mim herzen, das iz der almechtig got nimer ungestrafet lass, wan zu den zeiden alle unfure und unredlichkeit van etzlichen geistlichen quam und was rachtung geschag zuschen der phaffheit und den leien, das macht, das die stad arme was und geschag uf ein hoffnung des keisers zukunft, und wie wol etzlicher der phaffen und auch der leien dem keiser nicht holt enwarn. Got gebe, das in gelont werde. Amen'.

Vor Kap. 313 in *G*, 324 in *C*, ein Abschnitt in *H*, fol. 167ᵇ: 'Nu saltu merkin, wie ich dir nu zu versten geben. Und iz was koniglichen von der phaffheit und den domhern zu Menz, die da vil unrads driben hatten und warumb sie aus Menz gezogen warn us iren redelichen gemachen und gotlicher ordenunge und schoner wonunge und des almechtigen gotz dinste, er, gesang und dagzeit nider war gelacht durch einen eigen willen zu haben und itel geitikeit, hoffart und homut'.

Vor Kap. 319 in *G*, 330 in *C*, ein Abschnitt in *H*, fol. 172ᵇ: 'Auch als du vor me gelesen hast und geschriben vindest, wie die phaffheit us Menz gezogen worn etwe lang zeit und dedingten mit der stat vor dem concilium zu Basel und sie hatten den sang verslagen in allen kirchen in der stat Menz und auch daraus in dem burcbanne uf unserer lieben frawen dag assumptionis genant in latin in dem fierzehenhunderten und XXXIII jare, das wert uf den Sambstag vor unser lieben frawen dag kerzwei in dem fier-

zehnhunderten und XXXV jar. Also war der lobliche gotzdinst jamerlich nider gelacht durch ein bose furnemen und in dem ee die phaffheit ein sentencien gewonnen, also begunde man mit in dagleisten. Da begert die phaffheit ein werrengeleid zu haben, dan sie von alter biz her gehapt hetten. Soliches furnemen geschag alles die weil keiser Sigmond von Basel aus dem concilium gen Regensperg gezogen was und also gen Ungern wolt. Als er auch det. In dem sante dan concilium zu Basel ir frunde gen Menz in die stad und liess da versuchen und detingen zuschen der phaffheit und der stat, ob man sie vereinichen mocht. Also das auch geschag, als du hernoch wol vinden wirst'.

Endlich hat der Redaktor die dritte Rachtunge, welche gegen 1440 dem Anhange einverleibt worden, wieder ausgeschieden.

Es ist keine Frage, daß es bei diesen Streichungen nicht sowohl darauf ankam, das Werk abzurunden, als vielmehr darauf, der Geistlichkeit und den Fürsten gegenüber einen milderen Ton anzuschlagen, um so dem Werke auch die Verbreitung in den klerikalen Kreisen zu ermöglichen.

Auf irgend welche Erweiterung oder Vermehrung hat die Redaktion vom Jahre 1442, abgesehen von kleineren historischen Zusätzen, vgl. S. 527, und von dem schon gekennzeichneten Anhange, keinen Bedacht genommen.

Nunmehr erübrigt es den kritischen Werth der einzelnen Handschriften für die Konstituierung des Textes, sei es der Redaktion vom Jahre 1440, sei es der andern vom Jahre 1442, festzustellen. Alle erhaltenen Handschriften sind mit großer Nachlässigkeit und Sorglosigkeit geschrieben, die meisten weisen willkürliche Veränderungen und Abweichungen auf.

Daß weder *H*, noch *G* allein ausreicht, läßt sich an dem Schluß des Kap. 261 in *G*, fol. 139ª in *H*, zeigen. 'Item in derselben zit was der konig von Demmark, der des Romischen konigs fetter was, mit krige mit den (hanse)steten also (Rassmar,) Wissmar, Jackstet, Swerin, Wolgast, Hamberg, Lubeck und andern steden, den hulfin iezlich fursten also die von Brunswig, der bischof von Medeburg, von Hildesheim, Halberstad. Also umb Sant Johanns dag Baptiste da lagen des konigs von Demmark frunde neder, wol mit fierdusent oder me. Solich wonder und jamer machet nit anders zu der zeit, als ich mich verstande, dan das unrecht was so gros under geistlich und werntlichen, das mich nit wonder hett gehabt, das got so zornig wer gewest, das alle werlt were versunken, wan iz kunde nemant so ubel da gedun, er funde zuleger und seine bosheit durch zu brengen und under funfzig menschen. . . .' Das

eingeklammerte fehlt in *G*. Richtig hat *G* zwischen 'funfzig' und 'menschen' 'nit einen gerechten', falsch nach 'Halberstad' 'Solch wunder und stat' den Anfang des 2. folgenden Satzes.

An den Lesarten des 81. Kapitels, welches Aschbach a. a. O. II, 454, nach der Ebnerschen Handschrift mitgetheilt hat, kann man sich leicht ein Urtheil über das Verhältnis der Handschriften *H G E C Z* zu einander bilden.

So sint die (dis die *C*) cleinoter, die Eberhart Windeck zu Brücke in Flandern versetzt hatte von geheisse des romischen königs *E C* Dis ist von den kleinotern (kleinoten *Z*) die Eberhart Windeck (Ewerhart Wincke *G*) gelost hat in Flandern von des koniges wegen *G Z* Ueberschrift fehlt *H* — cleinat *H G* cleinot *Z* cleinoter *E* cleinöter *C* — kannen *H E C* kandeln *G* kanten *Z* — gulden *H E C Z* fehlt *G* — mischkengin *H* mischkenchen *E* mischkennychen *C* muschkenchen *G* müschkannelin *Z* — die *E* fehlt *H G C Z* — I^c^ LXXXXVI *H* hundert und XCVI *C* ein hundert und sechs und achtzig *G* und ain hundert und sechs und achtzig *Z* hundert und XL *E* — saffir *H G E C* saphyren *Z* — und pallas *H E C* fehlt *G Z* — III^c^ LXXI perlin *H* drey hundert und ein und siebenczigk perlin *G* drei hundert ain und sibentzig berlin *Z* dryhundert perlin *E C* — ydes *H* ie das *E C* und ydes *G Z* — gesatzt *H* geschatzt *E* geschetzet *C* geschätzet *G Z* — furspang *E C* furspan *H* furspange *G* furspand *Z* — in dem furspang (furspand *Z*) was (warr *G*) *G E C Z* waren in am Rande angegeben, daß vor 'waren' 'in dem vorspan' stehen soll) *H* — wart geschatzt für XII^c^ (die Zahl durchstrichen und übergeschrieben IX^m^) krone (am Rande hinzugefügt: und ein robin wart geschatzt vor XI^m^) *H* und wart geschätzet fur newn tausent cronnen. Ein rubin wart geschätzet für einlif tausent cronen *G Z* das wart geschatzt fur XI tusent gulden *E C* — ein *H G Z* und ein *E C* — geseczt verbessert in geshäczt *H* gesäczet *G* geschetzt *C Z* geschatzt *E* — dasselbe furspang (furspan *H*) *H E C Z* das obgenant furspange das *G* — ich ab in *H Z* ich in *G E C* — gelbes (gelwe *Z*) wachs *E C Z* gele waschz *H* gelbes wasch *G* — und *H G C* Item *E Z* — beinbant *H Z* leinbant *G* beigewant *E* beingewant *C* — das wart *H G C Z* wart *E* — VI^m^ *H* sechs tausent *G* XI tusent *E C* ainlof tusend *Z* — und *H G C Z* Item *E* — flesche *H* fleschen *E C* fläsch *Z* flaschen *G* — wart *H G Z* die wart *E C*.

Zur Vervollständigung des Eindruckes füge ich noch hinzu eine Lesart von *G* aus dem Kap. 83 *E*, 84 *C*, 72 *G*, statt 'hern (herr *E C Z*) Bernharten (Bernaw *H*) von der Leitern, der vertrieben was von Bern' (Pern *H*) in *H E C Z* liest *G* blos: 'herr berna',

ferner eine Lesart von *C* aus dem 250. Kapitel, statt 'bischof Cunrad, (conrad von 2. Hand hinzugefügt *H*) von Mentz und me fursten und der bischof raby (rab von 2. Hand hinzufügt *H*) in *H G E* liest *C* blos 'bischof raby'.

Es ergibt sich daraus, daß *H* mit großer Sorglosigkeit geschrieben, oft nur durch die 2. Hand die richtige Lesart aufweist, ferner daß die Auslassungen, Verlesungen und willkürlichen Aenderungen von *G* mit Hülfe von *E C* gebessert werden können, daß *E C* nahe verwandt sind, sich aber durchaus nicht decken, daß beide nur auf dieselbe Vorlage zurückgehen, daß *C* gegenüber *E* manchmal das echte hat, manchmal aber auch Lücken aufweist, endlich daß beide *E C* kontroliert werden müssen durch *G*, da *G* trotz der Sorglosigkeit des Schreibers oft das ursprüngliche gewahrt hat, ja vollständiger ist als *E C*, welche durch Schuld der Schreiber manche Lücken haben. *Z* ist nach dem vorhergehenden aus derselben Vorlage geflossen, aus der *G* hervorgegangen, mit dem es nicht immer übereinstimmt. Das gute Vorurtheil, welches man so für *Z* gewinnt, bestätigt sich nicht bei der weiteren Untersuchung.

Ein zutreffendes Urtheil über die Windeckhandschriften gewinnt man erst bei der kritischen Durcharbeitung einer größeren Partie, etwa bei der kritischen Bearbeitung der historischen Gedichte, welche Windeck uns durch Aufnahme in sein Werk gerettet hat, so z. B. bei dem 'buch von einer Acher vart', um so mehr da hier aus v. Liliencrons Histor. Volksliedern I, 305 fg. die Lesarten von V^1 V^2 zu Gebote stehen.

Werthlos für die Kritik ist *w* wegen seiner willkürlichen Aenderungen, die zumeist in der Vorlage von *w*, einer Handschrift des 15. Jahrh., standen. Offenbar ist das Bemühen, die durch Sorglosigkeit der früheren Schreiber verderbten Reime zu bessern, wobei aufs Gerathewohl geändert wird, oft unter Zuhülfenahme eines oder mehrerer Worte der folgenden Zeile. Verse, denen die entsprechende Reimzeile fehlt, streicht *w* ohne weiteres. Ebenso ist ganz unbrauchbar die Handschrift *Z*. Sie versteht ihre Vorlage sehr oft gar nicht und ergeht sich daher in den tollsten Schlimmbesserungen, z. B. sie schreibt v. 65 'der Ain' st. 'her Kon', v. 149 'besten rat' st. 'bosen rat', v. 169 fg. 'ir aider' st. 'ir ein, der', v. 180 'werker' st. 'verken', v. 241 'nitkemer' st. 'nit komen', v. 298 'morttune' st. 'mortkule' v. 316 'bößwicht' st. 'bose wacht'. 'ſ' und 'f' der Vorlage verwechselt sie, v. 194 'tieffer' st. 'dieser', v. 246 'uff' st. 'us', v. 257 'smitessen' st. 'funtesen'-'fontana'. Da sie v. 297 'gude' für eine Abkürzung hielt, schrieb sie dafür 'gnädige'.

Eine Gruppe bilden *G C* V^1 V^2, welche mehr oder minder direkt auf dieselbe Vorlage zurückgehen. Am weitesten entfernt sich von derselben durch selbständige Aenderungen V^2, vgl. Lesarten zu 10, 11, 15, 20, 21, 32, 35, 42, 43, 48, 62, 68, 75, 122, 167/8, 175, 183, 187, 190, 201, 240, 249, 253, 258, 263/4, 282. 290/1, 318, 326. An einer Stelle hat V^2 wie es scheint durch Konjektur das richtige, 57. Weniger oft zeigt V^1 absichtliche Aenderungen, vgl. Lesarten zu 2, 19/20, 41, 99, 108, 129, 141, 160, 265, 268, 321, durch Konjektur hat V^1 239 allein die richtige Lesart. V^2 ist nicht etwa Abschrift von V^1, denn V^2 hat 277 alleinstehend die richtige Lesart bewahrt, V^1 hat allein eine Lücke 68, 277, abgesehen von den absichtlichen Aenderungen in V^1. Von diesen Aenderungen müssen mehrere in der Vorlage gstanden haben, welche auch die Lücke 277 aufwies, denn *C* stimmt in mehreren Fällen mit V^1 überein, vgl. Lesarten zu 2, 19/20, 99, 129, 160 und die Lücke 277. V^1 und V^2 sind sehr nahe verwandt, daher haben beide nach 223 eine Lücke, ebenso 284, ferner dieselbe Lesart 13, 59, 61, 70, 98, 192, 236, 261, 272, 273, 274, 280, 307, 329. Dieser Vorlage von *V* (= gemeinsame Vorlage von V^1 V^2) steht die von *C* sehr nahe, auch *C* hat eine Lücke nach 223 und 284 und stimmt mit den Lesarten von *V* in folgenden Fällen überein: 59, 98, 192, 236, 261, 272, 280, 307. Die Vorlage von *C V* war auch nahe verwandt der von *G*, daher fehlt im *G C V* 224—227 (*G* allein (in dieser Gruppe) hat 223 erhalten), 284, daher haben sie ferner dieselben oder nahe verwandte Lesarten, 98, 143, 155, 185, 210, 236, 257, 262, (hier hat *C* durch Konjektur die Lücke ausgefüllt), 307. *G C* stehen noch zusammen 151, 171, 279, 319. *C* steht allein mit seiner Lesart 295, wo es das richtige allein bewahrt hat, 195, 219, 222, 262, 296, wo es selbständig geändert. Selbständige Aenderungen finden sich auch in *G*, vgl. Lesarten zu 59, 72, 101, 129, 162, 183, 192, 283, andere Stellen waren durch Sorglosigkeit und Nachlässigkeit von *G* verderbt, vgl. Lesarten zu 12, 13, 26, 32, 98, 162, 228, *H* ist sehr gedankenlos und nachlässig geschrieben, nur einige Versehen hat der Schreiber selbst verbessert, mehr hat die zweite Hand gethan, aber auch sie hat noch manche Fehler übersehen. Absichtliche Aenderungen hat *H* nicht, ausgenommen die wenigen Fälle, wo *H* für den Ausdruck der Vorlage einen synonymen gesetzt hat, vgl. z. B. die Lesarten zu 18, 141, 143.

Es ist daher unstatthaft den Text nach einer der genannten Handschriften zu geben, oder ihn beliebig aus gerade vorliegenden Handschriften zu konstituieren, man muß vielmehr nach den ge-

wonnenen Resultaten verfahren. Die Kombination *G C V* bietet das richtige, wo *H* nachweislich aus Sorglosigkeit oder Absicht abweichendes hat, manchmal haben *H G* das echte erhalten. Der so gewonnene Text ist aber noch an manchen Stellen verderbt und bedarf daher manchfacher Besserung, diese kann sich fast immer auf *H* stützen, welches keine Konjekturen enthält.

Es ist eine leichte philologische Arbeit nach diesen Grundsätzen eine kritische Ausgabe des Windeckschen Werkes, sei es der Redaktion vom J. 1440, sei es der anderen vom J. 1442, herzustellen.

Ueber die negative Natur organischer Radikale.

Von

Victor Meyer.

In der kurzen Notiz „über eine chemische Eigenschaft Carbonyl- und Cyan-haltiger Benzylverbindungen“, welche ich vor einiger Zeit veröffentlichte[1]), habe ich ein Arbeitsgebiet skizzirt, welches seither in meinem Laboratorium nach verschiedenen Richtungen durchforscht worden ist. Infolge unerwarteter Beobachtungen, die ich weiter unten besprechen werde, haben die Untersuchungen eine viel größere Ausdehnung gewonnen, als ich anfangs erwartet hatte, und es liegen jetzt schon mehrere größere Abschnitte des Gebiets vollständig bearbeitet vor. Wenn ich trotzdem seit jener ersten Notiz über den Gegenstand nichts publicirt habe, so geschah dies, weil die verschiedenen Einzelarbeiten sämmtlich untereinander im Zusammenhange stehen und zu dem Zwecke unternommen worden sind, wenn möglich, ein den neuen Erscheinungen zu Grunde liegendes allgemeines Gesetz zu finden. Es erschien mir daher zweckmäßig, dieselben gemeinschaftlich zu veröffentlichen, und mit der Publication zu warten, bis wenigstens die Hauptfragen, die infolge der ersten Beobachtungen entstanden sind, eine bestimmte Antwort erhalten haben. Ich ersehe indessen aus Publicationen in dem kürzlich erschienenen Heft 13 der „Berichte d. Deutsch. Chem. Ges.“ daß meine erste Notiz, vielleicht in Folge ihrer etwas zu knappen Fassung, stellenweise übersehen worden ist, und ich erlaube mir daher heute, den Inhalt der im letzten Semester unternommenen Arbeiten kurz zu besprechen, damit nicht etwa andere Fachgenossen Zeit und Mühe auf Untersuchungen verwenden, die im hiesigen Laboratorium begonnen oder schon abgeschlossen sind. —

---

1) Diese Nachrichten, 1887, p, 141.

In meiner ersten Notiz ist mitgetheilt, daß der Wasserstoff der Methylen-Gruppe in den Verbindungen: $C_6H_5 - CO - CH_2 - C_6H_5$ (Desoxybenzoïn) und $C_6H_5 - CH_2 - CN$ (Benzylcyanid), ähnlich wie beim Acetessigaether und Malonsäureaether, durch organische Radicale vortreten werden kann, obwohl beide die CH_2-Gruppe nicht zwischen zwei CO-Gruppen enthalten. Diese Wirkung, eine Folge der Negatiavität, welche den benachbarten Radicalen zukommt, war für die Nitrogruppe schon vor 15 Jahren von mir als allgemein gültig erwiesen, für die CN-Gruppe in einzelnen Fällen erkannt [Malonitril, Cyanessigaether, Cyanacetophenon u. s. w.]. Am wenigsten war sie bei einer stickstofffreien Verbindung, wie dem Desoxybenzoïn zu erwarten; nachdem aber die große Leichtigkeit, mit welcher dieses sich in alkylirte Producte verwandeln läßt, erkannt und damit festgestellt war, daß die Gruppen C_6H_5 und CO auf Methylen-Wasserstoffatome eine ähnliche Wirkung ausüben, wie die zwei Carbonyle im Acetessig- und im Malonsäureaether, bezweifelte ich kaum, daß auch im Phenylessigaether

$$C_6H_5 - CH_2 - COO\,C_2H_5$$

der Wasserstoff der Methylengruppe durch Natrium und durch Alkoholradicale werde ersetzbar sein. Wie indessen schon in meiner ersten Notiz mitgetheilt, ist diese Voraussetzung durch den Versuch durchaus nicht bestätigt worden.

Nach den gemachten Beobachtungen entstand zunächst die Aufgabe, die neugewonnenen Derivate des Nähern zu studieren. Weiter drängte sich der Wunsch auf, zu ermitteln, welche Klasse von Körpern ähnlicher Constitution sich dem Desoxybenzoïn und Benzylcyanid anschließen — welche anderseits, analog dem Phenylessigaether, sich indifferent erweisen würden.

Eine weitere Frage war die nach der Zahl der Radikale, die auf solche Weise eingeführt werden können.

Endlich war zu ermitteln, ob Desoxybenzoïn, Benzylcyanid und ähnliche als reactionsfähig erkannte Körper, sich auch in andern Beziehungen, so namentlich in ihrem Verhalten gegen salpetrige Säure, Diazobenzol u. s. w. dem Nitroaethan und Acetessigaether analog verhalten würden.

Was den zuerstgenannten Punkt betrifft, so sind, wie schon in der frühern Notiz erwähnt, eine Anzahl von homologen Desoxybenzoïnen [alkylirte und benzylirte Abkömmlinge desselben] dargestellt und näher untersucht worden; auch die Wirkung von Chlorameisen — und Chloressigester auf Desoxybenzoïn ist studirt worden. Das schon neulich erwähnte benzylirte Benzylcyanid ist

nach verschiedenen Richtungen untersucht und namentlich durch Verseifung in die benzylirte Phenylessigsäure

$$C_6H_5 - \underset{\substack{| \\ CH_2 \\ | \\ C_6H_5}}{CH} - COOH$$

übergeführt worden, welche dann einer näheren Untersuchung unterworfen ist.

Ein sehr weites Arbeitsgebiet eröffnete sich durch die zweitgenannte Frage. Zahlreiche Körper, welche ihre Constitution mit dem Desoxybenzoïn oder Benzylcyanid in Parallele setzt, wurden auf ihre Fähigkeit, mit Natriumäthylat und Jodalkylen zu reagiren, untersucht. Es zeigte sich dabei im Allgemeinen, daß nur diejenigen Substanzen, deren Constitution eine vollkommene Analogie mit der der genannten Körper besitzt, auch in ähnlichem Sinne zu reagiren vermögen, während alle etwas weiter abliegenden sich indifferent erweisen.

Da das Nitril der Phenylessigsäure so leicht reagirt, die Aether derselben Säure aber ganz indifferent sind, so war es von Interesse zu prüfen, wie sich die Amide derselben verhalten. Das Amid selbst, $C_6H_5 - CH_2 - CO - NH_2$, erschien für den Versuch wenig geeignet, da die Amidgruppe desselben sich an der Substitution betheiligen konnte. Es wurden daher die zweifach alkylirten Amide $C_6H_5 - CH_2 - CO - N(C_2H_5)_2$ und $C_6H_5 - CH_2 - CO - N(C_6H_5)_2$ dargestellt und untersucht. Sie erwiesen sich, wie die Aether, indifferent. —

Schiebt man in das Molekul des Benzylcyanids noch eine Methylengruppe ein, so resultirt die Verbindung $C_6H_5 - CH_2 - CH_2 - CN$ das Nitril der Phenylpropionsäure; diese wohlbekannte Verbindung wurde in Bezug auf Reactionsfähigkeit mit dem Benzylcyanid verglichen und indifferent befunden, ebenso wie auch das ähnlich constituirte Zimmtsäure-Nitril:

$$C_6H_5 - CH = CH - CN.$$

Ganz analoge Vergleiche wurden auch mit dem Desoxybenzoïn analogen Ketonen angestellt.

Die Verbindung

$$C_6H_5 - CH_2 - CH_2 - CO - C_6H_5$$

ist zu diesem Zwecke dargestellt worden, doch sind die mit ihr vorgenommenen Versuche noch nicht zum Abschluss gelangt. Daß das ihr isomere Dibenzyl-Keton

$$C_6H_5 - CH_2 - CO - CH_2 - C_6H_5$$

durch Natriumalkoholat und Alkyljodide leicht angegriffen wird,

ist schon in der vorläufigen Mittheilung erwähnt, doch nimmt hier die Reaction keinen ganz einfachen Verlauf. —

Da das Nitril der phenylirten Essigsäure so leicht reagirt, erschien es von großem Interesse, die Nitrile anderer substituirter Essigsäuren, sowie das der Essigsäure selbst zu untersuchen. Aceto- und Isobutyronitril erwiesen sich aber als nicht reactionsfähig. Dagegen wirkt die Phenylengruppe dem Phenyl ganz gleich. Wenigstens giebt das Para-phenylen-di-essigsäure-Nitril:

$$p.\ C_6H_4 \begin{matrix} -CH_2-CN \\ -CH_2-CN \end{matrix}$$

mit derselben Leichtigkeit wie Benzylcyanid ein Benzyl-Substitutionsproduct von der Formel:

$$C_6H_4 \begin{matrix} C_7H_7 \\ | \\ -CH-CN \\ -CH-CN \\ | \\ C_7H_7 \end{matrix}$$

aus welchem durch Verseifung die entsprechende Dibenzylphenylen, Diessigsäure gewonnnen worden ist. Ebenso wirkt das Naphtyl und die Radicale der höhern Theer-Kohlenwasserstoffe [des Diphenyls-Naphtalins, Fluorens u. s. w.] in derselben Weise acidificirend, wie die Phenylgruppe. Es wurde zu diesem Zwecke eine Anzahl dem Desoxybenzoïn analoger Ketone der Formel

$$R-CO-CH_2-R^1$$

— zum Theil gut krystallisirende Substanzen — dargestellt und mit Natriumalkoholat und Halogen-Alkylen in Umsetzung gebracht,

So weit bis jetzt untersucht, werden sie sämmtlich leicht in alkylirte Ketone verwandelt. Daß auch das Radical des Thiophens, das Thienyl C_4H_3S, in derselben Weise acidificirend wirkt wie die Phenyl-Gruppe, habe ich schon mitgetheilt.

Indem ich eine Anzahl analoger Versuche, welche negative Resultate ergaben, übergehe, möchte ich eine mir auffällig erscheinende Thatsache nicht unerwähnt lassen. Fast überall finden wir. daß die Gruppen CO (Carbonyl) und SO_2 (Sulfuryl) sich chemisch ähnlich verhalten. Ich hielt es daher für in hohem Maße wahrscheinlich, daß ein Desoxybenzoïn, in welchem die Carbonylgruppen durch Sulfuryl ersetzt sei, den Character des Desoxybenzoïns zeigen werde. Zu diesem Zwecke wurde die Verbindung

$$C_6H_5-SO_2-CH_2-C_6H_5$$

dargestellt. Diese Substanz — ein prächtig krystallisirender, höchst beständiger und ohne Zersetzung flüchtiger Körper — verhält sich indessen vollkommen indifferent bei den typischen Reactionen,

welche das Desoxybenzoïn glatt in wohl characterisirte Derivate überführen. Eine Analogie zwischen den ähnlich zusammengesetzten Körpern

$$C_6H_5 - CO - CH_2 - C_6H_5 \text{ und}$$
$$C_6H_5 - SO_2 - CH_2 - C_6H_5$$

besteht also in Bezug auf das chemische Verhalten nicht.

Hier sei noch erwähnt, daß die Anwesenheit von 2 oder 3 Phenylgruppen allein — ohne gleichzeitiges Vorkommen von Carbonyl oder Cyan — nicht ausreicht, um dem Wasserstoff benachbarter Kohlenwasserstoffgruppen ersetzbar zu machen. Di- und selbst Triphenylmethan haben sich nämlich als nicht reactionsfähig erwiesen.

Wenn nun auch diese Kohlenwasserstoffe selbst sich indifferent verhielten, so war es doch möglich, daß die Nitro-Derivate derselben

$$CH_2\begin{cases} C_6H_4 - NO_2 \\ C_6H_4 - NO_2 \end{cases} \text{ und } CH\begin{cases} C_6H_4 - NO_2 \\ C_6H_4 - NO_2 \\ C_6H_4 - NO_2 \end{cases}$$

sich reactionsfähig erweisen würden.

Versuche, die hierüber angestellt wurden, haben ergeben, daß diese Körper schon durch Natrium-Aethylat allein in schön violett gefärbte Derivate übergeführt werden, deren sofortige Entstehung die Bildung der erwarteten Abkömmlinge nicht zu Stande kommen läßt. —

Im Bezug auf die oben an dritter Stelle formulirte Frage haben die Versuche ein ganz unerwartetes Resultat ergeben.

In dem Acetessigäther, dem Malonsäureäther u. s. w. lassen sich nacheinander 2 Wasserstoffatome durch Alkyle ersetzen und es ist ein zweites Radical nahezu mit derselben Leichtigkeit, wie das erste, einführbar. Nachdem daher erkannt war, daß sich im Desoxybenzoïn mit größter Leichtigkeit 1 Atom Wasserstoff substituiren läßt, zweifelte ich keinen Augenblick, daß sich auch zweifach substituirte Desoxybenzoïne so würden erhalten lassen.

Diese Voraussetzung hat sich indessen durchaus nicht bestätigt.

Obwohl die Versuche auf die mannigfaltigste Art modificirt wurden, ist es bisher in keinem Falle gelungen, die Einführung eines zweiten Radicals in das Desoxybenzoïn zu erzwingen. Es wurde zunächst so operirt, daß das Keton mit zwei Molecülen Natriumäthylat und überschüssigem Halogen-Alkyl — in Form ihrer Chloride, Bromide und Jodide in Anwendung gebracht in Berührung kam; es wurde bald in offenen Gefäßen bald unter Druck bei mehr und mehr gesteigerter Temperatur operirt; ebenso wurde

versucht, ein rein dargestelltes monoalkylirtes Product der nochmaligen Substitution zu unterwerfen. Unter allen Umständen blieb die Reaction bei einmaliger Durchführung des Processes stehen.

Welches nun die Ursache ist, daß das Keton $C_6H_5 - CH_2 - CO - C_6H_5$ so leicht reagirt, während das ihm doch ganz nahe stehende

$$C_6H_5 - \underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{CH}} - CO - C_6H_5$$

absolut indifferent ist, darüber vermag ich zur Zeit noch kaum eine Vermuthung zu äußern. Die Thatsache ist mir um so befremdlicher, als nach den schönen Untersuchungen, welche Gabriel am Homo-Ortho-Phtalimid angestellt hat, hier die Verhältnisse gerade umgekehrt liegen. In dieser Substanz, welche die Formel [1]:

$$C_6H_4 \begin{matrix} - CH_2 - CO \\ \overline{\qquad\qquad} CO \end{matrix} > NH$$

hat, ist ebenfalls der Methylenwasserstoff durch Alkohol-Radicale ersetzbar. Nach Gabriel aber gelingt es nicht, nur eines der beiden Methylen-Wasserstoffatome zu ersetzen, sondern die Substitution erstreckt sich immer gleichzeitig auf beide. Um über dieses eigenthümliche Verhältniß Klarheit zu erhalten, sind eine große Anzahl von Versuchen angestellt worden, welche sich sowohl auf die Derivate des Desoxybenzoïns wie des Benzylcyanids erstrecken. Denn auch in das Benzylcyanid läßt sich eine Benzylgruppe mit Leichtigkeit einführen, während die Substitution noch eines zweiten Wasserstoffatoms bisher nicht gelingen wollte.

Die Versuche zur Durchführung einer zweimaligen Substitution, welche — zumal soweit sie das Benzylcyanid betreffen — noch nicht abgeschlossen sind und weiter fortgesetzt werden, ergaben, außer dem schon oben Mitgetheilten, noch das Resultat, daß auch der Aether der Diphenylessigsäure:

$$\begin{matrix} C_6H_5 \\ C_6H_5 \end{matrix} > CH - COO\ CH_3,$$

ebenso wie der Phenylessigäther selbst, nicht reactionsfähig ist; sie führten ferner, mit Bezug auf die Derivate des Desoxybenzoïns zu einem ganz unerwarteten Ergebnisse:

Daß der Wasserstoff der Methylen-Gruppe in Desoxybenzoïn

---

[1]) Ob die Substanz, die jedenfalls ein Analogon des Phtalimids ist, sich von der Muttersubstanz

$$C_6H_4 \begin{matrix} - CO \\ - CO \end{matrix} > NH \quad \text{oder} \quad C_6H_4 \begin{matrix} - CO \\ - \underset{\displaystyle NH}{\underset{\|}{C}} \end{matrix} < O$$

ableitet, ist für die Frage, welche uns hier beschäftigt, ohne Belang.

acidificirt und demnach durch Metalle und Radicale vertretbar geworden ist, kann nur durch die saure Natur der dem Methylen benachbarten Gruppen CO und C_6H_5 bewirkt sein. Es war daher anzunehmen, daß durch die Einführung noch eines weitern negativen Restes die Substituirbarkeit in der Methylengruppe des Desoxybenzoïns erhöht werden würde. Ich habe daher nicht daran gezweifelt, daß das Benzoïn $C_6H_5 - CO - CH(OH) - C_6H_5$ die Reactionsfähigkeit des Desoxybenzoïns theilen werde. Ja, da dasselbe eine Hydroxyl-Gruppe an Stelle von Wasserstoff im Desoxybenzoïn enthält, erwartete ich, daß bei der Alkylirung mit Leichtigkeit 2 organische Reste in dasselbe würde eingeführt werden können. Allein diese Annahme hat sich nicht bestätigt. Durch Behandlung mit Natriumathylat und Jodalkylen ließ sich das Benzoïn nicht in der gewünschten Weise substituiren, und auch als man, um eine Trübung der Reaction durch Mitwirkung der Hydroxyl-Gruppe auszuschließen, diese neutralisirte, indem man von dem leicht darstellbaren Acetyläther

$$C_6H_5 - CO - CH^* (OC_2H_3O) - C_6H_5$$

ausging, war die Substitution des [mit einem * bezeichneten] Wasserstoffatoms nicht zu erreichen. Ohne irgend welche Mitwirkung des Halogen-Alkyls wurde die Verbindung angegriffen, indem das anwesende Alkali resp. Natriumalkylat nur verseifend wirkte. Es wurde schließlich nur Benzoïn und die Producte, welche sich aus diesem unter dem Einflusse alkoholischen Alkalis bekanntermaßen bilden [Benzil u. s. w.] gewonnen.

Aus diesen unerwarteten Beobachtungen folgt, daß die Einführung einer weitern negativen Gruppe (der Hydroxyl-Gruppe) in das Desoxybenzoïn keineswegs in der erwarteten Weise die Acidität der Methylen-Wasserstoffatome erhöht, sondern daß sie dieselbe vielmehr völlig aufhebt.

Es ist dies ohne Frage die Folge des schon oben mitgetheilten Gesetzes, nach welchem die Ersetzung eines zweiten Methylen-Wasserstoff-Atoms im Desoxybenzoïn in der üblichen Weise nicht gelingt. Gleichviel, ob das zuerst eingetretene Radical ein indifferentes, wie Methyl, oder ein stark negatives, wie Hydroxyl, ist — die Substituirbarkeit hat nach der Ersetzung des Einen der beiden, anscheinend doch gleichwerthigen Wasserstoffatome ihre Grenze erreicht. —

Von großem Interesse erschien es hiernach, zu untersuchen, wie sich das Nitril der Mandelsäure verhalten werde, welches ja zum Benzycyanid genau in derselben Beziehung steht, wie das Benzoïn zum Desoxybenzoïn. Die Versuche mit diesem Kör-

per bieten aber Schwierigkeiten, da derselbe mit allzu großer Leichtigkeit in seine Componenten Benazldehyd und Blausäure zerlegt wird.

Aber noch eine andere Art, der Beantwortung der Frage näher zu kommen, ist dem Versuche zugänglich: man kann, um „secundäre" Analoga des Desoxybenzoïns und Benzylcyamids zu erhalten, von vorn-herein von diphenylirten Körpern ausgehen und so zu den Verbindungen

$$\begin{matrix} C_6H_5 \\ C_6H_5 \end{matrix} > CH^* - CO - C_6H_5 \text{ (Phenyl-Desoxybenzoïn)}$$

$$\begin{matrix} C_6H_5 \\ C_6H_5 \end{matrix} > CH^* - CN \text{ (Nitril der Diphenylessigsäure)}$$

gelangen; weiter wäre dann zu prüfen, ob die mit * bezeichneten Wasserstoffatome dieser Verbindungen durch Alkohol-Radicale substituirbar sind. Die Darstellung des erstgenannten Ketons und des Nitrils der Phenyl-Essigsäure sind zu diesem Zwecke in Angriff genommen und bei letzterem bereits durchgeführt. Das diphenylirte Acetonitril ist ein wohl characterisirter, krystallisirter Körper, welcher bei Einwirkung von Natrium-Alkoholat und Halogen-Alkylen leicht angegriffen wird. Das erhaltene Product, ebenfalls eine gut krystallisirende Verbindung, wird gegenwärtig untersucht.

Hier sei noch einer Versuchsreihe über die Reactionsfähigkeit homologer Desoxybenzoïne Erwähnung gethan. Nachdem sich gezeigt hatte, daß durch die Einführung schon einer Alkyl-Gruppe in die Methylen-Gruppe des Desoxybenzoïns und des Benzylcyanids die Reactionsfähigkeit dieser Körper aufgehoben wird, obwohl ja noch das zweite der beiden Methylen-Wasserstoffatome unsubstituirt vorhanden ist, schien es mir nothwendig, die Frage zu prüfen, ob die Einführung von Methyl in die Phenylgruppe derartiger Körper keinen Einfluß ausübe. Aus diesem Grunde wurde das nächste homologe des Benzylcyanids, die Verbindung

$$C_6H_4 \begin{matrix} - CH_3 \\ - CH_2 - CN \end{matrix}$$

auf ihre Reactionsfähigkeit geprüft und zwar wurden die Versuche auf die drei stellungsisomeren Modificationen dieser Verbindung ausgedehnt, um zu sehen, ob etwa der Eintritt einer Methyl-Gruppe an die Metastelle — wie sehr häufig beobachtet — einen anderen Einfluß üben werde, als die Einführung desselben Radicals an den Ortho- oder Para-Platz.

Es wurden daher die 3 isomeren Verbindungen, das Ortho-, Meta- und Para-Methyl-Benzylcyanid — ausgehend von den

3 Xylolen, welche in der Seitenkette monochlorirt und dann cyanirt wurden — dargestellt und der Einwirkung von Natriumäthylat und Benzylchlorid ausgesetzt. Es zeigte sich, daß sie alle mit derselben Leichtigkeit, wie das Benzylcyamid reagiren, wenn auch die Ausbeute an der Verbindung

$$C_6H_4 < \begin{matrix} CH_3 \\ CH - CN \\ | \\ C_7H_7 \end{matrix}$$

welche in den 3 isomeren Formen der Ortho-, Meta- und Para-Reihe erhalten und untersucht wurde, in den verschiedenen Reihen nicht die gleiche war. Auch die so erhaltenen Homologen des benzylirten Benzylcyanids lassen sich mit Leichtigkeit durch Verseifung in Säuren überführen. —

Es erübrigt noch, Versuche zu erwähnen, welche zur Prüfung der an dritter Stelle berührten Frage angestellt worden sind und welche entscheiden sollten, ob das Benzylcyanid und das Desoxybenzoïn auch gegenüber anderen Reagentien (wie salpetriger Säure, Diazobenzol u. s. w.) dem Nitroäthan und Acetessigäther analog reagiren würden. Die Versuche mit Diazoverbindungen zeigten, daß Reaction eintritt; die Isolirung der entstehenden Producte bietet aber Schwierigkeiten, welche in der geringen Beständigkeit derselben ihre Ursache haben. Anders die Einwirkung der salpetrigen Säure. Das Desoxybenzoïn wird durch diese leicht in die Isonitrosoverbindung

$$\begin{matrix} C_6H_5 - CO - C - C_6H_5 \\ \| \\ N - OH \end{matrix}$$

übergeführt, und ebenso verhält sich das Benzylcyanid, welches bei gleicher Behandlung eine schön krystallisirende Verbindung von der Formel:

$$\begin{matrix} C_6H_5 - C - CN \\ \| \\ N - OH \end{matrix}$$

liefert. Diese wirkt, wie bei der Anhäufung saurer Gruppen in ihrem Molecül nicht zu verwundern, wie eine ausgesprochene Säure, und es konnten daher auch die Salze derselben dargestellt und des Näheren untersucht werden.

In Vorstehendem sind die unsern Gegenstand betreffenden Untersuchungen, welche im letzten Semester im hiesigen Laboratorium in Angriff genommen und zum Theil schon beendet sind, ihren Umrissen nach skizzirt.

Außer dem Verfasser dieser Mittheilung haben sich an denselben die Herrn Hausskuecht, Knövenagel, Alexander Meyer, Neure, Oelkers, Päpcke, Rattner, Schneidewind und Seliwanoff betheiligt. Eine ausführliche Publication der erlangten Resultate, sowie die Beschreibung der zahlreichen neuen Verbindungen, welche zur Festellung der Ergebnisse dargestellt werden mußten, beabsichtige ich zu verschieben, bis ein abschließendes Gesammtergebniß und ein vollkommener Ueberblick über die Weite des Gebiets erzielt sein wird.

Göttingen, Universitäts-Laboratorium.

Weitere Beobachtungen über die Haltbarkeit antiseptischer Sublimatlösungen.

Von

Victor Meyer.

Vor einiger Zeit machte ich in diesen „Nachrichten"[1]) über Versuche Mittheilung, die ich angestellt habe, um über die Conservirung antiseptischer Sublimatlösungen mittelst Kochsalzes, welche von Angerer empfohlen worden ist, aus eigener Anschauung ein Urtheil zu gewinnen. Veranlaßt waren meine Versuche durch die hohe Wichtigkeit, welche der Frage von Seiten hervorragender chirurgischer Autoritäten beigelegt wurde, und welche ihr ohne Zweifel vor allem für die Kriegschirurgie in erheblichen Maße aber auch für die Praxis der Spitäler zukommt. —

Meine Versuche hatten ergeben, bezw. bestätigt, daß Sublimatlösungen in destilirtem Wasser sich sowohl in offenen wie verschlossenen Gefäßen sehr lange unverändert halten, während solche Lösungen die mit Brunnenwasser [dem sehr harten Wasser der städtischen Wasserleitung in Göttingen] hergestellt waren, sich bald unter Abscheidung weißer pulvriger oder auch schwarzer krystallinischer Niederschläge zersetzten. —

Waren die Gefäße hermetisch verschlossen, so war die Zersetzung eine geringe, langsam fortschreitende, welche durch Zusatz von Kochsalz nachweisbar, aber in sehr geringem Grade verlang samt werden konnte. In offnen oder fest mit Filtrirpapier verbundenen Gefäßen zersetzte sich die Lösuug rasch und in sehr bedeutendem Maße, so daß, bei genügend langem Stehen, der größte

1) Diese Nachrichten, 1887, p. 241.

Theil des Quecksilbers, ja mit der Zeit vielleicht sämmmtliches, unlöslich niedergeschlagen wird. Diese Zersetzung bleibt noch immer eine erhebliche, wenn Kochsalz zugesetzt wird, aber sie tritt dann doch in viel geringerem Umpfange ein, als ohne dies Mittel; aufgehoben werden konnte sie — bei Anwendung offener oder mit Filtrirpapier fest verbundener Gefäße — in keinem Falle, selbst als die zugesetzte Kochsalzmenge auf das 2-, 3- und 4fache der von Angerer empfohlenen erhöht wurde.

Im Laufe dieser Versuche, bei welchen ich monatelang fast täglich eine große Anzahl von verschieden präparirten Sublimatproben zu beobachten Gelegenheit hatte, drängte sich mir die Ueberzeugung auf, daß der Zusatz von Kochsalz, wenn auch ohne Frage von einem gewissen Einflusse, doch eine bei weitem geringere Wirkung auf die Haltbarkeit der Lösungen ausübte, als die Art der Aufbewahrung. Guter luftdichter Verschluß wirkte in viel höherem Maße conservirend als der Zusatz selbst großer Mengen ven Kochsalz; auffallen mußte mir ferner die von vornherein nicht zu erwartende Thatsache, daß der Staub der Luft bei der Zersetzung der Lösung keine sehr erhebliche Rolle spielt; denn sonst hätte die Zersetzung in den Gefäßen, welche mit Filtrirpapier verschlossen waren, nicht in so beträchtlichem Maße eintreten könnnen. Die Gefäße waren Erlenmeyer'sche Kolben, deren Hals mit Filtrirpapier verschlossen war, welches mittelst Drahtligaturen fest an die Hälse der Kolben angeschlossen war. — Alle diese Beobachtungen führten mich auf den Gedanken, auch die Wirkung des Lichts auf die Lösung zu untersuchen. Ich hatte bisher die Kolben vor dem directen Sonnenlichte geschützt, da die Versuche in einem nach Norden gelegenen Zimmer angestellt wurden. Aber dem diffusen Tageslichte waren dieselben ausgesetzt gewesen. Nunmehr stellte ich eine neue Versuchsreihe an, bei welcher gleich zusammengesetzte Lösungen einerseits dem diffusen Tageslichte ausgesetzt, andrerseits im Dunkeln aufbewahrt waren. Das Ergebniß dieser Versuche war, daß $^{1}/_{10}$ procentige Auflösungen von Sublimat in Göttinger Leitungswasser, wenn sie ohne jeden Kochsalzzusatz in gut mit eingeriebenen Glasstöpseln verschlossenen Flaschen und im *Dunkeln* aufbewahrt werden, selbst im Laufe von 2 Monaten keinen Niederschlag abschieden und nicht die geringste Zersetzung erkennen ließen.

Ich übergehe die Einzelheiten dieser Beobachtungsreihe, da sie gegenüber dem mitgeteilten Endresultate kein Interesse bean-

sprachen. Ich habe selbstverständlich auch bei dieser Versuchsreihe Kochsalzzusätze von verschiedener Größe gemacht, allein dieselben hatten auf das Ergebniß natürlich keinen Einfluß, da schon ohne jeden Kochsalzzusatz die Zersetzung völlig ausblieb.

Die bei den Parallelversuchen hergestellten, ganz gleich zusammengesetzten und am gleichen Tage angesetzten Sublimatlösungen wurden wiederum und zwar im gleichen Zimmer wie die Dunkelflaschen hermetisch verschlossen, dem diffusen Tageslichte ausgesetzt und zeigten, wie nicht anders zu erwarten, Zersetzung etwa in demselben Umfange, wie bei meinen früheren Versuchen angegeben. Wiederum schieden sich aus ihnen die weißflockigen neben den schwarzen krystallinischen Niederschlägen der Quecksilberoxychloride aus, während die im Dunkeln aufbewahrten Flaschen klar blieben.

Ich füge noch hinzu, daß das Aufbewahren im Dunkeln nicht einmal mit minutiösester Sorgfalt geschah. Gut verschlossene Gefäße [Standflaschen mit eingeriebenen Stöpseln] standen in einem zugeschlossenen hölzernen Schranke, dessen Schlüsselloch mit einem Streifen gummirten Papieres zugeklebt war. Sie wurden aber öfters einige Secunden beleuchtet, da ich bei den sehr häufigen Beobachtungen ihres Inhaltes sie aus dem Schranke nahm und bei ungehindertem Zutritte des diffusen Tageslichtes kurze Zeit betrachtete. Auch befanden sie sich in einem gewöhnlichen Schranke, dessen Wände weder geschwärzt, noch auf etwa vorhandene Fugen u. s. w. besonders untersucht waren.

Nachdem die Lösungen, wie gesagt, länger als zwei Monate unzersetzt aufbewahrt u. beobachtet worden waren, habe ich dieselben noch während der Herbstferien-Monate ohne weitere Beobachtung im Dunkel stehen gelassen. Ich habe jetzt, nachdem sie nunmehr über 5 Monate gestanden, geringfügige Trübungen in ihnen gefunden, die aber immer noch viel geringer sind, als sie beim Aufbewahren in diffusem Tageslichte, selbst bei Zusatz von sehr großen Kochsalzmengen, ausfallen. Ich lasse es dahin gestellt, ob diese erst nach mehr als zwei Monaten beginnende Zersetzung etwa eine Folge der erwähnten zeitweisen Beleuchtung ist und halte es für möglich, daß die Lösungen, wenn sie in absoluter Dunkelheit aufbewahrt und niemals aus ihr genommen worden worden wären, überhaupt niemals Zersetzung erlitten hätt. Indessen von irgend welchem practischen Interesse ist diese Frage nicht. **Für den Arzt** genügt es vollkommen, daß die Lösungen sich **volle 2 Monat absolut unzersetzt** halten; ja selbst ein so langer Zeitraum kommt für die Praxis nicht in Betracht. Nach den mir von

ärztlicher Seite gemachten Mittheilungen erfordert das Bedürfniß der Spitäler ein Aufbewahren der Lösung von höchstens 2—3 Wochen. Ebenso ist es, vom practisch-medicinischen Gesichtspunkte, ohne Belang, ob eine noch sorgfältigere Verdunkelung die Zersetzung für alle Zeit aufhebt. Denn der Arzt muß die Gefäße, ebenso wie sich es bei meinen Beobachtungen that, von Zeit zu Zeit vor dem Gebrauche dem Tageslichte aussetzen, und ein absoluter Ausschluß des Lichts ist daher in der Praxis unmöglich. Die Bedingungen meiner Versuche dürften aber gerade dasjenige Maß von Schutz gegen Licht und Luft bieten, welches den Lösungen auch in der Spitalpraxis ohne alle Schwierigkeit geboten werden kann.

Obwohl der Arzt für seine Lösungen natürlich, wenn ihm kein destillirtes Wasser zu Gebote steht, immer ein möglichst gutes Brunnen- oder Leitungswasser wählen wird, so habe ich doch zu meiner Belehrung noch einige Dunkel-Versuche mit dem in meiner ersten Abhandlung besprochenen filtrirten Teichwasser und dem Wasser aus einem notorisch schlechten Brunnen, das reich an organischen Substanzen ist, angestellt. Diese Wasser, die ich ebenfalls zur Herstellung $^1/_{10}$procentiger Sublimatlösungen verwandte und mit welchen ich unter Zusatz variirender Mengen Kochsalz, zahlreiche Beobachtungen angestellt hatte, zeigten damals eine massenhafte Ausscheidung unlöslicher Niederschläge. In gut verschlossenen Gefäßen und im Dunkeln aufbewahrt, erzeugten dagegen auch die mit ihnen hergestellten Sublimatlösungen [ohne Kochsalzzusatz] nach 2 monatlichem Stehen nur ganz geringfügige, unwägbare Trübungen; immerhin blieb ihre Haltbarkeit hinter derjenigen der Lösungen, die mit Leitungswasser hergestellt waren, ein wenig zurück.

Mit anderem, als dem Wasser der Göttinger Leitung habe ich nicht gearbeitet, abgesehen von den Versuchen mit den beiden, als hygienisch schlecht bekannten Wassern. Von Interesse wäre es immerhin, auch Trinkwasser von andern Härtegraden zu prüfen; doch sind die Versuche mit Göttinger Wasser wie ich glaube in besonderem Maße beweisend, da das Göttinger Wasser durch eine ungewöhnlich hohe Härte ausgezeichnet ist.

Wenn sich, wie nicht zu bezweifeln, das am Göttinger Leitungswasser Beobachtete auch an andern Trinkwassern bestätigt, so wird, wie ich glaube, in Zukunft da, wo destillirtes Wasser nicht zugänglich ist, ohne Bedenken Brunnenwasser zur Herstellung antiseptischer Sublimatlösungen angewandt werden dürfen, welche, ohne jeden Zusatz von Kochsalz oder andern conservirenden Mitteln, während einiger Monate unverändert bleiben, wenn sie in gut verschlossenen Gefäßen und bei möglichst vollständigem Abschlusse des Lichts aufbewahrt werden. —

Göttingen, Universitäts-Laboratorium.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Juli, August, September und Oktober 1887.

Sitzungsberichte d. K. Pr. Akademie d. Wissensch. zu Berlin. N. XIX—XXXIX. 14. April—28. Juli 1887.
Akademie zu München:
- a. Sitzungsberichte d. mathem.-physikalischen Classe. Heft I. 1887.
- b. Sitzungsberichte d. philos.-philol. u. historischen Classe. Heft. II. 1887.
- c. Abhandlungen d. mathem.-physikalischen Classe. 15 B. III. Abth.
- d. Abhandlungen d. mathem.-physikalischen Classe. 16 B. I. Abth.
- e. Gedächtnißrede auf Leopold von Ranke v. W. v. Giesebrecht.
- f. Gedächtnißrede auf Joseph von Fraunhofer v. Bauernfeind.
- g. Gedächtnißrede auf Carl Theodor v. Siebold v. R. Hertwig.

Gesellsch. d. Wissensch. in Leipzig:
- a. Berichte der Verhandlungen d. philol.-historischen Classe. I, II, III. 1887.
- b. Abhandlungen d. mathematisch-physischen Classe, d. XIV. Bds N. 1. 2. 3. 4.
- c. Abhandlungen d. philologisch-historischen Classe, d. X. Bandes N. V. VI.

Jahresbericht der Fürstl. Jablonowski'schen Gesellschaft. April 1887.
Sitzungsberichte der naturforschenden Gesellsch. in Leipzig. 8. Jahrg. 1881.
Mittheilungen d. Geschichts- u. Alterthumforschenden Gesellschaft des Osterlandes. Band IX. Hft. 2. 3. 4.
Jahrbücher d. K. Akademie gemeinnütziger Wissensch. zu Erfurt. Neue Folge. Heft XV.
Mittheilungen aus dem naturwissensch. Verein für Neu-Vorpommern und Rügen i. Greifswald. Achtzehnter Jahrg. 1886.
Jahresbericht u. Abhandl. d. naturwissensch. Vereins zu Magdeburg. 1886.
Verhandlungen d. physikalisch-medizinischen Gesellsch. zu Würzburg. Neue Folge. XX. Band.
Einundsiebenzigster Jahresbericht der naturforschenden Gesellschaft in Emden. 1885/86.
Neues Lausitzisches Magazin. Band 63. Heft 1.
56 u. 57. Jahresbericht des Vogtländischen Alterthumsforschenden Vereins zu Hohenleben u. 8., 9. u. 10. Jahresber. des Geschichts und alterthumsforsch. Vereins zu Schleiz.

Bericht der Wetterauischen Ges. für die gesammte Naturkunde zu Hanau vom 1. Apr. 1885—31. März 1887.
Jahresbericht des physikalischen Vereins zu Frankfurt a. M. 1885—1886.
21, 22, 23. Bericht der Philomathie in Neiße vom Sept. 1879 -Oktober 1886.
Leopoldina. 11—18.
Fünfundzwanzigster Bericht der Oberhessischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.
Mittheilungen des Alterthumsvereins f. Zwickau u. Umgegend. Heft 1. Juli 1887.
Vierundsechzigster Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. 1886.
Zacharias Alberts Tagebuch aus d. Jahre 1627. Ergänzungshft z. 64. Jahresber.
Zeitschrift der deutschen Morgenländischen Gesellsch. 41. Band. Heft 1 u. 2.
Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Jahrg. 22. Heft 2 u. 3.
Zeitschrift für Naturwissenschaften im Auftr. d. naturw. Vereins für Sachsen u. Thüringen. Band LX. Folge 4. Band 6. Heft 1 u. 2.
Acta mathematica 10 : 2. 10 : 3.
Veröffentlichung des K. Preuß. geodätischen Instituts. Astronomisch-geodätische Arbeiten I. Ordnung. Telegraphische Längenbestimmungen in den Jahren 1885 u. 1886 u. Jahresbericht 1886/87.
Verhandlungen der in Berlin abgehaltenen 8. allgemeinen Conferenz der Internationalen Erdmessung u. deren permanenten Commission.
Einige geologische Wahrnehmungen in Griechenland v. G. vom Rath.
Als Willkommgruß z. Versammlung der deutschen geologischen Gesellsch. in Bonn überr. v. G. vom Rath.
Programm d. 60. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Wiesbaden.
Festschrift zur Feier des LXX. Geburtstages des H. Geh. Rat Prof. Dr. Albert von Kölliker (überr. von der medizinischen Fakultät in Würzburg).
Kölliker: Ueber Golgi's Untersuchungen den feineren Bau des centralen Nervensystems betreffend.
Stammreihe und Fehde des freifränkischen Geschlechtes Eberstein v. L. F. Freiherr von Eberstein. (4 Exempl.)
Urkundliche Nachträge. Fünfte Folge (1 Exempl.) Sechste Folge v. L. F. Freiherr von Eberstein. (4 Exemplare.)
Meteorologische Zeitschrift. Vierter Jahrg. 1887. Heft 7—10.
Verhandlungen d. K. K. zoologisch-botanischen Gesellsch. in Wien. Bd. XXXVII. I. Quartalausg. Ende März 1887. II. Quartalausg. Ende Juni 1887.
Mittheilungen des Vereins der Aerzte in Steiermark. XXIII. Vereinsjahr 1886.
Mittheilungen des historischen Vereins in Steiermark. Heft XXXV. 1887.
Beiträge zur Kunde steiermärkischer Geschichtsquellen. Jahrg. 23. 1887.
Magnetische u. meteorologische Beobachtungen an der K. K. Sternwarte zu Prag i. J. 1886.
Jahresbericht d. Kgl. Ung. Geologischen Anstalt für 1885.
Mittheilungen d. Kön. Ung. Geologischen Anstalt. Band VII. Heft 6. Band VIII. Heft 5.
Zeitschrift der Ung. geolog. Gesellsch. Band XVII. Heft 1—6.
Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. Jahrgang XXV. N. 1—4.
Königl. böhmische Gesellsch. der Wissensch. in Prag:
- a. Sitzungsberichte 1885. 1886. mathem.-naturwissensch. Classe.
- b. Sitzungsberichte 1885. 1886. philos.-philol.-histor. Classe.
- c. Jahresberichte 1885. 1886.
- d. Abhandlungen d. histor.-philos.-philolog. Classe. Folge 7. B. 1.
- e. Abhandlungen d. mathematisch-naturwissensch. Classe. Folge 7. B. 1.

Jahrbuch für Schweizerische Geschichte. Band XII.
Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellsch. in Zürich. Band 32. Heft 1.
Monthly notices of the R. Astronomical society. Vol. XLVII. N. 8. 9.
Proceedings of the London Mathematical Society. N. 291—294, 295—300.
Journal of the R. Microscopical Society 1887. Part 4, 5.
Proceedings of the scientific meetings of the Zoological society of London. 1887. Part 1, 2.

Proceedings of the Royal Society. Vol. XLII. N. 256, 257. Vol. XLIII, N. 258.
Nature 922—939.
Linneau Society of London:
a. Proceedings from Nov. 1883 to—June 1886, from Nro 1886 to June 1887.
b. Journal Botany. Vol. XXII. N. 145—149. Vol. XXIII. N. 151. Vol. XXIV 158.
c. Journal Zoology. Vol. XIX. N. 114, 115. Vol. XX. 116, 117. Vol. XXI. 126, 127, 128, 129.
d. List of the society. Session 1886—1887.
e. The transactions. 2. serie. Botany. Vol. II. Part 9—14.
f. The transactions. 2. serie. Zoology. Vol. IV. Part 1, 2.
Philosophical transactions of the R. Society of London. Vol. 176. Part. 1, 2. 1885. Vol. 177. Part. 1, 2. 1887.
b. The Royal Society. 30 Nov. 1886.
c. Philosophical transactions. Vol. 178 A. pp. 45—56.
d. Philosophical transactions. Vol. 166 pt. 2.
Transactions and proceedings and report of the Royal Society of South Australia. Vol. IX for 1885—6.
Transactions and proceedings of the R. Society of Victoria. Vol. XXII. XXIII.
G. T. Survey of India. Vol. IVa. Principal triangulation N.—W. Quadrilateral.
a. Commission geologique du Canada. Vol. 1. 1885.
b. Mappes etc. accompagnant le rapport annuel pour 1885.
c. Geological Survey of Canada, to acc. ann. rep. 1885.
a. Catalogue of the remains of Siwalik Vertebrata in the Indian Museum Calcutta. Part I Mammalia.
b. Catalogue of the remains of Siwalik Vertebrata in the Indian Museum Calcutta. Part II. Aves, Rept. etc.
c. Catalogue of the remains of Siwalik Vertebrata. Pleistocene and Pre-historic Vertebrata.
Australian Museum 1887. Second session. New South Wales.
Atti della Reale Accademia dei lincei Anno 1887.
a. Rendiconti. Vol. III. Fasc. 1. 2. 3. II. semestre.
Rendiconti. Vol. III. Fasc. 10. 11, 12, 13. I. semestre.
b. Classe di scienze morali storiche e filologiche. Vol. II. Parte 2. dal Gennaio al Dicembre 1886.
c. Indice topografico per l'anno 1886.
Bullettino di bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche. Tomo XIX dall' Agosto al Dicembre. Tomo XX. Gen. Febbraio.
a. Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. XXII. Disp. 14a, 15a. 1886—87.
b. Bollettino dell' osservatorio della R. Università di Torino. Anno XXI. 1886.
Atti della Società Toscana di scienze naturali:
a. Memorie. Vol. VIII. fasc. 2.
b. Processi verbali. Vol. V. p. 227—304.
Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere Rendiconti. Serie II. Vol. XIX.
a. Memorie della Regia Accademia di sc. l. ed arti in Modena. Serie II. Vol. IV.
b. Memorie della Regia Accademia di sc. l. ed arti in Modena. Serie I. Tomo XX. Parte III coll' indice della Se. I.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg - Augusts - Universität

zu Göttingen.

30. November. **№ 19.** 1887.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Bestimmung der Elasticitätsconstanten von Topas und Baryt.

Von **W. Voigt.**

Formeln für das rhombische System.

Die Elasticitätsconstanten c_{hk} für das rhombische System definiren wir durch das folgende System Formeln, welches sich auf die Hauptaxen der Krystalle bezieht:

$$\begin{aligned} -X_x &= c_{11}x_x + c_{12}y_y + c_{13}z_z \\ -Y_y &= c_{21}x_x + c_{22}y_y + c_{23}z_z \\ -Z_z &= c_{31}x_x + c_{32}y_y + c_{33}z_z \\ -Y_z &= c_{44}y_z, \quad -Z_x = c_{55}z_x, \quad -X_y = c_{66}x_y; \end{aligned} \qquad 1)$$

hierin ist $c_{hk} = c_{kh}$.

Bezeichnet man mit

$$S = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{vmatrix} \qquad 2)$$

die Determinante des Systems der neun Coefficienten c_{hk} und mit S_{hk} den Coefficienten des $h$ten Elementes der $k$ten Reihe dieser Determinante, so drücken sich die Biegungen und Drillungen prismatischer Stäbe durch die Verhältnisse

$$S_{hk}/S = s_{hk} \tag{3}$$

aus, deren Anzahl wegen der Relation $s_{hk} = s_{kh}$ im Allgemeinen 21 beträgt.

Für das rhombische System verschwinden von diesen Verhältnissen 12 und bleiben nur die neun folgenden übrig:

$$s_{11}, \; s_{22}, \; s_{33}, \; s_{44}, \; s_{55}, \; s_{66}, \; s_{23}, \; s_{31}, \; s_{12}.$$

Die Biegung η eines prismatischen Stabes ist gegeben durch die Formel

$$\eta = \frac{\mathrm{E}PL^3}{4BD^3} \tag{4}$$

worin L die Länge, B die Breite, D die Dicke des Prismas, P die Belastung und E den Coefficienten der linearen Dilatation, (das Reciproke des sogenannten Elasticitätscoefficienten E der passender Biegungs- oder Dehnungswiderstand genannt würde), bezeichnet, der sich durch die s_{hk} folgendermassen ausdrückt. Es ist, falls α, β, γ die Richtungscosinus der Längsrichtung des Prismas bezeichnen:

$$\begin{aligned} \mathrm{E} = 1/E = {} & s_{11}\alpha^4 + s_{22}\beta^4 + s_{33}\gamma^4 \\ & + (s_{44} + 2s_{23})\beta^2\gamma^2 + (s_{55} + 2s_{31})\gamma^2\alpha^2 + (s_{66} + 2s_{12})\alpha^2\beta^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Nach diesem Werthe ist es möglich, durch Biegungsbeobachtungen sechs Aggregate der neun s_{hk} oder der neun Elasticitätsconstanten c_{hk} zu bestimmen. Wir bezeichnen diejenigen Stäbchen, welche mit ihren Längsaxen in die Richtungen der drei Krystallaxen fallen, mit I, II, III; ihre Beobachtung ergiebt die Größen von

$$\mathrm{E}_{I} = s_{11}, \quad \mathrm{E}_{II} = s_{22}, \quad \mathrm{E}_{III} = s_{33}. \tag{6}$$

Von den Aggregaten $(s_{44} + 2s_{23})$ etc. bleibt in (5) je eines übrig, wenn die Längsaxe des Stäbchens in eine Hauptebene fällt; die Stäbchen, welche so in der YZ-, ZX-, XY-Ebene liegen, seien mit IV, V, VI bezeichnet; ihre Beobachtung giebt:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_{IV} &= s_{22}\beta^4 + s_{33}\gamma^4 + (s_{44} + 2s_{23})\beta^2\gamma^2, \\ \mathrm{E}_{V} &= s_{33}\gamma^4 + s_{11}\alpha^4 + (s_{55} + 2s_{31})\gamma^2\alpha^2, \\ \mathrm{E}_{VI} &= s_{11}\alpha^4 + s_{22}\beta^4 + (s_{66} + 2s_{12})\alpha^2\beta^2. \end{aligned} \tag{7}$$

Schließt die Längsaxe mit den beiden bezüglichen Krystallaxen die Winkel $\pi/4$ ein, so wird am einfachsten

$$4E_{IV} = s_{22} + s_{33} + s_{44} + 2s_{23} \text{ u. s. f.}$$

oder in Rücksicht auf (6) 8)

$$4E_{IV} - (E_{II} + E_{III}) = s_{44} + 2s_{23}.$$

Um die drei noch fehlenden Aggregate der s_{hk} zu bestimmen genügt es, drei Gattungen von Torsionsbeobachtungen vorzunehmen. Es empfiehlt sich vor allen andern die Drillung von Stäbchen, deren Längs-, Dicken- und Breitenrichtung in Krystallaxen liegen, weil für diesen Fall die Theorie völlig streng durchführbar ist. Die hier möglichen sechs verschiedenen Orientirungen führen auf die Bestimmung nur dreier Aggregate, nämlich dreier specieller Werthe des allgemeinen Drillungscoefficienten T, des Reciproken des sonst gebräuchlichen Factors T, (des Drillungswiderstandes) der für rhombische Krystalle die Gestalt annimmt:

$$\begin{aligned} T = {} & 4(s_{11}\alpha^2\alpha_1^2 + s_{22}\beta^2\beta_1^2 + s_{33}\gamma^2\gamma_1^2) \\ & + 2[(s_{44} + 4s_{23})\beta\beta_1\gamma\gamma_1 + (s_{55} + 4s_{13})\gamma\gamma_1\alpha\alpha_1 + (s_{66} + 4s_{12})\alpha\alpha_1\beta\beta_1] \\ & + s_{44}(\beta^2\gamma_1^2 + \gamma^2\beta_1^2) + s_{55}(\gamma^2\alpha_1^2 + \alpha^2\gamma_1^2) + s_{66}(\alpha^2\beta_1^2 + \beta^2\alpha_1^2); \end{aligned} \qquad 9)$$

darin bezeichnen α, β, γ wie vorhin die Richtungscosinus der Längsrichtung, aber α_1, β_1, γ_1 diejenigen der größeren Querdimension.

Die angedeuteten sechs Orientirungen der Stäbchen seien nun so bezeichnet, daß zu dem Index I, II, III, welcher die Lage der Längsaxe in der I., II., oder III. Krystallaxe andeutet, die Indices a, b, c hinzugefügt werden entsprechend der Richtung der Breite des Stäbchens; z. B. hat also das Prisma IIIa die Längsaxe parallel der dritten, die Breite parallel der ersten Krystallaxe.

Die speciellen Werthe des Drillungscoefficienten für die sechs speciellen Orientirungen sind:

$$T_{IIc} = T_{IIIb} = s_{44}, \quad T_{IIIa} = T_{Ic} = s_{55}, \quad T_{Ib} = T_{IIa} = s_{66}, \qquad 10)$$

entsprechend dem allgemeinen Satze, daß der Werth von T sich bei der Vertauschung der Richtungen von Länge und Breite nicht ändert.

Die Drillung eines jeden der genannten Stäbchen hängt von den beiden Coefficienten T ab, welche den seiner Längsrichtung entsprechenden Zahlenindex haben; z. B. ist für die Gattung (II_c) der Drillungswinkel τ:

$$\tau_{IIc} = \frac{3\,T_{IIc}LN}{BD^3\left(1 - \frac{3}{16}\lambda\frac{D}{B}\sqrt{\frac{T_{IIa}}{T_{IIc}}}\right)},$$

hingegen für (II_a):

$$\tau_{IIa} = \frac{3\mathrm{T}_{IIa} LN}{BD^3\left(1 - \frac{3}{16}\lambda\frac{D}{B}\sqrt{\frac{\mathrm{T}_{IIe}}{\mathrm{T}_{IIa}}}\right)}, \tag{11}$$

und ebenso für die vier übrigen.

In diesen Formeln haben die Buchstaben L, B, D die frühere Bedeutung, N ist das um die Längsaxe ausgeübte Drehungsmoment, λ eine Function von D/B, welche für Werthe desselben kleiner als 1/3 merklich constant gleich $= 3{,}361$ ist.

Da das Verhältniß D/B eine kleine Größe ist, so ist das zweite Glied des Nenners von nur geringem Einfluß und für die Berechnung der Coefficienten T genügt es, zunächst Näherungswerthe zu bilden, indem man jenes Glied gleich Null oder besser, da die T voraussichtlich nicht sehr stark differiren werden, gleich $3\lambda D/16B$ nimmt, und mit den so erhaltenen dann die definitive Berechnung desselben auszuführen.

Ist das benutzte Stäbchen nicht streng prismatisch, so ist in die Torsionsformeln (11) für den Werth B und D einfach das arithmetische Mittel der beobachteten Dimensionen auf dem in Betracht kommenden Stück zu setzen, da bei der Drillung alle Querschnitte gleich viel in Anspruch genommen sind. In der Biegungsformel (4) läßt sich dies nur für die wenig variirende Breite B thun; die Dicke D, welche in $(n+1)$ gleichweit von einander entfernten Querschnitten gemessen ist, entspricht stets sehr nahe dem Gesetz

$$D = D_0 \pm \alpha\delta_1 + \alpha^2\delta_2, \quad \alpha = 0, 1, 2, \ldots;$$

die in Rechnung zu ziehende Dicke ist dann gegeben durch

$$(D) = D_0 + \frac{n^2}{hs}\left(\delta_2 - \frac{2\delta_1^2}{D_0}\right). \tag{12}$$

Aus den neun, nach dem Obigen durch die Biegungs- und Drillungsbeobachtungen zu findenden Determinantenverhältnissen s_{hk} bestimmen sich die neun Elasticitätsconstanten c_{hk} durch die Formeln:

$$\begin{aligned}
c_{11}s_{11} + c_{12}s_{12} + c_{13}s_{13} &= 1\\
c_{21}s_{21} + c_{22}s_{22} + c_{23}s_{23} &= 1\\
c_{31}s_{31} + c_{32}s_{32} + c_{33}s_{33} &= 1\\
c_{21}s_{31} + c_{22}s_{32} + c_{23}s_{33} &= 0\\
c_{31}s_{11} + c_{32}s_{12} + c_{33}s_{13} &= 0\\
c_{11}s_{21} + c_{12}s_{22} + c_{13}s_{23} &= 0\\
c_{44}s_{44} = 1, \quad c_{55}s_{55} = 1, \quad c_{66}s_{66} &= 1.
\end{aligned} \tag{13}$$

Hieraus findet sich, falls man setzt:

$$\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{vmatrix} = \sigma, \quad \text{das System Werthe:}$$

$$c_{11} = \frac{1}{\sigma}\begin{vmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{32} & s_{33} \end{vmatrix}, \quad c_{22} = \frac{1}{\sigma}\begin{vmatrix} s_{33} & s_{31} \\ s_{13} & s_{11} \end{vmatrix}, \quad c_{33} = \frac{1}{\sigma}\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix}, \qquad 14)$$

$$c_{23} = \frac{1}{\sigma}\begin{vmatrix} s_{31} & s_{32} \\ s_{11} & s_{12} \end{vmatrix}, \quad c_{31} = \frac{1}{\sigma}\begin{vmatrix} s_{12} & s_{13} \\ s_{22} & s_{23} \end{vmatrix}, \quad c_{12} = \frac{1}{\sigma}\begin{vmatrix} s_{23} & s_{21} \\ s_{33} & s_{31} \end{vmatrix}$$

$$c_{44} = 1/s_{44}, \quad c_{55} = 1/s_{55}, \quad c_{66} = 1/s_{66}.$$

Diese neun Constanten werden von einander abhängig, wenn die Moleküle des Krystalles keine Polarität besitzen, ihre Wechselwirkungen also nur Functionen der Entfernungen sind; in diesem Falle ist nämlich:

$$c_{44} = c_{23}, \quad c_{55} = c_{31}, \quad c_{66} = c_{12}. \qquad 15)$$

Die Resultate der Beobachtung gestatten zu beurtheilen, ob die erwähnte Hypothese für eine bestimmte Substanz zulässig ist.

Da die Constanten c_{hk} aus den nahezu direct gefundenen s_{hk} sich erst durch complicirte Rechnungen bestimmen, werden sie relativ ungenauer sein als diese. Für die Bestimmung der Größe der elastischen Deformationen kommen aber ausschließlich jene s_{hk} in Betracht und besitzen demnach die größere praktische Wichtigkeit.

Beispielsweise wird ein beliebiges Stück eines rhombischen Krystalles, welches einem allseitig gleichen Druck p ausgesetzt wird, parallel den Hauptaxen lineäre Dilatationen x_x, y_y, z_z erfahren, die gegeben sind durch:

$$\begin{aligned} x_x &= -p(s_{11} + s_{12} + s_{13}), \\ y_y &= -p(s_{21} + s_{22} + s_{23}), \\ z_z &= -p(s_{31} + s_{32} + s_{33}); \end{aligned}$$

die Coefficienten der lineären Dilatation sind also:

$$A_a = s_{11} + s_{12} + s_{13}, \quad A_b = s_{21} + s_{22} + s_{23}, \quad A_c = s_{31} + s_{32} + s_{33}, \qquad 16)$$

der Coefficient der cubischen Dilatation (identisch mit dem reciproken sogenannten Elasticitätsmodul) aber wird:

$$M = (s_{11} + s_{22} + s_{33}) + 2(s_{23} + s_{31} + s_{12}). \qquad 17)$$

Zwei Ebenen innerhalb oder außen an dem Krystall, deren Normalen durch die Richtungscosinus α_1, β_1, γ_1 und α_2, β_2, γ_2 definirt sind und den Winkel χ einschließen, werden bei allseitig

gleichem Druck gedreht, so daß der Winkel χ einen Zuwachs $\delta\chi$ erfährt, der gegeben ist durch:

$$\begin{aligned} \sin\chi\,.\,\delta\chi = -p\,\{&(s_{11}+s_{12}+s_{13})[2\alpha_1\alpha_2-(\alpha_1^2+\alpha_2^2)\cos\chi] \\ 18)\qquad &+(s_{21}+s_{22}+s_{23})[2\beta_1\beta_2-(\beta_1^2+\beta_2^2)\cos\chi] \\ &+(s_{31}+s_{32}+s_{33})[2\gamma_1\gamma_2-(\gamma_1^2+\gamma_2^2)\cos\chi]\}, \end{aligned}$$

wobei $\cos\chi = \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2$.

Hierdurch bestimmen sich die Winkeländerungen, die ein rhombischer Krystall durch allseitig gleichen Druck erfährt.

Ein mit seinen Flächen zu den Hauptaxen a, b, c oder X, Y, Z normales Prisma wird unter der Wirkung von Drucken p_a, p_b, p_c auf die zu a, b, c normalen Flächenpaare Deformationen erleiden, die gegeben sind durch

$$19)\qquad \begin{aligned} x_x &= -(p_a s_{11}+p_b s_{12}+p_c s_{13}), \\ y_y &= -(p_a s_{21}+p_b s_{22}+p_c s_{23}), \\ z_z &= -(p_a s_{31}+p_b s_{32}+p_c s_{33}), \\ y_z &= z_x = x_y = 0; \end{aligned}$$

die Erwärmung eines beliebigen Stückes eines rhombischen Krystalles um ϑ Grad ergiebt

$$20)\qquad \begin{aligned} x_x &= \vartheta(q_a s_{11}+q_b s_{12}+q_c s_{13}), \\ y_y &= \vartheta(q_a s_{21}+q_b s_{22}+q_c s_{23}), \\ z_z &= \vartheta(q_a s_{31}+q_b s_{32}+q_c s_{33}), \\ y_z &= z_x = x_y = 0, \end{aligned}$$

worin q_a, q_b, q_c das Maaß der Wärmeabstoßung parallel je einer Hauptaxe bezeichnet. Bei einem wie gesagt prismatischen Stück läßt sich hiernach die Wirkung der Erwärmung durch drei passend gewählte Drucke p_a, p_b, p_c aufheben. Sind die s_{hk} durch Elasticitätsbeobachtungen und ebenso die thermischen Ausdehnungscoefficienten a_a, a_b, a_c parallel den Hauptaxen bestimmt, so lassen sich die Größen q_a, q_b, q_c aus den Gleichungen

$$21)\qquad \begin{aligned} a_a &= q_a s_{11}+q_b s_{12}+q_c s_{13}, \\ a_b &= q_a s_{21}+q_b s_{22}+q_c s_{23}, \\ a_c &= q_a s_{31}+q_b s_{32}+q_c s_{33} \end{aligned}$$

berechnen; man erhält:

$$q_a = \frac{1}{\sigma}\left(a_a\begin{vmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{32} & s_{33}\end{vmatrix} + a_b\begin{vmatrix} s_{32} & s_{33} \\ s_{12} & s_{13}\end{vmatrix} + a_c\begin{vmatrix} s_{12} & s_{13} \\ s_{22} & s_{23}\end{vmatrix}\right) \text{ u. s. f.,}$$

oder kürzer nach (14) in merkwürdig einfacher Beziehung[1]).

1) Diese Beziehung findet eine allgemeine und directe Begründung durch folgende Erwägung. Die Zuwachse der molekularen Drucke (X_x).. werden als lineäre Functionen der Temperaturerhöhung ϑ angesehen, also wird $(X_x) = q_a\vartheta$,

$$
\begin{aligned}
q_a &= a_a c_{11} + a_b c_{12} + a_c c_{13}, \\
q_b &= a_a c_{21} + a_b c_{22} + a_c c_{23}, \\
q_c &= a_a c_{31} + a_b c_{32} + a_c c_{33}.
\end{aligned} \tag{22}
$$

Endlich sei noch angefügt, daß die Drillung τ eines Kreiscylinders, aus der Substanz eines rhombischen Krystalles gefertigt, sich durch die Größen s_{hk} folgendermaßen bestimmt. Ist R der Radius des Querschnitts, L die Länge des Cylinders, N das wirkende Moment und sind α, β, γ die Richtungscosinus der Axe, so gilt:

$$\tau = \frac{LNT'}{\pi R^4}, \tag{23}$$

worin

$$
\begin{aligned}
T' = {} & \alpha^2 (s_{55} + s_{66}) + \beta^2 (s_{66} + s_{44}) + \gamma^2 (s_{44} + s_{55}) \\
& + 4\beta^2 \gamma^2 (s_{22} + s_{33} - s_{44} - 2s_{23}) \\
& + 4\gamma^2 \alpha^2 (s_{33} + s_{11} - s_{55} - 2s_{31}) \\
& + 4\alpha^2 \beta^2 (s_{11} + s_{22} - s_{66} - 2s_{12}).
\end{aligned} \tag{24}
$$

$(Y_y) = q_b\vartheta$, $(Z_z) = q_c\vartheta$, $(Y_z) = q'_a\vartheta$, $(Z_x) = q'_b\vartheta$, $(X_y) = q'_c\vartheta$ zu setzen sein. Bei einem gleichförmig erwärmten Körper, der äußeren Drucken nicht ausgesetzt ist, findet Gleichgewicht statt, wenn gilt:

$$X_x + (X_x) = 0, \quad Y_y + (Y_y) = 0, \quad \ldots\ldots,$$

wobei wie gewöhnlich:

$$-X_x = c_{11} x_x + c_{12} y_y + c_{13} z_z + c_{14} y_z + c_{15} z_x + c_{16} x_y.$$

$$\ldots\ldots$$

Die x_x, .. sind gleichfalls lineäre Functionen der Temperaturerhöhung und wir setzen daher:

$$x_x = a_a\vartheta, \quad y_y = a_b\vartheta, \quad z_z = a_c\vartheta, \quad y_z = a'_a\vartheta, \quad z_x = a'_b\vartheta, \quad x_y = a'_c\vartheta,$$

worin die a die lineären thermischen Ausdehnungscoefficienten parallel den Coordinatenaxen, die a' die Coefficienten der thermischen Winkeländerung zwischen diesen Axen bezeichnen; sind die Coordinatenaxen identisch mit den thermischen Hauptaxen, so sind die $a' = 0$.

Sonach erhält man für den Zustand des Gleichgewichtes die Bedingungen:

$$q_a = a_a c_{11} + a_b c_{12} + a_c c_{13} + a'_a c_{14} + a'_b c_{15} + a'_c c_{16},$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

von denen die obigen Formeln (22) den dem rhombischen Systeme entsprechenden speciellen Fall darstellen.

Sind die Coordinatenaxen mit den thermischen Hauptaxen identisch, so sind wie gesagt, die a' gleich Null; daraus folgt aber keineswegs allgemein auch das Verschwinden der q', wie aus den letzten Gleichungen zu sehen, welche hier ergeben:

$$
\begin{aligned}
q'_a &= a_a s_{41} + a_b s_{42} + a_c s_{43}, \\
q'_b &= a_a s_{51} + a_b s_{52} + a_c s_{53}, \\
q'_c &= a_a s_{61} + a_b s_{62} + a_c s_{63}.
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt, daß in den Krystallen der thermische Druck im Allgemeinen auch nicht einmal auf den Flächen normal steht, welche normal zu den thermischen Axen liegen, — noch weniger natürlich auf anderen. Hiernach ist die in Herrn F. Neumanns Vorlesungen über Elasticität (Leipzig 1885 p. 116 u. f.) angestellte Betrachtung zu vervollständigen.

Erläuterungen zu den Beobachtungstafeln.

Die im Folgenden zusammengestellten Beobachtungsresultate sind in derselben Weise angeordnet wie die entsprechenden in meiner Abhandlung über den Beryll und Bergkrystall [1]).

Die Tafeln, welche die Dimensionsbestimmungen an den Stäbchen enthalten, geben die Dicken D direct wie sie durch die Messungen am Sphärometer erhalten sind, auf vier zur Länge parallelen Graden, von denen die mittleren beiden möglichst nahe auf der Mitte der Breitseite, die erste und letzte in einem Sechstel der Breite Abstand von den Kanten lagen. Das darunter geschriebene Mittel ist als die Dicke des Querschnitts anzusehen, dem die vier entsprechenden Punkte angehörten; sie ist nach der Formel

$$D = D_0 \pm \alpha \delta_1 + \alpha^2 \delta_2$$

berechnet und sind die berechneten Werthe zum Vergleich beigestellt. Man erkennt, daß diese Formel die Unregelmäßigkeit der Gestalt sehr vollständig berücksichtigt.

Die Breiten B sind auf den Mitten der Schmalseiten und in zwei Lagen beobachtet, zwischen denen das Stäbchen um die Längsaxe gedreht wurde.

Dicken und Breiten sind in Einheiten des Sphärometers = 1/992,7 mm. angegeben.

Bei der Bestimmung der Dimensionen zeigte sich eine eigenthümliche und mir neue Schwierigkeit, die viele Arbeit verursachte.

Die Stäbchen kamen vom Verfertiger jederzeit im völlig reinen Zustande an — sie waren durch Waschen mit Benzin von dem Kitt befreit, mittelst welches sie auf der Polirscheibe befestigt gewesen waren, und zeigten schönen Glanz. Auf den absichtlich in Form einer schwach gekrümmten Linse geschliffenen Tisch des Sphärometers gebracht gaben sie deutlich Newtonsche Ringe, das Merkmal dafür, daß sie wirklich sehr nahe zur Berührung mit der Unterlage kamen. Ich hielt es demnach für genügend, die Stäbchen für die Beobachtungen mit Alkohol oder Benzin leicht abzuwaschen und mit einem Leinentuch zu trocknen..

Indeß durch einen Zufall wurde ich darauf aufmerksam, daß die anscheinend so reinen Flächen der Stäbchen noch immer mit einer fremdartigen Schicht überzogen waren, die erst bei längerem Aufbewahren in Alkohol oder Benzin und wiederholtem Abreiben verschwindet.

Ich verfolgte diese Erscheinung sorgfältig zuerst bei dem Barytstäbchen II No 3.

1) W, Voigt, Götting. Nachr. 1886 p. 93 u. 289.

Die erste Messung ergab hier die Werthe:

$$D_0 = 516{,}8\,, \quad \delta_1 = 1{,}7\,, \quad \delta_2 = -0{,}89;$$

nachdem das Stäbchen 24 Stunden in Alkohol gelegen hatte fand sich:

$$D_0 = 515{,}6\,, \quad \delta_1 = 1{,}6\,, \quad \delta_2 = -0{,}86\,,$$

also ein Unterschied der Dicke um etwa 0,001^{mm}. Um zu sehen, ob die Reinigung eine vollständige wäre, wurde das Stäbchen abermals längere Zeit in Alkohol gelegt und dann sehr kräftig abgerieben; es fand sich nun:

$$D_0 = 515{,}4\,, \quad \delta_1 = 1{,}6\,, \quad \delta_2 = -0{,}80.$$

Die so erhaltene Aenderung ist als unmerklich zu bezeichnen und rührt jedenfalls zum größten Theil von der schleifenden Wirkung des Abreibens her; es scheint mir dadurch erwiesen, daß die einmalige gründliche Reinigung genügend ist.

Schließlich stellte ich mir noch die Frage, ob das sonst beliebte Poliren blanker Flächen mit Leder nicht vielleicht eine Fettschicht auf dieselben bringt und eben dadurch der Glanz so merklich erhöht wird. Die Messung des mit Leder polirten Stäbchens ergab folgende Werthe:

$$D_0 = 515{,}7\,, \quad \delta_1 = 1{,}7\,, \quad \delta_2 = -0{,}85.$$

Es ist also die Dicke des Stäbchens merklich, wenn auch wenig vergrößert worden.

Ich habe demgemäß für das Abreiben der Stäbchen niemals Leder sondern immer weiches Leinen benutzt.

Die Entdeckung jener Oberflächenschicht geschah leider erst nachdem alle Messungen vollendet, ja die Beobachtungen am Topas schon gesetzt waren. Es wurde sonach nöthig die gesammten Dimensionsbestimmungen von vorn anzufangen — eine ermüdende Arbeit, wenn man erwägt, daß sie für Topas und Baryt zusammen über 2000 Messungen erforderten. Den Herren Dr. Drude und Pockels bin ich für die ausdauernde Hülfe, die sie mir hierbei geleistet haben, zu aufrichtigem Danke verpflichtet.

Es war nun die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, daß die Biegungen und Drillungen ebenfalls durch die erwähnte Oberflächenschicht beeinflußt würden und ich habe demgemäß Controllbeobachtungen angestellt. Indeß ließ sich ein Einfluß nicht mit Sicherheit nachweisen und ich habe daher von der Wiederholung der übrigen Messungen (wohl 15000 an der Zahl) absehen zu können geglaubt. In der That ist es auch plausibel, daß jene dünne

Schicht, die wahrscheinlich aus dem Wachs besteht, auf welches, soviel mir bekannt, das Polirmittel aufgetragen wird, den Deformationen keinen merklichen Widerstand entgegensetzt.

Die Umrechnung der alten Beobachtungen mit den neuen Dimensionswerthen ergab das erfreuliche Resultat, daß der wahrscheinliche Fehler der erhaltenen Biegungs- und Drillungsconstanten erheblich vermindert wurde. Die Uebereinstimmung ist namentlich beim Topas, der in Folge der größeren Härte einen gleichmäßigeren Schliff erlaubt, weit größer als ich erwartet hatte. Der Baryt zeigte nicht nur unregelmäßigere Gestalt der Stäbchen, gegen die Kanten hin merklich gerundete Flächen, sondern auch im Allgemeinen eine viel dickere Oberflächenschicht, was wohl darauf hindeutet, daß er die Politur schwerer annimmt. Alles dies erklärt die hier schließlich erreichte geringere — indeß noch immer nahe 1/1000 betragende — Sicherheit der Endresultate.

Die Biegungen sind mit dem früher beschriebenen [1]) Apparat gemessen, der nur in der Weise vervollkommnet worden war, daß die am unten angegebenen Orte erwähnten Röllchen nicht mehr zwischen Spitzen gingen, sondern mit Schneiden, die ihre Axen bildeten, auf Glasplatten ruhten; die Reibung war auf diese Weise auf Bruchtheile eines Millimeters der Beobachtungsscala herabgesetzt und konnte mit Leichtigkeit in der früher angegebenen Weise völlig eliminirt werden.

Der Werth von 1 Millimeter der Beobachtungsscala betrug nach vielen Bestimmungen, die in der Weise angestellt wurden, daß eine und dieselbe besonders große Biegung (ca 1270 mm. der Scala) zugleich mikrometrisch gemessen wurde, 0,0002954 mm.; wiederholte Beobachtungen der Biegungen gaben eine Sicherheit bis auf den zehnten Theil — eine Genauigkeit, die in Verbindung mit der Bequemlichkeit der Handhabung den Apparat sehr empfiehlt.

In den Tabellen über die Biegungsbeobachtungen giebt L die Länge des Stäbchens in Millimetern, aus dem Abstand der Schneiden erhalten — eine, da die Schneiden keine mathematischen Linien sind, nicht eben sehr genau bestimmbare Größe —, B die in Rechnung zu ziehende Breite, D die Dicke in Sphärometertheilen, P die Belastung in Grammen. Die η sind die an der Beobachtungsscala abgelesenen Senkungen in Millimetern der Scala; in den beiden „Lagen" des Stäbchens befand sich einmal die eine, dann die andere Breitseite auf den Schneiden.

Bei den Biegungen der Topasstäbchen wurde eine besondere

1) l. c. p. 95.

Vorsicht dadurch nöthig, daß bei der großen Starrheit des Materiales und der geringen Länge einiger Gattungen von Stäbchen die unangenehme Fehlerquelle, welche die Eindrückung der Lagerschneiden bei der Belastung darbietet, einen außerordentlichen Einfluß erreichte. Ein genaues, sehr zeitraubendes Studium dieser Erscheinung hat mir gezeigt, daß dieselbe von Umständen abhängig ist, denen man von vorn herein gewiß keine Bedeutung beilegen würde. Eine kleine Verunreinigung der Oberfläche z. B. durch Berührung mit der Hand, einige mikroscopische Stäubchen oder Fäserchen, die sich zwischen Stäbchen und Lagerschneiden befanden, ließen die Biegung merklich größer erscheinen — wahrscheinlich indem sie als äußerst dünne Kissen sich bei der Belastung zusammendrückten. Hierfür ein Beispiel. Einige Topasstäbchen waren gebogen worden, bevor sie der Drillung unterworfen wurden; nachdem sie von dem hierbei auf ihre Enden gebrachten Kitt mit Alkohol sorgsam gereinigt waren, wurden sie abermals gebogen und gaben nun eine um 2—3 Theile der Beobachtungsscala größere Eindrückung der Lagerschneiden; erst nachdem sie längere Zeit in Benzin aufbewahrt waren, stellte sich der ursprüngliche Werth angenähert wieder her. Dies ist wohl nur so zu erklären, daß bei dem erstmaligen Reinigen eine dünne, absolut unsichtbare Schicht des Wachs-Colophonium-Kitt es auf der Oberfläche verrieben worden war, die in der angegebenen Weise als weicheres Kissen wirkte und erst bei längerem Aufbewahren in Benzin verschwand.

Nun wäre jener Ueberzug ohne Einfluß auf die Bestimmung der Biegungsconstanten, wenn er die ganze Oberfläche eines jeden Stäbchens gleichmäßig bedeckte, denn sein Einfluß würde dann bei Beobachtungen in verschiedenen Längen, vermittelst deren die Eindrückung eliminirt wird, mit herausfallen; da man dessen aber nicht sicher sein kann, so muß man suchen, ihn durch sorgfältige Reinigung möglichst vollständig zu beseitigen. Das mit Benzin abgewaschene und mit weicher Leinewand getrocknete Stäbchen wurde also garnicht mit der Hand, sondern nur mit einer Pincette berührt und vor dem Auflegen auf die Lager noch vorsichtig mit einem Pinsel von etwa anhängenden Fäserchen befreit; so gelang es, den Resultaten die Uebereinstimmung zu geben, welche die folgenden Tafeln zeigen.

Für den angeregten Punkt sind dieselben in der folgenden Hinsicht von Bedeutung. Jedes Stäbchen ist erst in der geringsten Länge ($14{,}3^{mm}$) gebogen, die der Apparat bequem gestattete, darauf in der größten, welche seine Gestalt zuließ, und aus die-

sen Beobachtungen ist die Durchdrückung der Lagerschneiden bestimmt. Das in der ersten Beobachtungs-Reihe jeder Tafel am Ende stehende η' giebt den so erhaltenen Werth. Faßt man die bei verschiedenen Stäbchen derselben Art so erhaltenen Werthe zusammen, so findet man eine sehr gute Uebereinstimmung. Eine absolute ist schon dadurch ausgeschlossen, daß in den η' nicht nur die Eindrückung der Schneiden, sondern auch diejenige des Stäbchens selbst an der Auflagestelle steckt und diese je nach der zufälligen Gestalt desselben verschieden sein wird, bei stärker convexer Oberfläche selbst größer. Bei Stäbchen verschiedener Art ist das η' merklich verschieden, offenbar weil diese Eindrückung des Stäbchens mit der Orientirung, Politur etc. desselben wechselt.

Bei der Berechnung der Biegungsconstante E resp. E ist der mittlere Werth aller η' für dieselbe Gattung in Rechnung gezogen und unter (η') beigeschrieben, weil dadurch eine größere Sicherheit der Resultate zu gewinnen möglich schien.

In wie weit dieser Werth nun an den verschiedenen Stellen desselben Stäbchens stattfindet, gestattet eine Reihe von Beobachtungen zu übersehen, welche dasselbe Stäbchen in verschiedenen Längen benutzt, so namentlich II a Nr. 2) und 4), III b Nr. 1) und 2), IV Nr. 1) und 2), V Nr. 1). Die Uebereinstimmung der so erhaltenen Werthe E oder E ist so befriedigend, daß der unangenehme Fehler als eliminirt angesehen werden kann.

Beim Baryt lagen die Verhältnisse im Allgemeinen günstiger, da die Biegungen in Folge größerer Länge der Stäbchen und geringerer Starrheit im Allgemeinen größer ausfielen. Nur bei den Sorten I, IV, V und VI ist die Bestimmung von η' in derselben Weise ausgeführt wie beim Topas, bei den übrigen genügte es, sie an einigen Stäbchen anzustellen.

Die Tafeln für die Drillungsbeobachtungen enthalten wiederum zunächst die in Rechnung zu ziehenden Dimensionen, dann die an dem früher beschriebenen [1]) Apparat beobachteten Drehungen des beweglichen gegen den festen Spiegel in Millimetern der Scala, (reducirt von der Tangente auf den Bogen) wie er der Belastung mit dem Gewicht der Waagschale (G) und den aufgelegten Gewichtsstücken (Grammen) entspricht, — und zwar unter lR, wenn die Drehung an der linken, unter rR, wenn sie an der rechten Rolle des Apparats stattfand. Beigeschrieben ist die Größe der Reibung in der Axe der bewegten Rolle; dieselbe ist mitunter nicht unbedeutend, in ihrem Einfluß aber durch die Beobachtung beseitigt.

1) W. Voigt, Pogg. Ann. Erg. Bd. VII, p. 185. 1875.

Die Entfernung der Spiegel von der Scala betrug 5173^{mm}. die Millimeter der letzteren waren um 0,00374 zu groß.

Die Rollen des Apparates sind vor dem Beginn der Beobachtungen neu abgedreht und der Hebelarm, an welchem bei den Beobachtungen die Belastung angreift, darnach bestimmt. Dies geschah in doppelter Weise. Einmal wurde mittelst eines Schublineales direct der Durchmesser der Rollen plus dem umgelegten Draht, an welchem später die Belastung angehängt wurde, gemessen und davon die einfache (mikroscopisch gemessene) Drahtdicke (0,15^{mm}) in Abzug gebracht; hierdurch fand sich für den doppelten Hebelarm an beiden Rollen

lR 73,65^{mm} rR 73,54^{mm}.

Sodann wurde der erwähnte Draht über die Rollen gelegt und beiderseitig belastet, und darnach der Abstand der an beiden Seiten herabhängenden Enden direct gemessen; auf diese Weise wurden erhalten

lR 73,68^{mm} rR 73,55^{mm}.

Die Werthe

lR 73,66^{mm} rR 73,54^{mm}.

oder für den einfachen Hebelarm:

36,83^{mm} 36,77^{mm}

d. h. im Mittel 36,80, sind hiernach bis über den tausendsten Theil sichergestellt.

Aus sämmtlichen Beobachtungen, die sich auf ein Stäbchen beziehen, ist nach der Methode der kleinsten Quadrate unter Elimination des Werthes der Reibung in der Ruhelage des Apparates die Drehung σ_r berechnet, welche der Belastung P d. h. dem Moment $P.36,80^{mm}$ entspricht, und aus ihr nach Formel (11) der beigeschriebene Werth des Drillungscoefficienten T resp. T.

Dabei zeigte es sich nöthig, um den viel schwierigeren Drillungsbeobachtungen wenigstens annähernd dieselbe Genauigkeit zu geben, die bei den Biegungsbeobachtungen schließlich erreicht ist, auch den Einfluß der an den Enden der Stäbchen aufgekitteten Staniolbelege, die ich dies Mal viel dicker als früher gewählt hatte, durch eigne Beobachtungen zu bestimmen. Die dadurch nöthig gemachte Correction ist nicht sehr genau und unter der Bezeichnung δT beigeschrieben.

Topas.

Herr Rittergutsbesitzer v. Janson auf Schloß Gerdauen (Ostpreußen) hat die Freundlichkeit gehabt, mir für die Bestimmung

der Elasticitätsconstanten des Topases aus seiner berühmten Sammlung ausgezeichnet schönes Material zu überlassen, und ich bin ihm für sein großartiges und werthvolles Geschenk zu aufrichtigem Danke verpflichtet.

Herr v. Janson hat mir drei nahe gleich große, gleich gestaltete und gleich gefärbte, hellgrünliche Krystalle von demselben Fundort „von Mursinka im Ural, näher vom kleinen Maruschkin-Berge bci Alabaschka" übersandt, ein Umstand von großem Vortheil, da hierdurch die Garantie gegeben ist, daß das gefundene System von Constanten ebenso als zusammengehörig zu betrachten ist, als wäre es an einem einzigen Individuum erhalten, was ja immer das Erwünschteste sein würde. Die Krystalle waren nahezu parallelepipedisch oder säulenförmig gestaltet und maßen circa 3^{cm} parallel der Längs-, 2^{cm} parallel den Queraxen. Es war hiernach möglich in den verschiedenen Richtungen Stäbchen von $2-3^{cm}$ Länge herzustellen. Die Ausführung derselben hat zum Theil die Firma Voigt und Hochgesang hier, nach dem Tode des Leiters dann Dr. Steeg und Reuter in Homburg v. d. Höhe übernommen; demgemäß ist die Politur der Stäbchen nicht identisch ausgefallen; die von den Letzteren hergestellten (Nr. III. IV und V.) sind vollkommener.

Um die Orientirung der beobachteten Stäbchen klar zu stellen denke ich mir im Topas die c-Axe parallel der Normale auf der Spaltungsrichtung (Basis), die a-Axe in die Brachy-, die b-Axe in die Makrodiagonale gelegt und das System a, b, c mit dem Coordinatensystem X, Y, Z zusammenfallen. Dann sind die sechs benutzten Gattungen Stäbchen durch folgende Bezeichnungen charakterisirt, welche den nebenstehenden Richtungen der Länge L, und Breite B entsprechen.

$$
\begin{array}{ll}
(\mathrm{I}c) & : L \| a, \quad B \| c, \\
(\mathrm{II}a) & : L \| b, \quad B \| a, \\
(\mathrm{III}b) & : L \| c, \quad B \| b, \\
(\mathrm{IV}) & : \sphericalangle(L,b) = \sphericalangle(L,c) = 45^{\circ}, \quad B \| a \\
(\mathrm{V}) & : \sphericalangle(L,c) = \sphericalangle(L,a) = 45^{\circ}, \quad B \| b \\
(\mathrm{VI}) & : \sphericalangle(L,a) = \sphericalangle(L,b) = 45^{\circ}, \quad B \| c.
\end{array}
$$

Die verschiedenen Stäbchen derselben Gattung sind durch beigeschriebene Ordnungsnummern unterschieden, welche den in die Stäbchen eingeritzten entsprachen.

Bei den Messungen der Biegungen und der Dimensionen hat Herr F. Pockels mir freundlichst vielfache Hülfe geleistet.

Dimensionen.

Ic No. 1.

$D = 550 + \delta$

δ =	3,3	6,3	8,1	9,1	7,6
	4,8	7,2	9,0	9,1	8,2
	4,3	7,3	9,0	9,1	8,2
	5,8	8,7	10,6	10,9	9,7
Mittel	4,6	7,4	9,2	9,5	8,4
ber.	4,6	7,5	9,1	9,5	8,4

$\delta_0 = 9{,}1$, $\delta_1 = 0{,}97$, $\delta_2 = -0{,}66$.

$B = 3700 + \beta$

β =	66	88	88	81	69
	70	82	80	74	62
Mittel	68	85	84	77	65

Ic No. 2.

$D = 540 + \delta$

δ =	8,0	11,4	12,9	16,1	12,5
	7,9	11,6	13,5	15,1	13,9
	9,0	12,2	14,4	14,8	13,1
	8,5	12,6	14,3	15,1	13,9
Mittel	8,4	12,0	13,8	15,5	13,4
ber.	8,2	12,0	14,2	14,8	13,6

$\delta_0 = 14{,}2$, $\delta_1 = 1{,}35$, $\delta_2 = -0{,}82$.

$B = 3700 + \beta$

β =	58	69	74	80	80
	60	69	74	81	84
Mittel	59	69	74	80	80

Ic No. 3.

$D = 550 + \delta$

δ =	— c,2	3,4	5,3	3,6	— 1,2
	0,6	4,0	5,5	4,2	1,0
	0,2	4,0	5,4	3,9	0,8
	0,2	3,4	6,1	4,0	0,1
Mittel	0,2	3,7	5,6	3,9	0,2
ber.	0,1	4,0	5,3	4,0	0,1

$\delta_0 = 5{,}3$, $\delta_1 = 0{,}02$, $\delta_2 = -1{,}30$.

$B = 3700 + \beta$

β =	71	71	65	59	41
	74	68	65	58	36
Mittel	73	70	65	58	38

Ic No. 4.

$D = 560 + \delta$

δ =	1,1	2,0	2,1	1,9	1,1
	1,7	2,6	3,1	2,7	1,7
	1,8	2,7	3,0	2,6	2,4
	1,9	2,8	3,1	2,9	2,2
Mittel	1,6	2,5	2,8	2,5	1,9
ber.	1,7	2,4	2,8	2,6	1,9

$\delta_0 = 2{,}8$, $\delta_1 = 0{,}06$, $\delta_2 = -0{,}26$.

$B = 3700 + \beta$

β =	38	60	64	68	73
	48	59	63	68	73
Mittel	43	60	63	68	73

Ic No. 5[1].

$D = 530 + \delta$

δ =	7,0	9,2	9,6	10,5	10,2
	8,7	10,0	10,7	11,4	11,5
	8,2	9,9	10,7	11,5	11,5
	9,6	12,3	12,6	12,4	12,1
Mittel	8,4	10,4	10,9	11,5	11,3
ber.	8,5	10,1	11,1	11,5	11,3

$\delta_0 = 11{,}1$, $\delta_1 = 0{,}69$, $\delta_2 = -0{,}31$.

$B = 3700 + \beta$

β =	55	72	66	67	69
	60	66	66	67	70
Mittel	58	69	66	67	70

1) Die Schmalseiten dieses Stäbchens standen nicht genau rechtwinklich zu seinen Breitseiten.

IIa No. 1. $D = 530 + \delta$

$\delta =$	5,8	7,0	8,4	10,3	11,1
	4,7	7,6	8,9	10,5	11,4
	5,6	7,7	9,4	11,2	11,7
	6,5	8,3	10,8	12,3	13,4
Mittel	5,7	7,7	9,4	11,1	11,9
ber.	5,6	7,7	9,5	10,9	12,0

$\delta_0 = 9{,}5,\ \delta_1 = 1{,}6,\ \delta_2 = -0{,}18.$

$B = 3700 + \beta$

$\beta =$	59	85	92	95	88
	59	77	94	94	93
Mittel	59	81	93	94	90

IIa No. 2. $D = 530 + \delta$

$\delta =$	4,3	7,1	8,0	8,1	7,1
	4,4	6,9	8,8	8,6	7,5
	4,3	6,7	8,6	8,7	8,1
	5,1	7,4	8,6	8,7	7,6
Mittel	4,5	7,0	8,5	8,5	7,6
ber.	4,5	7,0	8,4	8,6	7,5

$\delta_0 = 8{,}4,\ \delta_1 = 0{,}77,\ \delta_2 = -0{,}60.$

$B = 3700 + \beta$

$\beta =$	57	71	75	80	81
	59	73	81	84	74
Mittel	58	72	78	82	78

IIa No. 3. $D = 530 + \delta$

$\delta =$	1,0	2,3	3,4	3,3	3,3
	1,4	3,0	3,3	3,6	3,2
	2,1	2,9	3,9	4,1	4,2
	3,3	3,7	4,7	4,7	4,6
Mittel	1,9	3,0	3,8	3,9	3,8
ber.	1,9	3,0	3,7	4,0	3,7

$\delta_0 = 3{,}7,\ \delta_1 = 0{,}47,\ \delta_2 = -0{,}22.$

$B = 3700 + \beta$

$\beta =$	23	47	54	60	60
	16	43	52	56	55
Mittel	20	45	53	58	58

IIa No. 4. $D = 530 + \delta$

$\delta =$	10,5	9,6	8,6	7,2	5,6
	9,7	8,7	7,6	5,9	3,7
	9,9	8,9	7,9	6,2	4,1
	10,2	9,0	7,8	6,7	5,6
Mittel	10,1	9,0	8,0	6,5	4,8
ber.	10,0	9,1	7,9	6,5	4,8

$\delta_0 = 7{,}9,\ \delta_1 = 1{,}3,\ \delta_2 = -0{,}12.$

$B = 3700 + \beta$

$\beta =$	66	76	74	70	59
	70	73	73	64	58
Mittel	68	73	74	67	68

IIa No. 5. $D = 530 + \delta$

$\delta =$	3,9	3,1	2,6	2,3	1,2
	6,0	5,1	4,2	3,2	1,7
	7,0	5,6	4,4	3,3	1,6
	3,0	6,7	5,8	4,5	3,5
Mittel	5,0	5,1	4,3	3,3	2,0
ber.	5,1	5,0	4,4	3,4	1,9

$\delta_0 = 4{,}4,\ \delta_1 = 0{,}78,\ \delta_2 = -0{,}23.$

$B = 3700 + \beta$

$\beta =$	48	56	60	63	66
	47	54	58	62	63
Mittel	48	55	59	62	64

IIIb No. 1. $D = 560 + \delta$

$\delta =$	4,5	4,6	5,0	5,1	5,0	5,6	7,0
	6,8	6,3	6,3	7,2	7,5	7,7	8,5
	7,4	7,4	7,3	7,6	8,3	8,3	8,4
	8,9	9,2	10,0	10,0	10,3	10,7	11,5
Mittel	6,9	6,8	7,2	7,5	7,8	8,1	8,8
ber.	6,9	7,0	7,1	7,4	7,7	8,2	8,7

$\delta_0 = 7{,}4,\ \delta_1 = 0{,}32,\ \delta_2 = 0{,}04.$

$B = 3800 + \beta$

$\beta =$	40	45	32	49	38	36	30
	50	52	53	53	47	42	32
Mittel	45	48	53	51	43	39	31

IIIb No. 2. $D = 570 + \delta$

$\delta =$	10,6	9,2	9,4	9,5	10,0	10,3	10,0
	10,2	10,0	9,8	10,0	10,5	10,9	11,5
	10,9	10,4	10,6	10,5	10,8	11,0	11,4
	12,0	11,4	11,4	12,1	12,2	12,1	13,9
Mittel	10,9	10,3	10,3	10,5	10,9	11,3	11,7
ber.	10,8	10,5	10,4	10,5	10,8	11,3	11,8

$\delta_0 = 10{,}5, \quad \delta_1 = 0{,}18, \quad \delta_2 = 0{,}09.$

$B = 3800 + \beta$

$\beta =$	82	86	84	79	76	70	65
	83	85	83	79	73	67	66
Mittel	83	85	84	79	74	69	65

IIIb No. 3. $D = 560 + \delta$

$\delta =$	7,6	7,3	7,6	8,0	8,2	8,5	8,8
	9,4	9,5	9,6	9,8	10,3	10,1	10,8
	10,2	9,0	9,4	9,4	9,8	10,2	10,4
	11,2	10,9	11,1	11,3	11,7	11,9	12,3
Mittel	9,6	9,2	9,4	9,6	10,0	10,2	10,6
ber.	9,5	9,4	9,5	9,6	9,9	10,2	10,7

$\delta_0 = 9{,}6, \quad \delta_1 = 0{,}20, \quad \delta_2 = 0{,}05.$

$B = 3500 + \beta$

$\beta =$	56	62	67	72	75	79	88
	55	61	67	69	74	73	80
	56	61	67	71	74	76	84

IV No. 1. $D = 570 + \delta$

$\delta =$	9,2	8,5	8,4	8,4	8,7	9,2	9,8
	8,5	8,3	8,1	8,1	8,2	9,2	9,9
	8,6	8,2	8,1	8,3	8,5	9,3	9,8
	9,2	9,0	8,6	9,3	9,3	10,0	10,8
Mittel	8,9	8,5	8,3	8,5	8,7	9,4	10,1
ber.	8,9	8,5	8,3	8,4	8,7	9,3	10,2

$\delta_0 = 8{,}4, \quad \delta_1 = 0{,}2, \quad \delta_2 = 0{,}12.$

$B = 3900 + \beta$

$\beta =$	85	93	95	90	76
	83	92	94	86	75
	84	92	95	88	76

IV No. 2. $D = 570 + \delta$

$\delta =$	8,9	8,9	9,1	9,6	10,1	10,7	8,8
	10,2	10,0	10,5	10,7	11,4	11,4	11,4
	10,2	10,2	10,3	10,6	10,9	11,5	11,5
	12,3	12,1	12,3	12,4	12,8	13,2	14,1
Mittel	10,4	10,3	10,5	10,8	11,3	11,7	11,5
ber.	10,2	10,4	10,6	10,9	11,2	11,4	11,8

$\delta_0 = 10{,}9, \quad \delta_1 = 0{,}25, \quad \delta_2 = 0{,}01.$

$B = 3900 + \delta$

$\beta =$	80	90	92	84	70
	83	90	92	88	70
	82	90	92	86	70

IV No. 3. $D = 570 + \delta$

$\delta =$	0,5	1,0	1,6	2,4	3,3	5,3	7,0
	2,9	3,6	4,2	4,9	6,3	7,2	8,0
	3,9	4,1	5,0	5,7	6,8	8,0	8,8
	7,2	7,0	7,4	8,1	9,1	10,4	11,8
Mittel	3,6	3,9	4,5	5,3	6,4	7,7	8,9
ber.	3,5	3,9	4,5	5,4	6,3	7,5	8,9

$\delta_0 = 5{,}4, \quad \delta_1 = 0{,}90, \quad \delta_2 = 0{,}10.$

$B = 3900 + \beta$

$\beta =$	90	94	95	94	89	86	77
	91	94	96	94	89	81	74
Mittel	91	94	96	94	90	84	75

IV No. 4. $D = 550 + \delta$

$\delta =$	1,5	5,2	10,1	15,2	19,9	25,0	31,1
	3,1	7,4	11,6	17,1	22,0	27,5	33,1
	2,6	6,9	11,6	16,4	21,1	26,8	32,8
	3,2	6,3	11,3	16,3	22,1	26,8	32,1
Mittel	2,6	6,4	11,2	16,2	21,3	26,5	32,3
ber.	1,7	6,3	11,2	16,2	21,4	26,7	32,3

$\delta_0 = 16{,}2, \quad \delta_1 = 5{,}1, \quad \delta_2 = 0{,}05.$

$B = 3900 + \beta$

$\beta =$	93	88	89	89	89	93	82
	87	89	89	88	93	86	80
Mittel	90	89	89	88	91	90	81

IV No. 5. $D = 570 + \delta$ | $B = 3900 + \beta$

δ =	7,0	7,0	6,2	6,4	6,8	7,1	8,3
	8,3	7,5	7,2	7,5	7,5	7,4	7,8
	8,2	8,2	8,3	8,1	8,1	8,5	8,4
	8,8	8,5	8,5	8,6	8,7	8,9	9,0
Mittel	8,1	7,8	7,6	7,6	7,8	8,0	8,4
ber.	8,0	7,8	7,6	7,8	7,8	8,0	8,4

$\delta_0 = 7,6$, $\delta_1 = 0,05$ $\delta_2 = 0,07$.

β =	93	87	88	86	90	85	77
	94	87	88	86	93	84	74
Mittel	94	87	88	86	92	84	76

V No. 1. $D = 560 + \delta$ | $B = 3900 + \beta$

δ =	8,8	10,7	12,8	14,8	16,5	18,1	19,7
	9,0	10,4	12,7	14,6	17,1	18,9	21,4
	10,1	11,1	13,0	14,9	17,0	19,0	20,2
	10,0	11,1	13,3	14,5	16,6	18,4	16,7
Mittel	9,5	10,8	13,0	14,7	16,8	18,6	20,3
ber.	9,2	11,1	12,9	14,8	16,7	18,5	20,4

$\delta_0 = 14,8$, $\delta_1 = 1,85$, $\delta_2 = 0,01$.

β =	86	93	94	90	85	84	73
	88	96	96	90	86	86	68
Mittel	87	94	95	90	86	85	71

V No. 2. $D = 570 + \delta$ | $B = 3900 + \beta$

δ =	0,6	0,2	0,1	0,7	1,4	1,6	2,1
	1,6	1,5	2,2	2,3	2,2	2,9	3,5
	2,0	2,2	2,0	3,0	3,1	3,1	4,3
	3,3	3,0	2,9	3,2	3,6	4,2	4,6
Mittel	1,9	1,7	1,8	2,3	2,6	3,0	3,6
ber.	1,8	1,8	2,0	2,2	2,6	3,0	3,6

$\delta_0 = 2,2$, $\delta_1 = 0,29$, $\delta_2 = 0,06$.

β =	81	85	85	82	79	77	68
	80	85	85	83	80	75	66
	81	85	88	82	80	76	67

V No. 3. $D = 560 + \delta$ | $B = 3900 + \beta$

δ =	4,4	4,7	4,6	5,4	5,6	6,1	6,8
	5,1	4,3	4,7	4,9	5,4	5,9	7,1
	4,2	4,6	4,9	5,0	5,7	6,3	6,9
	5,1	4,6	4,6	5,4	5,9	6,9	7,1
Mittel	4,7	4,6	4,7	5,2	5,7	6,4	7,0
ber.	4,7	4,7	4,9	5,3	5,7	6,3	7,1

$\delta_0 = 5,2$, $\delta_1 = 0,41$, $\delta_2 = 0,08$.

β =	73	81	86	89	93	93	88
	71	78	85	89	92	93	88
Mittel	72	80	85	89	93	93	88

V No. 4. $D = 570 + \delta$ | $B = 3900 + \beta$

δ =	5,9	5,3	5,1	5,2	5,4	5,6	6,3
	6,5	5,7	5,8	5,8	5,6	5,9	5,7
	6,2	6,1	6,0	5,3	6,0	5,8	6,6
	7,3	7,3	7,2	6,1	6,1	6,1	6,2
Mittel	6,5	6,1	6,0	5,6	5,8	5,9	6,2
ber.	6,5	6,1	5,9	5,7	5,7	5,9	6,1

$\delta_0 = 5,7$, $\delta_1 = 0,05$, $\delta_2 = 0,07$.

β =	60	72	76	81	84	84	81
	67	72	75	81	83	83	79
Mittel	64	72	75	81	84	83	80

V No. 5. $D = 570 + \delta$ | $B = 3900 + \beta$

δ =	4,3	3,9	4,1	4,3	4,3	4,8	5,4
	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	5,5
	5,0	4,1	4,4	4,7	4,1	4,6	5,7
	4,4	4,1	3,9	3,9	4,0	4,8	5,5
Mittel	4,5	4,1	4,2	4,3	4,3	4,7	5,5
ber.	4,5	4,2	4,1	4,2	4,5	4,8	5,5

$\delta_0 = 4,2$, $\delta_1 = 0,15$, $\delta_2 = 0,09$.

β =	68	82	87	92	88	81	82
	70	79	87	89	93	81	76
	69	81	87	90	91	81	79

VI No. 1.

$D = 530 + \delta$

$\delta =$	6,1	6,3	6,5	6,4	6,5
	7,3	7,4	7,5	7,5	7,5
	6,6	7,4	7,5	7,3	7,3
	7,3	7,5	7,6	7,5	8,3
Mittel	6,8	7,2	7,3	7,2	7,4
ber.	6,9	7,2	7,3	7,4	7,3

$\delta_0 = 7{,}3$, $\delta_1 = 0{,}12$, $\delta_2 = -0{,}04$.

$B = 3700 + \beta$

$\beta =$	42	52	55	58	55
	38	51	55	58	52
	40	51	55	58	54

VI No. 2.

$D = 540 + \delta$

$\delta =$	2,2	2,6	2,1	1,9	1,9
	4,8	3,9	3,6	3,6	2,6
	4,0	4,0	3,8	3,6	2,7
	4,6	5,5	4,3	4,1	4,2
Mittel	3,9	4,0	3,5	3,3	2,8
ber.	4,0	3,8	3,6	3,2	2,8

$\delta_0 = 3{,}6$, $\delta_1 = 0{,}29$, $\delta_2 = -0{,}06$.

$B = 3700 + \beta$

$\beta =$	67	66	63	63	54
	65	64	61	61	50
Mittel	66	65	62	62	52

VI No. 3.

$D = 540 + \delta$

$\delta =$	1,8	2,2	3,1	3,2	3,0
	1,3	2,1	2,9	2,9	3,1
	1,6	2,1	2,9	2,9	2,8
	2,0	2,1	2,9	2,9	2,6
Mittel	1,7	2,1	2,9	3,0	2,9
ber.	1,6	2,4	2,8	3,0	3,0

$\delta_0 = 2{,}8$, $\delta_1 = 0{,}33$, $\delta_2 = -0{,}12$.

$B = 3700 + \beta$

$\beta =$	65	66	62	61	50
	67	69	64	57	51
Mittel	66	68	63	59	50

VI No. 4.

$D = 530 + \delta$

$\delta =$	5,5	7,1	8,3	10,2	12,0
	5,5	7,3	9,1	10,8	12,0
	5,2	6,7	8,7	10,1	12,1
	4,9	6,2	8,2	9,9	11,6
Mittel	5,3	6,8	8,6	10,2	11,9
ber.	5,2	6,8	8,5	10,2	11,8

$\delta_0 = 8{,}5$, $\delta_1 = 1{,}66$, $\delta_2 = 0{,}01$.

$B = 3700 + \beta$

$\beta =$	53	59	67	63	64
	50	57	60	63	63
Mittel	52	58	63	63	64

VI No. 5.

$D = 530 + \delta$

$\delta =$	5,5	6,5	7,1	7,9	8,9
	7,1	7,9	8,6	9,4	10,6
	6,9	8,1	8,9	9,7	10,8
	10,1	10,6	10,6	11,2	11,9
Mittel	7,4	8,3	8,8	9,5	10,5
ber.	7,4	8,1	8,8	9,5	10,4

$\delta_0 = 8{,}8$, $\delta_1 = 0{,}74$, $\delta_2 = 0{,}03$.

$B = 3700 + \beta$

$\beta =$	67	67	64	60	58
	67	67	64	61	59
Mittel	67	67	64	60	59

Biegungen.

Ic No. 1. $L = 14{,}3$, $B = 3778$, $D = 558{,}9$, $P = 200{,}3$,

1. Lage $\eta = 34{,}9 \quad 35{,}1 \quad 34{,}9$
2. Lage $\eta = 35{,}7 \quad 35{,}4 \quad 35{,}5$

Mittel $\eta = 35{,}3$, $\eta' = 3{,}6$,.

$L = 24{,}2$,

1. Lage $\eta = 157{,}0 \quad 157{,}0 \quad 157{,}0 \quad 157{,}0$
2. Lage $\eta = 157{,}5 \quad 157{,}4 \quad 157{,}5 \quad 157{,}4$

Mittel $\eta = 157{,}2 \quad (\eta') = 3{,}6 \qquad E = 23020000.$

Ic No. 2. $L = 14{,}3$, $B = 3773$, $D = 553{,}9$, $P = 200{,}3$,

1. Lage $\eta = 35{,}7 \quad 35{,}7 \quad 36{,}0$
2. Lage $\eta = 36{,}2 \quad 36{,}0 \quad 36{,}2$

Mittel $\eta = 36{,}0$, $\eta' = 3{,}4$,

$L = 24{,}2$,

1. Lage $\eta = 161{,}5 \quad 161{,}6 \quad 161{,}4 \quad 161{,}5$
2. Lage $\eta = 161{,}6 \quad 161{,}7 \quad 161{,}5 \quad 161{,}7$

Mittel $\eta = 161{,}5$, $(\eta') = 3{,}6$, $\qquad E = 23040000.$

Ic No. 3. $L = 14{,}3$, $B = 3762$, $D = 554{,}8$, $P = 200{,}3$,

1. Lage $\eta = 36{,}1 \quad 36{,}2 \quad 36{,}0$
2. Lage $\eta = 35{,}7 \quad 35{,}9 \quad 36{,}0$

Mittel $\eta = 36{,}1$, $\eta' = 3{,}5$,

$L = 26{,}2$,

1. Lage $\eta = 203{,}9 \quad 203{,}7 \quad 203{,}8 \quad 203{,}8$
2. Lage $\eta = 204{,}1 \quad 204{,}0 \quad 203{,}9 \quad 203{,}8$

Mittel $\eta = 203{,}9$, $(\eta') = 3{,}6$, $\qquad E = 23000000.$

Ic No. 4. $L = 14{,}3$, $B = 3762$, $D = 562{,}7$, $P = 200{,}3$,

1. Lage $\eta = 35{,}0 \quad 35{,}1 \quad 35{,}0$
2. Lage $\eta = 35{,}0 \quad 34{,}8 \quad 34{,}9$

Mittel $\eta = 35{,}0$, $\eta' = 4{,}0$,

$L = 22{,}2$,

1. Lage $\eta = 120{,}9 \quad 120{,}6 \quad 120{,}6 \quad 120{,}7$
2. Lage $\eta = 121{,}1 \quad 121{,}2 \quad 121{,}2 \quad 121{,}3$

Mittel $\eta = 120{,}0$, $(\eta') = 3{,}6$, $\qquad E = 23080000.$

Gesammtmittel $\quad E_{Ic} = 23040000$, $\quad E_{Ic} = 4{,}341 \,.\, 10^{-8}$.
Wahrscheinlicher Fehler $\quad \pm\, 12000 \qquad \pm\, 0{,}0023$.

IIa No. 1. $L = 14{,}3$, $B = 3786$, $D = 539{,}4$, $P = 200{,}3$,

1. Lage $\eta = 31{,}2 \quad 31{,}3 \quad 31{,}3$
2. Lage $\eta = 31{,}6 \quad 31{,}5 \quad 31{,}4$

Mittel $\eta = 31{,}4$, $\eta' = 3{,}3$,

$L = 22{,}2$,

1. Lage $\eta = 108{,}7 \quad 108{,}8 \quad 108{,}6 \quad 108{,}5$
2. Lage $\eta = 108{,}8 \quad 108{,}6 \quad 108{,}8 \quad 108{,}4$

Mittel $\eta = 108{,}6 \quad (\eta') = 3{,}3$, $\qquad E = 28800000.$

IIa No. 2. $L = 14,3$, $B = 3775$, $D = 538,2$, $P = 200,3$,
1. Lage $\eta = 31,9 \quad 31,9 \quad 32,2$
2. Lage $\eta = 32,1 \quad 31,8 \quad 31,7$
Mittel $\eta = 31,9$, $\eta' = 3,6$,
$L = 24,2$,
1. Lage $\eta = 140,5 \quad 140,2 \quad 140,5 \quad 140,2$
2. Lage $\eta = 140,4 \quad 140,5 \quad 140,4 \quad 140,6$
Mittel $\eta = 140,4$ $(\eta') = 3,3$, $E = 28900000$.
$L = 22,2$.
1. Lage $\eta = 108,6 \quad 108,9 \quad 108,7 \quad 108,7$
2. Lage $\eta = 108,7 \quad 108,9 \quad 108,9 \quad 108,9$
Mittel $\eta = 108,8$, $(\eta') = 3,3$, $E = 28990000$.

IIa No. 3. $L = 14,3$, $B = 3749$, $D = 533,6$, $P = 200,3$,
1. Lage $\eta = 32,7 \quad 32,5 \quad 32,5$
2. Lage $\eta = 32,3 \quad 32,4 \quad 32,5$
Mittel $\eta = 32,5$, $\eta' = 3,3$,
$L = 22,2$,
1. Lage $\eta = 112,5 \quad 112,7 \quad 112,4 \quad 112,6$
2. Lage $\eta = 112,7 \quad 112,5 \quad 112,4 \quad 113,0$
Mittel $\eta = 112,6$, $(\eta') = 3,3$, $E = 28940000$.

IIa No. 4. $L = 14,3$, $B = 3758$, $D = 537,5$, $P = 200,3$,
1. Lage $\eta = 31,8 \quad 32,0 \quad 32,1$
2. Lage $\eta = 31,5 \quad 31,3 \quad 31,6$
Mittel $\eta = 31,7$, $\eta' = 3,3$,
$L = 24,2$
1. Lage $\eta = 141,2 \quad 141,5 \quad 141,4 \quad 141,5$
2. Lage $\eta = 141,1 \quad 141,5 \quad 141,2 \quad 141,2$
Mittel $\eta = 141,3$ $(\eta') = 8.3$ $E = 28940000$,
$L = 22,2$,
1. Lage $\eta = 110.2 \quad 110,1 \quad 110,1 \quad 110.2$
2. Lage $\eta = 110,1 \quad 110,1 \quad 110,2 \quad 110,2$
Mittel $\eta = 110,2$ $(\eta') = 3,3$, $E = 28880000$,

IIa No. 5. $L = 14,3$, $B = 3758$, $D = 534,2$, $P = 200,3$,
1. Lage $\eta = 32,1 \quad 32,4 \quad 32,1$
2. Lage $\eta = 32,4 \quad 32.0 \quad 32,3$
Mittel $\eta = 32,2$, $\eta' = 3,2$,
$L = 22,2$,
1. Lage $\eta = 112,1 \quad 112,3 \quad 112,1 \quad 111,9$
2. Lage $\eta = 112,5 \quad 112,1 \quad 112,2 \quad 112,2$
Mittel $\eta = 112,2$ $(\eta') = 3,3$, $E = 28850000$,
Gesammtmittel $E_{IIa} = 28900000$, $E_{IIa} = 3,460 . 10^{-}$.
Wahrscheinlicher Fehler $\pm$ 19000 $\pm$ 0,0023.

IIIb No. 1. $L = 14,3$, $B = 3845$, $D = 567,4$, $P = 110$,
1. Lage $\eta = 16,5 \quad 16,4 \quad 16,6$
2. Lage $\eta = 16,4 \quad 16,6 \quad 16,2$
Mittel $\eta = 16,4$, $\eta' = 2,3$,

$L = 28,2$,
1. Lage η = 111,3 111,2 111,2 111,2
2. Lage η = 110,9 111,1 111,0 111,1
Mittel η = 111,1, (η') = 2,3, E = 26520000.

$L = 26,2$,
1. Lage η = 89,3 89,2 89,3 89,2
2. Lage η = 89,2 89,0 89,0 89,1
Mittel η = 89,2, (η') = 2,3, E = 26630000.

IIIb No. 2. L 14,3, B = 3877, D = 580,4, P = 110,
1. Lage η = 15,6 15,6 15,4 15,5
2, Lage η = 15,8 15,6 15,5 15,4
Mittel η = 15,55, η' = 2,5,
$L = 30,2$,
1. Lage η = 126,1 125,9 125,4 125,5
2. Lage η = 126,6 126,4 126,2 126,3
Mittel η = 126,0, (η') = 2,3, E = 26560000.
$L = 28,2$,
1. Lage η = 103,7 103,7 103,9 103,6
2. Lage η = 103,0 102,9 102,8 102.8
Mittel η = 103,3, (η') = 2,3, E = 26480000.
$L = 26,2$,
1. Lage η = 83,6 83,2 83,3 83,2
2. Lage η = 83,6 83,2 83,4 83,4
Mittel η = 83,4, (η') = 2,3, E = 26440000.

IIIb No. 3. L = 14,3, B = 3870, D = 569,6, P = 110,
1. Lage η = 16,0 15,9 15,7
2. Lage η = 16,0 16,2 16,2
Mittel η = 16,0, η' = 2,2,
$L = 26,2$,
1. Lage η = 88,0 87,8 88,0 87,8
2. Lage η = 88,6 88,4 88,2 88,3
Mittel η 88,1, (η') = 2,3, E = 26490000.

Gesammtmittel E_{IIIb} = 26520000, $E_{IIIb} = 3,771 . 10^{-8}$.
Wahrscheinlicher Fehler $\pm$ 18000 $\pm$ 0,0026.

IV No. 1. L = 14,3, B = 3989, D = 578,3, P = 200,3,
1. Lage η = 27,7 27,6 27,6
2. Lage η = 27,2 27,3 27,5
Mittel η = 27,5, η' = 4,0,
$L = 32,2$,
1. Lage η = 271,6 271,5 271,7 271,6
2. Lage η = 271,7 271,8 271,6 272,0
Mittel η = 271,7, (η') = 3,9, E = 26610000.
$L = 30,2$,
1. Lage η = 223,7 223,7 224,0 224,1
2. Lage η = 224,6 224,8 224,5 224,5
Mittel η = 224,2, (η') = 3,9. E = 26680000.

IV No. 2. $L = 14,3$, $B = 3986$, $D = 580,9$, $P = 200,3$,
1. Lage $\eta = 26,9 \quad 27,1 \quad 27,2 \quad 26,9$
2. Lage $\eta = 27,1 \quad 27,0 \quad 26,9 \quad 27,1$
Mittel $\eta = 27,0$, $\eta' = 3,7$,
$L = 32,2$,
1. Lage $\eta = 268,9 \quad 268,9 \quad 268,8 \quad 268,9$
2. Lage $\eta = 268,9 \quad 268,8 \quad 268,6 \quad 268,7$
Mittel $\eta = 268,8$, $(\eta') = 3,9$, $E = 26560000$.
$L = 30,2$,
1. Lage $\eta = 221,7 \quad 222,2 \quad 222,2 \quad 222,1$
2. Lage $\eta = 222,2 \quad 222,1 \quad 222,0 \quad 222,1$
Mittel $\eta = 222,1$, $(\eta') = 3,9$. $E = 26580000$.

IV No. 3. $L = 14,3$, $B = 3990$, $D = 575,4$, $P = 200,3$,
1. Lage $\eta = 27,6 \quad 27,8 \quad 27,7$
2. Lage $\eta = 27,8 \quad 27,8 \quad 27,9$
Mittel $\eta = 27,8$, $\eta' = 4,0$,
$L = 30,2$,
1. Lage $\eta = 227,6 \quad 227,6 \quad 227,7 \quad 227,5$
2. Lage $\eta = 227,7 \quad 227,7 \quad 227,6 \quad 227,4$
Mittel $\eta = 227,6$, $(\eta') = 3,9$, $E = 26650000$.

IV No. 4[1]. $L = 14,3$, $B = 3989$, $D = 566,1$, $P = 200,3$,
1. Lage $\eta = 29,2 \quad 29,2 \quad 29,2$
2. Lage $\eta = 29,0 \quad 28,9 \quad 28,9$
Mittel $\eta = 29,0$, $\eta' = 3,9$,
$L = 30,2$,
1. Lage $\eta = 239,8 \quad 239,6 \quad 239,8 \quad 239,8$
2. Lage $\eta = 240,1 \quad 239,9 \quad 239,3 \quad 239,4$
Mittel $\eta = 240,0$, $(\eta') = 3,9$, $E = 26670000$.

IV No. 5. $L = 14,3$, $B = 3987$, $D = 577,6$, $P = 200,3$,
1. Lage $\eta = 27,7 \quad 27,4 \quad 27,5$
2. Lage $\eta = 27,5 \quad 27,4 \quad 27,4$
Mittel $\eta = 27,5$, $\eta' = 4,1$,
L $\eta = 28,2$,
1. Lage $\eta = 183,3 \quad 183,4 \quad 183,5 \quad 183,5$
2. Lage $\eta = 183,2 \quad 182,9 \quad 182,9 \quad 183,0$
Mittel $\eta = 183,2$, $(\eta') = 3,9$ $E = 26770000$.
Gesammtmittel $E_{IV} = 26650000$, $E_{IV} = 3,753 \cdot 10^{-8}$.
Wahrscheinlicher Fehler ± 19000, $\pm 0,0027$.

---

1) Die eine Kante dieses Stäbchens war durch Scharten zerstört, welche sich bis ca. 0,1mm Tiefe in die angrenzende Breitseite, bis nahezu auf die Hälfte der Dicke in die angrenzende Schmalseite erstreckten. Für die Berechnung von E habe ich angenommen, daß sie durch eine gleichmäßige Abstumpfung der Kante durch eine Ebene ersetzt werden könnten, welche auf der Schmalseite von der Mitte ausgehend die Kante in 0,05mm Tiefe abschneidet. Hierdurch ergab sich eine Correction von E im Betrage von 140000. Der Werth, der so erhalten wurde, ist oben angeführt.

V No. 1. $L = 14{,}3$, $B = 3990$, $D = 574{,}8$, $P = 200{,}3$,

1. Lage $\eta = 26{,}1 \quad 25{,}8 \quad 25{,}8 \quad 25{,}7$

2. Lage $\eta = 25{,}9 \quad 26{,}2 \quad 26{,}7 \quad 26{,}6$

Mittel $\eta = 26{,}1$, $\eta' = 4{,}0$,

$L = 32{,}2$,

1. Lage $\eta = 255{,}1 \quad 254{,}8 \quad 254{,}7$

2. Lage $\eta = 254{,}5 \quad 254{,}6 \quad 254{,}4$

Mittel $\eta = 254{,}7$, $(\eta') = 3{,}9$, $E = 28910000.$

$L = 26{,}2$,

1. Lage $\eta = 139{,}0 \quad 139{,}0 \quad 138{,}9$

2. Lage $\eta = 139{,}0 \quad 139{,}2 \quad 139{,}1$

Mittel $\eta = 139{,}1$, $(\eta') = 3{,}9$, $E = 28900000.$

$L = 20{,}2$,

1. Lage $\eta = 66{,}7 \quad 66{,}7 \quad 66{,}5 \quad 66{,}6$

2. Lage $\eta = 65{,}7 \quad 65{,}8 \quad 65{,}8 \quad 65{,}7$

Mittel $\eta = 65{,}8$, $(\eta') = 3{,}9$, $E = 28930000.$

V No. 2. $L = 14{,}3$, $B = 3979$, $D = 572{,}3$, $P = 200{,}3$,

1. Lage $\eta = 26{,}1 \quad 26{,}1 \quad 26{,}2$

2. Lage $\eta = 26{,}1 \quad 25{,}4 \quad 26{,}1$

Mittel $\eta = 26{,}0$, $\eta' = 3{,}7$,

$L = 30{,}2$,

1. Lage $\eta = 213{,}9 \quad 214{,}1 \quad 213{,}9 \quad 214{,}1$

2. Lage $\eta = 214{,}1 \quad 214{,}0 \quad 213{,}9 \quad 214{,}0$

Mittel $\eta = 213{,}9$, $(\eta') = 3{,}9$, $E = 28940000.$

V No. 3. $L = 14{,}3$, $B = 3987$, $D = 565{,}3$, $P = 200{,}3$,

1. Lage $\eta = 26{,}8 \quad 26{,}7 \quad 26{,}8$

2. Lage $\eta = 27{,}3 \quad 26{,}9 \quad 27{,}1$

Mittel $\eta = 26{,}9$, $\eta' = 3{,}8$,

$L = 30{,}2$,

1. Lage $\eta = 221{,}3 \quad 221{,}5 \quad 220{,}7 \quad 221{,}2$

2. Lage $\eta = 221{,}5 \quad 221{,}4 \quad 221{,}6 \quad 221{,}9$

Mittel $\eta = 221{,}4$, $(\eta') = 3{,}9$, $E = 28940000.$

V No. 4. $L = 14{,}3$, $B = 3978$, $D = 575{,}8$, $P = 200{,}3$,

1. Lage $\eta = 25{,}9 \quad 25{,}8 \quad 25{,}7$

2. Lage $\eta = 25{,}7 \quad 25{,}8 \quad 25{,}4$

Mittel $\eta = 25{,}7$, $\eta' = 4{,}0$,

$L = 28{,}2$,

1. Lage $\eta = 171{,}6 \quad 171{,}7 \quad 171{,}6 \quad 171{,}7$

2. Lage $\eta = 171{,}7 \quad 171{,}5 \quad 171{,}5 \quad 171{,}6$

Mittel $\eta = 171{,}6$, $(\eta') = 3{,}9$, $E = 28990000.$

V No. 5. $L = 14{,}3$, $B = 3984$, $D = 574{,}3$, $P = 200{,}3$,

1. Lage $\eta = 26{,}1 \quad 26{,}1 \quad 26{,}2$

2. Lage $\eta = 26{,}2 \quad 26{,}3 \quad 26{,}2$

Mittel $\eta = 26{,}2$, $\eta' = 4{,}1$,

$L = 28{,}2$,

1. Lage $\eta = 172{,}8 \quad 172{,}7 \quad 173{,}0 \quad 173{,}0$

2. Lage $\eta = 173{,}5 \quad 173{,}5 \quad 173{,}7 \quad 173{,}5$

Mittel $\eta = 173{,}3$, $(\eta') = 3{,}9$, $E = 28860000.$

Das Stäbchen V No. 1 ist, wie oben gesagt, zu einer Untersuchung über die Constanz der Eindrückung η' in möglichst verschiedenen Längen beobachtet; zur Bestimmung von E sind die bei kleinen Längen angestellten Beobachtungen nicht günstig; sie würden also zu viel Einfluß erhalten, wenn man ihnen das volle Gewicht der übrigen beilegen wollte. Ich habe demgemäß den bei den beiden Längen 26,2^{mm} und 20^{mm} gefundenen Werthen nur das halbe Gewicht der übrigen beigelegt.

Gesammtmittel $\mathbf{E}_\nu = \mathbf{28920000}$, $\mathrm{E}_\nu = \mathbf{3{,}457 \cdot 10^{-8}}$.
Wahrscheinlicher Fehler $\pm$ 13000 $\pm$ 0,0016.

VI No. 1. $L = 14{,}3$, $B = 3753$, $D = 537{,}3$, $P = 200{,}3$,
1. Lage η = 30,7 30,7 30,8
2. Lage η = 30,7 30,4 30,7
Mittel η = 30,7, η' = 4,7,
L = 25,3,
1. Lage η = 148,2 148,0 1485
2. Lage η = 148,4 148,2 148,2
Mittel η = 148,3, (η') = 4,9, $\mathbf{E} = \mathbf{31920000}$.

VI No. 2. $L = 14{,}3$, $B = 3762$, $D = 543{,}6$, $P = 200{,}3$,
1. Lage η = 30,4 30,0 30,3
2. Lage η = 29,4 29,7 29,5
Mittel η = 30,0, η' = 5,0,
L = 24,25
1. Lage η = 126,9 1268 126,6
2. Lage η = 127,2 127,0 126,9
Mittel η = 126,9, (η') = 4,9, $\mathbf{E} = \mathbf{31820000}$.

VI No. 3. $L = 14{,}3$, $B = 3762$, $D = 542{,}8$, $P = 200{,}3$,
1. Lage η = 30,7 30,3 30,4
2. Lage η = 30,4 30,3 29,8
Mittel η = 30,3, η' = 5,1,
L = 24,25,
1. Lage η = 127,6 127,5 127,6
2. Lage η = 127,5 127,6 127,3
Mittel η = 127,5, (η') = 4,9, $\mathbf{E} = \mathbf{31820000}$.

VI No. 4. $L = 14{,}3$, $B = 3760$, $D = 538{,}5$, $P = 200{,}3$,
1. Lage η = 30,3 30,2 30,2
2. Lage η = 31,0 30,9 31,2
Mittel η = 30,6, η' = 4,8,
L = 24,25,
1. Lage η = 130,9 130,5 103,7
2. Lage η = 130,7 130,6 130,8 130,6
Mittel η = 130,6, (η') = 4,9, $\mathbf{E} = \mathbf{31780000}$.

VI No. 5. $L = 14{,}3$, $B = 3763$, $D = 538{,}8$, $P = 200{,}3$,

1. Lage $\eta = 30{,}7 \quad 30{,}6 \quad 30{,}8$

2. Lage $\eta = 30{,}1 \quad 30{,}3 \quad 30{,}3$

Mittel $\eta = 30{,}5$, $\eta' = 4{,}9$,

$L = 22{,}2$,

1. Lage $\eta = 101{,}4 \quad 101{,}0 \quad 101{,}2 \quad 101{,}0$

2. Lage $\eta = 100{,}4 \quad 100{,}2 \quad 100{,}3 \quad 100{,}2$

Mittel $\eta = 100{,}7$, $(\eta') = 4{,}9$, $\qquad E = 31950000.$

Gesammtmittel $E_{VI} = 31860000$, $\mathrm{E}_{VI} = 3{,}140 \, . \, 10^{-8}$.

Wahrscheinlicher Fehler $\pm\, 23000$, $\qquad \pm\, 0{,}0022$.

Die durch die vorstehenden Beobachtungen erhaltenen Werthe von E resp. E sind insofern noch unrichtig, als die benutzten Stäbchen mit ihren Axen nicht genau diejenigen Richtungen haben, welche oben unter den Bezeichnungen I bis IV vorhanden sind.

Die Gattungen I bis III sollen mit ihren Axen in die Krystallaxen fallen und weichen von ihnen nur wenig, im Maximum etwa 1,5° ab; da die Symmetrieaxen Richtungen größter oder kleinster Werthe von E sind, so geben Abweichungen der Richtung auf diese Größe einen Einfluß zweiter Ordnung, der nicht in Betracht kommt. Die Werthe E_I, E_{II}, E_{III} sind also als richtig anzusehen.

Die Gattungen IV bis VI sollen mit ihren Lägsaxen in Symmetrieebenen liegen und mit den in denselben befindlichen Symmetrieaxen den Winkel 45° einschliessen. Eine Abweichung ihrer Axe aus der Symmetrieebene giebt aus demselben Grunde, der eben erörtert ist, nur einen Einfluss zweiter Ordnung, der zu vernachlässigen ist; dagegen ist die Abweichung ihrer Axe von der vorgeschriebenen Lage in der Symmetrie in Rechnung zu ziehen.

Für Stäbchen, die in der *bc*-Ebene liegen, gilt

$$(\mathrm{E}_{IV}) = s_{22}\beta^4 + s_{33}\gamma^4 + (s_{44} + 2s_{23})\beta^2\gamma^2.$$

Ist $\qquad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\delta), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\delta)$ so giebt dies

$$(\mathrm{E}_{IV}) = s_{22}(\tfrac{1}{4} + \delta) + s_{33}(\tfrac{1}{4} - \delta) + \tfrac{1}{4}\,(s_{44} + 2s_{23})$$

oder, wenn man E_{IV}, E_{II}, E_{III} im früheren Sinne benutzt,

$$(\mathrm{E}_{IV}) = \mathrm{E}_{IV} + (\mathrm{E}_{II} - \mathrm{E}_{III})\,\delta_2.$$

Da aber E_{II} und E_{III} direct richtig beobachtet sind, so erhält man aus dem durch Beobachtung gefundenem (E_{IV}) das corrigirte nach der einfachen Formel:

$$\mathrm{E}_{IV} = (\mathrm{E}_{IV}) - (\mathrm{E}_{II} - \mathrm{E}_{III})\,\delta_2,$$

ebenso auch:

$$E_V = (E_V) - (E_{II} - E_I)\delta_3,$$
$$E_{VI} = (E_{VI}) - (E_I - E_{II})\delta_1.$$

Hierin bezeichnet δ_1, δ_2, δ_3 resp. die Größe, um welche der Winkel zwischen der Axe des Stäbchens und der *a*-, *b*- oder *c*-Axe den Werth 45° überschreitet.

Diese Winkel zu messen boten sich zwei Wege.

Da bei dem Ausschneiden der Stäbchen aus der dazu hergestellten Platte durch mechanische Vorrichtungen der Parallelismus der Schnitte erhalten wird und durch das Schleifen der abgesägten Stücke nur eine sehr kleine Veränderung in der Lage der Flächen hervorgebracht werden kann, so bieten sich die Reste der benutzten Platten von selbst zur Bestimmung der Winkel.

Mittelst eines gutgearbeiteten Anlegegoniometers war es möglich, auf diese Weise bis auf 0,1° zu constatiren, daß die Längsaxe der Gattung IV mit der Prismenkante, d. h. der *c*-Axe, sehr genau den Winkel 43°,8 einschloß, die Gattung V den Winkel 45°,1. Es war also $\delta_2 = 1°,2$, $\delta_3 = 0°,1$.

Die Gattung VI gestattete leider diese Behandlung nicht, da die zu benutzenden Krystallflächen nicht vollkommen eben waren. Hier mußte die optische Bestimmungsmethode eintreten, die auf der Aufsuchung der Polarisationsebenen des normal durch die Stäbchen fortgepflanzten Lichtes beruht. Diese Methode ist deswegen für unsern Zweck bedenklich, weil es nicht ausgeschlossen ist, daß durch irgendwelche Spannungen, die auf das elastische Verhalten bekanntlich nicht einwirken, das optische Verhalten beeinflußt wird. Wenigstens hat Herr Dr. Drude, der diese Beobachtungen anstellte, gefunden, daß bei den Gattungen IV und V die nach den beiden genannten Methoden erhaltenen Orientirungen nicht übereinstimmen. Für Gattung VI hat er als Mittel aus zahlreichen Messungen den Werth $\delta_1 = 0°,35$ gefunden, und die Messung mit dem Anlegegoniometer zeigte, daß dieser Werth nahe richtig sein muß. Hiernach würde folgendes corrigirte System Constanten folgen:

$$E_I = (4{,}341 \pm 0{,}0023)\,10^{-8}, \quad E_{IV} = (3{,}747 \pm 0{,}0027)\,10^{-8},$$
$$E_{II} = (3{,}460 \pm 0{,}0023)\,10^{-8}, \quad E_V = (3{,}456 \pm 0{,}0016)\,10^{-8},$$
$$E_{III} = (3{,}771 \pm 0{,}0026)\,10^{-8}, \quad E_{VI} = (3{,}145 \pm 0{,}0022)\,10^{-8}.$$

Drillungen.

Ic No. 1. $L = 22{,}32$, $B = 3778$, $D = 558{,}1$,

lR.	$G + 40$, $\sigma =$	139,5	139,5	139,4	139,8	140,1	140,2,	$\rho = 1{,}8$
	$G + 20$, $\sigma =$	78,3	78,5	78,4	78,1	78,4	78,2,	$\rho = 1{,}8$
	$G +$, $\sigma =$	16,9	16,9	16,9	16,8	16,9,		$\rho = 2{,}2$
rR.	$G + 40$, $\sigma =$	140,6	140,3	140,4	140,1	140,1	140,1,	$\rho = 1{,}8$
	$G + 20$, $\sigma =$	78,6	78,8	78,6	78,5	78,4	78,4,	$\rho = 1{,}5$
	G , $\sigma =$	17,3	17,5	17,1	17,3	17,3,		$\rho = 1{,}4$

$\sigma_{40} = 122{,}9$, $\delta T = -70000$ $(\mathfrak{T} = 13410000.)$

Ic No. 2. $L = 21{,}66$, $B = 3773$, $D = 553{,}1$,

rR.	$G + 40$, $\sigma =$	139,2	139,1	139,2	139,2	138,9	138,9,	$\rho = 2{,}3$
	$G + 20$, $\sigma =$	77,7	77,8	77,8	77,8	77,8	77,8,	$\rho = 2{,}0$
	G , $\sigma =$	17,2	17,1	17,1	17,2	17,2,		$\rho = 1{,}8$
lR.	$G + 40$, $\sigma =$	138,9	138,8	138,9	138,8	138,8	139,0,	$\rho = 1{,}5$
	$G + 20$, $\sigma =$	78,2	78,1	78,3	78,3	78,3	78,3,	$\rho = 1{,}0$
	G , $\sigma =$	17,4	17,2	17,2	17,1	17,1,		$\rho = 1{,}4$

$\sigma_{40} = 121{,}8$, $\delta T = -70000$ $\mathfrak{T} = 13500000.$

Ic No. 3. $L = 23{,}51$, $B = 3762$, $D = 553{,}8$,

lR.	$G + 40$, $\sigma =$	151,1	150,9	150,8	150,9	151,0	150,6,	$\rho = 1{,}2$
	$G + 20$, $\sigma =$	84,9	84,8	84,7	84,8	84,7	84,6,	$\rho = 1{,}6$
	G , $\sigma =$	18,5	18,7	18,6	18,5	18,5,		$\rho = 1{,}6$
rR.	$G + 40$, $\sigma =$	150,2	150,0	149,8	149,8	149,8	149,8,	$\rho = 3{,}7$
	$G + 20$, $\sigma =$	83,6	83,6	83,4	83,4	83,5	83,4,	$\rho = 3{,}6$
	G , $\sigma =$	17,9	17,7	17,7	17,6	17,6,		$\rho = 3{,}4$

$\sigma_{40} = 132{,}3$, $\delta T = -30000$ $\mathfrak{T} = 13550000.$

$L = 20{,}87$,

rR.	$G + 40$, $\sigma =$	135,3	135,0	135,0	134,8	135,1	134,9,	$\rho = 1{,}5$
	$G + 20$, $\sigma =$	75,8	75,8	75,6	75,7	75,5	75,6,	$\rho = 1{,}4$
	G , $\sigma =$	16,6	16,6	16,6	16,6,			$\rho = 1{,}3$
lR.	$G + 40$, $\sigma =$	134,3	134,4	134,3	134,6	134,6	134,6,	$\rho = 1{,}8$
	$G + 20$, $\sigma =$	75,4	75,3	75,4	75,6	75,3	75,4,	$\rho = 1{,}4$
	G , $\sigma =$	17,0	17,1	17,1	16,9,			$\rho = 1{,}0$

$\sigma_{40} = 117{,}9$, $\delta T = -20000$, $\mathfrak{T} = 13480000.$

Ic No. 4. $L = 17{,}85$, $B = 3762$, $D = 562{,}5$.

rR.	$G + 40$, $\sigma =$	108,9	108,5	108,5	108,3	108,2	108,2,	$\rho = 2{,}0$
	$G + 20$, $\sigma =$	60,8	60,8	60,8	60,6	60,6	60,7,	$\rho = 2{,}2$
	G , $\sigma =$	13,1	13,1	13,3	13,3	13,0,		$\rho = 1{,}8$
lR.	$G + 40$, $\sigma =$	108,3	108,5	108,5	108,6	108,5	108,5,	$\rho = 1{,}7$
	$G + 20$, $\sigma =$	61,2	61,1	61,0	61,1	61,0	60,8,	$\rho = 1{,}5$
	G , $\sigma =$	13,6	13,5	13,6	13,6	13,6,		$\rho = 1{,}3$

$\sigma_{40} = 95{,}1$, $\delta T = -70000$ $\mathfrak{T} = 13630000.$

Ic No. 5. $L = 15{,}36$, $B = 3767$, $D = 550{,}7$.

lR.	$G + 40$, $\sigma =$	100,3	100,0	100,3	100,0	100,4	100,4,	$\rho = 1{,}6$
	$G + 20$, $\sigma =$	56,6	56,6	56,6	56,6	56,5	56,6,	$\rho = 1{,}2$
	G , $\sigma =$	12,8	12,6	12,6	12,6	12,6,		$\rho = 0{,}9$
rR.	$G + 40$, $\sigma =$	99,3	99,6	99,5	99,2	99,3	99,2,	$\rho = 1{,}8$
	$G + 20$, $\sigma =$	55,8	55,6	55,5	55,4	55,6	55,6,	$\rho = 1{,}5$
	G , $\sigma =$	12,1	12,1	12,0	12,1	12,1,		$\rho = 1{,}2$

$\sigma_{40} = 87{,}45$, $\delta T = -70000$ $\mathfrak{T} = 13510000.$

Der Werth von T für das Stäbchen Ic No. 1., weicht merklich, wenn auch nicht erheblich, von den übrigen ab; ich schiebe dies auf den Umstand, daß das Stäbchen einen kleinen Sprung parallel einer Schmalseite besaß, der zwar bei der Biegung ohne Einfluß bleiben, aber die Drillung ein wenig vergrößern, d. h. T verkleinern mußte. Es ist daher vielleicht angemessen, diesen Werth von der Beobachtung des Gesammtmittels auszuschließen. Man erhält dann:

Gesammtmittel $\mathbf{T}_{Ic} = 13530000$, $\mathbf{T}_{Ic} = 7,391 . 10^{-8}$.
Wahrscheinlicher Fehler ± 18000, $\pm 0,0098$

IIa No. 1. $L = 21,06$, $B = 3786$, $D = 538,5$,

rR.	$G + 40$, $\sigma =$	147,4	147,3	147,7	147,5	147,6	147,6,	$\rho = 3,6$
	$G + 20$, $\sigma =$	82,5	82,4	82,5	82,4	82,4	82,3,	$\rho = 3,4$
	G, $\sigma =$	17,6	17,4	17,4	17,6	17,6,		$\rho = 3,6$
lR.	$G + 40$, $\sigma =$	149,1	149,0	148,9	148,9	148,9	148,8,	$\rho = 1,1$
	$G + 20$, $\sigma =$	84,2	83,8	84,0	83,9	83,9	83,8,	$\rho = 1,2$
	G, $\sigma =$	19,2	19,0	19,0	19,1,			$\rho = 1,1$

$\sigma_{40} = 129,95$, $\delta T = -80000$ $\mathbf{T} = 13360000$.

IIa No. 2. $L = 21,75$, $B = 3775$, $D = 535,7$,

lR.	$G + 40$, $\sigma =$	154,8	154,8	154,9	154,8	154,5	154,5,	$\rho = 2,0$
	$G + 20$, $\sigma =$	87,2	86,8	86,7	86,4	86,7	86,8,	$\rho = 1,8$
	G, $\sigma =$	19,4	19,1	19,4	19,3	19,0,		$\rho = 1,6$
rR.	$G + 40$, $\sigma =$	154,8	154,8	154,7	154,8	154,7	154,9,	$\rho = 2,4$
	$G + 20$, $\sigma =$	87,2	87,3	87,1	87,2	87,1	86,9,	$\rho = 2,2$
	G, $\sigma =$	19,1	19,0	18,9	19,1	19,0,		$\rho = 2,1$

$\sigma_{40} = 135,6$, $\delta T = -80000$ $\mathbf{T} = 13340000$.

$L = 18,18$

rR.	$G + 40$, $\sigma =$	131,0	130,9	130,8	130,8	131,0	130,8,	$\rho = 0,6$
	$G + 20$, $\sigma =$	73,7	73,7	73,4	73,5	73,6	73,6,	$\rho = 0,6$
	G, $\sigma =$	16,5	16,6	16,7,				$\rho = 0,7$
lR.	$G + 40$, $\sigma =$	130,6	130,8	130,6	131,0	131,0	131,1,	$\rho = 1,6$
	$G + 20$, $\sigma =$	73,4	73,5	73,7	74,1	74,0	73,9,	$\rho = 1,2$
	G, $\sigma =$	16,2	16,5	16,5	16,5,			$\rho = 1,2$

$\sigma_{40} = 114,3$, $\delta T = -30000$, $\mathbf{T} = 13280000$.

IIa No. 3. $L = 20,42$, $B = 3749$, $D = 533,4$

rR.	$G + 40$, $\sigma =$	147,9	147,9	148,0	148,1	147,9	148,2,	$\rho = 3,6$
	$G + 20$, $\sigma =$	82,6	82,6	82,4	82,4	82,4	82,3,	$\rho = 3,6$
	G, $\sigma =$	17,6	17,6	17,5	17,6			$\rho = 3,4$
lR.	$G + 40$, $\sigma =$	148,9	148,9	148,7	148,8	148,7	148,9,	$\rho = 1,8$
	$G + 20$, $\sigma =$	83,9	83,8	83,8	83,7	83,6	83,5,	$\rho = 1,6$
	G, $\sigma =$	18,8	18,9	18,8	18,7	18,8,		$\rho = 1,4$

$\sigma_{40} = 130,2$, $\delta T = -80000$ $\mathbf{T} = 13440000$.

IIa No 4. $L = 20,34$, $B = 3770$, $D = 537,5$

lR.	$G + 30$, $\sigma =$	112,6	112,7	112,7	112,9	112,8	112,8,	$\rho = 2,6$
	$G + 25$, $\sigma =$	65,2	65,1	65,1	65,2	65,2	65,2,	$\rho = 2,5$
	G, $\sigma =$	17,7	17,7	17,7	17,8	17,8,		$\rho = 2,3$

		σ =						ρ =
rR.	$G + 30$	112,7	112,8	112,7	112,1	112,4	112,4	2,4
	$G + 15$	65,2	64,7	64,8	65,0	64,9	64,9	2,1
	G	17,8	17,6	17,6	17,5	17,5		2,0

$\sigma_{30} = 95{,}05$, $\delta T = -80000$ $\mathfrak{T} = 13370000.$

IIa No. 5. $L = 18{,}95$, $B = 3758$, $D = 534{,}1$.

		σ =						ρ =
rR.	$G + 30$	106,6	106,9	106,8	106,7	106,7	106,7	3,3
	$G + 15$	61,3	61,2	61,0	61,0	60,9	60,8	3,4
	G	15,8	15,9	15,7	15,6	15,7		3,5
lR.	$G + 30$	107,1	107,1	107,3	107,3	107,3	107,2	1,8
	$G + 15$	61,9	62,0	61,9	61,8	61,7	61,8	2,0
	G	17,0	16,7	16,7	16,8	16,9		1,8

$\sigma_{30} = 90{,}65$, $\delta T = -80000$ $\mathfrak{T} = 13350000.$

Gesammtmittel $\mathfrak{T}_{IIa} = 13360000$, $\mathrm{T}_{IIa} = 7{,}485 \cdot 10^{-8}$.

Wahrscheinlicher Fehler ± 14000 $\pm 0{,}0078$.

IIIb No. 1. $L = 26{,}20$, $B = 3845$, $D = 567{,}5$

		σ =						ρ =
rR.	$G + 40$	182,5	182,3	182,2	182,4	182,3	182,2	2,4
	$G + 20$	102,2	102,0	101,8	101,9	101,9	102,1	2,6
	G	22,0	22,1	21,9	22,0	22,1		2,4
lR.	$G + 40$	183,0	182,8	182,9	183,2	183,1	183,0	2,8
	$G + 20$	102,7	102,5	102,8	102,5	102,6	102,4	2,6
	G	22,2	22,1	22,1	21,9	22,0		2,7

$\sigma_{30} = 160{,}6$, $\delta T = -120000$ $\mathfrak{T} = 11080000.$

$L = 22{,}26$,

		σ =						ρ =
rR.	$G + 40$	156,1	156,4	156,5	156,7	157,0	156,3	4,2
	$G + 20$	87,6	87,7	78,9	87,7			4,0
	G	19,2	18,9	19,1	18,9			3,6
lR.	$G + 40$	157,1	156,9	156,9	157,4	156,9	157,0	4,8
	$G + 20$	88,1	88,0	88,2	88,3			3,7
	G	19,2	19,4	19,3	19,2			3,6

$\sigma_{40} = 137{,}65$, $\delta T = -60000$ $\mathfrak{T} = 11040000.$

IIIb No. 2. $L = 26{,}95$, $B = 3877$, $D = 580{,}6$

		σ =						ρ =
lR.	$G + 40$	176,6	176,4	176,3	176,2	176,2	176,1	2,0
	$G + 20$	99,3	99,2	99,2	99,2	98,8	99,0	2,4
	G	21,8	21,8	21,9	21,6	21,8		2,8
	$G + 40$	175,5	175,6	175,7	175,7	175,8	175,8	2,0
	$G + 20$	99,0	98,8	98,9	98,8	98,8	98,8	1,7
	G	21,7	21,5	21,6	21,7	21,7		1,3

$\sigma_{40} = 154{,}3$, $\delta T = -80000$ $\mathfrak{T} = 11040000.$

$L = 25{,}05$,

		σ =				ρ =
lR.	$G + 40$	164,6	164,7	164,8	164,9	3,0
	$G + 20$	92,6	92,7	92,5	92,4	2,7
	G	20,0	20,2	20,1	20,2	3,2
rR.	$G + 40$	165,3	165,1	165,6	165,4	1,8
	$G + 20$	92,8	92,9	92,7	93,0	1,6
	G	20,9	20,8	20,9	20,9	1,2

$\sigma_{40} = 144{,}6$, $\delta T = -40000$ $\mathfrak{T} = 10980000.$

IIIb No. 3. $L = 23,25$, $B = 3870$, $D = 569,7$.

$rR.$	$G + 40$,	$\sigma =$	158,6	158,7	158,7	158,5	158,5	158,4,	$\rho = 1,4$
	$G + 20$,	$\sigma =$	88,5	88,6	88,5	88,5	88,5	88,5,	$\rho = 1,2$
	G ,	$\sigma =$	19,3	19,5	19,5	19,5,			$\rho = 1,0$
$lR.$	$G + 40$,	$\sigma =$	160,3	160,3	160,1	160,3	160,2	160,1,	$\rho = 0,8$
	$G + 20$,	$\sigma =$	89,9	89,9	89,9	90,1	90,1	90,0,	$\rho = 0,8$
	G ,	$\sigma =$	20,0	20,2	20,1	20,1,			$\rho = 0,9$
		$\sigma_{40} =$	139,6,	$\delta T = -120000$					$T = 11100000.$
		$L =$	20,76,						
$lR.$	$G + 40$,	$\sigma =$	144,3	144,5	144,3	144,4,			$\rho = 1,2$
	$G + 20$,	$\sigma =$	81,1	80,9	81,1	81,3,			$\rho = 1,6$
	G ,	$\sigma =$	17,7	17,8	17,7	17,7,			$\rho = 1,5$
$rR.$	$G + 40$,	$\sigma =$	144,5	144,4	144,5	144,1,			$\rho = 1,1$
	$G + 20$,	$\sigma =$	81,3	81,1	81,3	81,2,			$\rho = 1,1$
	G ,	$\sigma =$	18,2	18,4	18,4	18,3,			$\rho = 1,7$
		$\sigma_{40} =$	126,4,	$\delta T = -60000$					$T = 11020000.$

Gesammtmittel $T_{IIIb} = 11040000$, $T_{IIIb} = 90,59 . 10^{-8}$.
Wahrscheinlicher Fehler ± 12000 $\pm 0,0099$.

Resultate.

Die im Obigen bestimmten Zahlen stellen wir hier nochmals zusammen und zwar beschränken wir uns auf die Größen E und T, da diese für die Anwendungen der Theorie direct in Betracht kommen.

Wir haben gefunden

$$
\begin{aligned}
E_I &= (4,341 \pm 0,0023)\, 10^{-8}, & E_{IV} &= (3,747 \pm 0,0027)\, 10^{-8}, \\
E_{II} &= (3,460 \pm 0,0023)\, 10^{-8}, & E_V &= (3,456 \pm 0,0016)\, 10^{-8}, \\
E_{III} &= (3,771 \pm 0,0026)\, 10^{-8}, & E_{VI} &= (3,145 \pm 0,0022)\, 10^{-8}, \\
T_{IIc} &= T_{IIIb} = (9,059 \pm 0,0099)\, 10^{-8}, \\
T_{IIIa} &= T_{Ic} = (7,391 \pm 0,0098)\, 10^{-8}, \\
T_{Ib} &= T_{IIa} = (7,485 \pm 0,0078)\, 10^{-8}.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Der wahrscheinliche Fehler beträgt im Mittel noch nicht ein Tausendtheil des gesammten Werthes und da das für die Beobachtung benutzte Material tadellos war, so kann eine Unsicherheit dieser Zahlen über diesen Betrag hinaus wohl nur entweder von etwaigen Fehlern bei der recht schwierigen Auswerthung der Sphärometers oder von Fehlern bei der Bestimmung der Dimensionen, welche in Unvollkommenheiten der Politur, fremdartigen Oberflächenschichten u. dergl. ihren Grund haben, herrühren. Aber derartige Fehlerquellen, welche auf alle nahe gleich dicken Stäbchen in gleicher Weise einwirken, modificiren auch die Werthe der s_{hk} und c_{hk} im

gleichen Verhältnisse, so dass sie auf die interessanteste Frage nach dem Verhältniss der Constanten c_{hk} ohne Einfluß bleiben.

Die vorstehenden Werthe bestimmen zunächst nach den Formeln (6), (8) und (10) sogleich folgendes System:

$$
\begin{aligned}
s_{11} &= (4{,}341 \pm 0{,}0023)\,10^{-8}, & s_{23} &= -(0{,}651 \pm 0{,}0083)\,10^{-8},\\
s_{22} &= (3{,}460 \pm 0{,}0023)\,10^{-8}, & s_{31} &= -(0{,}840 \pm 0{,}0077)\,10^{-8},\\
s_{33} &= (3{,}771 \pm 0{,}0026)\,10^{-8}, & s_{12} &= -(1{,}353 \pm 0{,}0067)\,10^{-8},\\
s_{44} &= (9{,}059 \pm 0{,}0099)\,10^{-8}, & &\\
s_{55} &= (7{,}391 \pm 0{,}0098)\,10^{-8}, & &\\
s_{66} &= (7{,}485 \pm 0{,}0078)\,10^{-8}, & &
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Hierin sind wahrscheinlichen Fehler der s_{23}, s_{31} und s_{12} durch die Wurzeln aus der Summe der Quadrate der wahrscheinlichen Fehler ihrer Theile nach den Formeln (8) gegeben; die s_{23}, s_{31} und s_{12} sind naturgemäß am ungenausten bestimmt, da sie sich aus je vier völlig unabhängigen Beobachtungsreihen bestimmen.

Diese neun Werthe (26) sind, wie oben ausgeführt, die für alle Anwendungen maßgebenden Aggregate der Elasticitätsconstanten, welche in andern Combinationen kaum vorkommen dürften; darum ist die vorstehende Zusammenstellung eines der Hauptresultate unserer Untersuchung.

Die erhaltenen Zahlen gestatten zunächst nach der Formel (5) den allgemeinen Ausdruck für den Dehnungs-Coefficienten E zu bilden. Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E} = 1/E = [&4{,}341\,.\,\alpha^4 + 3{,}460\,.\,\beta^4 + 3{,}771\,.\,\gamma^4\\
&+ 2(3{,}879\,.\,\beta^2\gamma^2 + 2{,}856\,.\,\gamma^2\alpha^2 + 2{,}390\,.\,\alpha^2\beta^2)]\,.\,10^{-8}.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Maxima und Minima erlangt E nur in den Hauptebenen; dieselben haben folgende Lagen und Werthe:

I. *bc*-Ebene, $\sphericalangle L, a = \frac{\pi}{2}$

$$
\begin{aligned}
\sphericalangle L, b &= 0, & \mathrm{E}_{II} &= 3{,}460\,.\,10^{-8},\\
\sphericalangle L, b &= 63^\circ 5', & (\mathrm{E}_{IV}) &= 3{,}792\,.\,10^{-8},\\
\sphericalangle L, b &= 90^\circ, & \mathrm{E}_{III} &= 3{,}771\,.\,10^{-8}.
\end{aligned}
$$

II. *ca*-Ebene, $\sphericalangle L, b = \frac{\pi}{2}$

$$
\begin{aligned}
\sphericalangle L, c &= 0, & \mathrm{E}_{III} &= 3{,}771\,.\,10^{-8},\\
\sphericalangle L, c &= 39^\circ 26', & (\mathrm{E}_{V}) &= 3{,}422\,.\,10^{-8},\\
\sphericalangle L, c &= 90^\circ, & \mathrm{E}_{I} &= 4{,}341\,.\,10^{-8},
\end{aligned}
$$

III. *ab*-Ebene, $\quad < L, c = \frac{\pi}{2}$

$$
\begin{aligned}
< L, a &= 0, & E_I &= 4{,}341 . 10^{-8}, \\
< L, a &= 53^{\circ} 08', & (E_{VI}) &= 3{,}128 . 10^{-8}, \\
< L, a &= 90^{\circ}, & E_{II} &= 3{,}460 . 10^{-8}.
\end{aligned}
$$

Das Minimum von E in der *ab*-Ebene giebt den kleinsten Werth, der für Topas existirt, und damit den kleinsten bisher bekannten überhaupt; es entspricht ihm ein Elasticitätscoefficient oder, nach der von mir vorgeschlagenen Bezeichnung, ein Dehnungswiderstand von 32450000 g.

Die Abhängigkeit von E mit der Richtung wird durch Fig. (1) veranschaulicht, welche die Gestalt der drei Schnittcurven der Oberfläche (27) mit den Symmetrieebenen darstellt. Die Größe der Längsdehnung oder Biegung eines Cylinders von constanten Dimensionen ist bei wechselnder Orientirung seiner Axe mit E proportional.

Der allgemeine Werth des Drillungscoefficienten T lautet nach dem System (26) und der Formel (9):

$$
\begin{aligned}
T = 1/T = [&17{,}36 . \alpha^2 \alpha_1^2 + 13{,}84 . \beta^2 \beta_1^2 + 15{,}08 . \gamma^2 \gamma_1^2 \\
&+ 12{,}910 . \beta\beta_1 \gamma\gamma_1 + 8{,}06 . \gamma\gamma_1 \alpha\alpha_1 + 4{,}146 . \alpha\alpha_1 \beta\beta_1 \\
&+ 9{,}059 (\beta^2 \gamma_1^2 + \gamma^2 \beta_1^2) + 7{,}391 (\gamma^2 \alpha_1^2 + \alpha^2 \gamma_1^2) + 7{,}485 (\alpha^2 \beta_1^2 + \beta^2 \alpha_1^2)] 10^{-8};
\end{aligned}
\tag{28}
$$

er eignet sich weniger für die Discussion und graphische Darstellung, da er von zwei Richtungen (L und B) abhängig ist. Einfache Werthe erhält man, wenn man die eine der beiden Richtungen in eine Axe festlegt, also z. B. nach der Abhängigkeit des Drillungscoefficienten von der Lage der Querdimensionen des Prismas fragt, wenn die Längsaxe in die *a*-Axe fällt. Dafür wird

$$T = 7{,}391 . \gamma_1^2 + 7{,}485 . \beta_1^2,$$

— ein Werth, der zeigt, daß Maxima und Minima eintreten, wenn die Querdimensionen ebenfalls in Krystallaxen liegen.

Sehr übersichtlich ist der Werth des Drillungscoefficienten für einen Kreiscylinder, welcher nach (24) hier lautet:

$$
\begin{aligned}
T' = (&14{,}88 . \alpha^2 + 16{,}54 . \beta^2 + 16{,}45 . \gamma^2 \\
&- 2{,}10 . \beta^2 \gamma^2 + 9{,}60 . \gamma^2 \alpha^2 + 12{,}09 . \alpha^2 \beta^2) . 10^{-8}
\end{aligned}
\tag{29}
$$

oder

$$
\begin{aligned}
= (&14{,}88\, \alpha^4 + 16{,}54\, \beta^4 + 16{,}45\, \gamma^4 \\
&+ 30{,}89\, \beta^2 \gamma^2 + 40{,}89\, \gamma^2 \alpha^2 + 43{,}51\, \alpha^2 \beta^2) . 10^{-8}.
\end{aligned}
$$

Die Maxima und Minima in den Hauptschnitten haben folgende Lagen und Werthe:

$$
\begin{array}{lll}
\text{I.}\ \ bc\text{-Ebene}, & \sphericalangle L, a = \frac{\pi}{2} & \\
\sphericalangle L, b = 0, & T'_{II} & = 16{,}54 . 10^{-8}, \\
\sphericalangle L, b = 44^{\circ}\,54', & (T'_{IV}) & = 15{,}97 . 10^{-8}, \\
\sphericalangle L, b = 90^{\circ}, & T'_{III} & = 16{,}45 . 10^{-8}, \\
\text{II.}\ \ ca\text{-Ebene}, & \sphericalangle L, b = \frac{\pi}{2}, & \\
\sphericalangle L, c = 0, & T'_{III} & = 15{,}45 . 10^{-8}, \\
\sphericalangle L, c = 44^{\circ}\,6', & (T'_{V}) & = 18{,}08 . 10^{-8}, \\
\sphericalangle L, c = 90^{\circ}, & T'_{I} & = 14{,}88 . 10^{-8}, \\
\text{III.}\ \ ab\text{-Ebene}, & \sphericalangle L, c = \frac{\pi}{2}, & \\
\sphericalangle L, a = 0, & T'_{I} & = 14{,}88 . 10^{-8}, \\
\sphericalangle L, a = 45^{\circ}\,51', & (T'_{VI}) & = 18{,}75 . 10^{-8}, \\
\sphericalangle L, a = 90^{\circ}, & T'_{II} & = 16{,}54 . 10^{-8}.
\end{array}
$$

Die Abhängigkeit der Größe T′ von der Richtung wird durch die Figur (2) dargestellt, in welcher die drei Hauptschnitte der Oberfläche (29) gezeichnet sind. Die Größe der Drillung eines Kreiscylinders von constanten Dimensionen ist bei wechselnder Richtung seiner Axe mit T′ proportional.

Aus dem System der s_{hk} (26) folgen weiter die Coefficienten der linearen Dilatation bei allseitig gleichem Druck nach (16) folgendermaßen:

$$
(30) \quad A_a = 2{,}148 . 10^{-8}, \qquad A_b = 1{,}456 . 10^{-8}, \qquad A_c = 2{,}280 . 10^{-8};
$$

ebenso der Coefficient der dabei eintretenden cubischen Dilatation nach (17):

$$
M = 5{,}884 . 10^{-8},
$$

letzterer noch kleiner als selbst für Beryll, für welchen die Beobachtungen $M = 7{,}255 . 10^{-8}$ ergeben hatten.

Die Elasticitätsconstanten selbst, wie sie für das rhombische Krystallsystem in den Formeln (1) definirt sind, bestimmen sich nach den Gleichungen (14), natürlich durch die complicirte Rechnung zum Theil mit verhältnißmäßig geringer Genauigkeit, wie folgt:

$$
(31) \quad
\begin{array}{lll}
c_{11} = 28{,}7_0 . 10^6, & c_{22} = 35{,}6_0 . 10^6, & c_{33} = 30{,}0_2 . 10^6, \\
c_{44} = 11{,}0_4 . 10^6, & c_{55} = 13{,}5_8 . 10^6, & c_{66} = 13{,}3_6 . 10^6, \\
c_{23} = 9{,}0_1 . 10^6, & c_{31} = 8{,}6_1 . 10^6, & c_{12} = 12{,}8_4 . 10^6.
\end{array}
$$

Diese Constanten setzen, wie auch das System der s_{hk} (26), die im Eingang erörterte Aufstellung des Krystalles voraus.

Bestände der Topas aus Molekülen, deren Wechselwirkungen nur von den Entfernungen abhängig, also nicht polar wären, so müßten nach (15) die Relationen gelten:

$$c_{44} = c_{23}, \qquad c_{55} = c_{31}, \qquad c_{66} = c_{12}.$$

Wie gering man immer die Zuverlässigkeit der erhaltenen Zahlen anschlagen möge, so können dieselben als Stütze dieser Beziehungen doch in keinem Falle gelten. Die Beobachtungen lassen also auf eine starke Polarität der Moleküle des Topases schliessen. Die von Herrn Prof. Riecke[1]) ausgesprochne Anschauung, daß diese Polarität electrischen Ursprunges ist, und Krystalle, welche sie besitzen, pyroelectrisch sein müssen, findet durch dieses Resultat bei den bekannten electrischen Eigenschaften des Topases eine neue Stütze.

Schließlich können wir die gefundenen Werthe noch benutzen um die Größen q_a, q_b, q_c zu berechnen, welche nach dem zu den Formeln (22) Gesagten das Maaß der thermischen Abstoßung parallel den Hauptaxen darstellen.

Nach Beobachtungen von Fizeau[2]) sind die thermischen lineären Dilatationscoefficienten des Topases parallel seinen Axen

$$a_a = 0{,}00000484, \qquad a_b = 0{,}00000414, \qquad a_c = 0{,}00000592.$$

Daraus folgt nach den genannten Formeln:

$$q_a = 243, \qquad q_b = 263, \qquad q_c = 256.$$

Diese Werthe, welche im Vergleich zu sonst bekannten außerordentlich groß sind, sagen aus, daß der Topas bei einer Erwärmung eine höchst bedeutende Druckkraft entwickelt. Um nämlich die Dilatation aufzuheben, welche er parallel den Axen bei der Erwärmung um nur 1° C erfährt, würden auf die Flächen eines Prismas normal zu den Axen die Drucke von resp.

243 263 256

Gramm pro Quadratmillimeter, oder circa 24, 26 und 25 Atmosphären ausgeübt werden müssen.

Bemerkenswerth ist die sehr nahe gleiche Größe dieser drei Zahlen, welche zeigt, daß die Dilatation, welche durch eine Erwärmung eines Topases hervorgebracht wird, sehr vollständig durch einen allseitig gleichen Druck aufgehoben werden kann.

1) Riecke, Göttinger Nachr. 1887, No, 7, p. 194.

2) Fizeau, Pogg. Ann. Bd. 135, p. 383, 1868.

Baryt.

Das Material für die Beobachtungen lieferte mir ein prachtvoller Krystall von Alston Moor in Cumberland, den ich der Güte des Herrn Prof. Hirschwald in Charlottenburg verdanke. Seine Gestalt war tafelförmig bei einer Dicke von über 2^{cm} und Querdimensionen von nahe 8^{cm}; obgleich in erheblichen Theilen von Sprüngen durchzogen, gestattete er doch bei einiger Ueberlegung neun Gattungen verschieden orientirter Stäbchen — also drei mehr, als zur Bestimmung der Constanten absolut nothwendig sind, — in für die Beobachtungen genügenden Dimensionen herzustellen; — ein großer Vortheil, wenn man berücksichtigt, daß die Hauptfrage, welche die Untersuchung zu stellen hat, das Verhältniß der Werthe der Elasticitätsconstanten betrifft, und es immerhin denkbar ist, daß verschiedene Fundorte Krystalle mit ein wenig verschiedenen absoluten Constantenwerthen liefern. Um so mehr fühle ich mich verpflichtet, Herrn Prof. Hirschwald für die Ueberlassung dieses schönen Stückes den herzlichsten Dank auszusprechen.

Die Herstellung der Stäbchen für die Messungen ist von den Herren Dr. Steeg und Reuter in Homburg v. d. Höhe in ganz vorzüglicher Weise ausgeführt, und die Präparate lassen bei der feinen Politur der Breitseiten die unvergleichliche Reinheit und Klarheit, welche der Krystall in seinem bei weitem grössten Theile besaß, auf's Deutlichste erkennen.

War sonach ein vollendet schönes Beobachtungsmaterial verfügbar, so bot doch die Ausführung der Beobachtungen, namentlich derjenigen der Drillung, ganz eigenthümliche Schwierigkeiten durch die außerordentliche Sprödigkeit und Spaltbarkeit des Baryts, welche z. B. diejenige des Flußspaths weit übertrifft. Für die Torsionsbeobachtungen war es nöthig, nahe den Enden kleine Stücke Bleifolie auf die Stäbchen aufzukitten, um dadurch den auf das Stäbchen zu setzenden Spiegelklemmen Halt zu geben, — darnach waren die Stäbchen mit ihren beiden Enden an dem Torsionsapparat durch Einklemmen oder Einkitten anzubringen und zu centriren — schließlich die Spiegelklemmen auf den Stäbchen zu befestigen —; bei allen diesen Operationen, wo die Stäbchen ungleichförmigen Erwärmungen und nicht unerheblichen Drucken ausgesetzt werden mußten, entstanden auch bei peinlichster Vorsicht leicht Sprünge, welche, wenn sie auch nicht das Stäbchen sogleich zerstörten, dasselbe doch für die Beobachtung untauglich machten. Und wenn alle diese gefährlichen Vorbereitungen glücklich überstanden waren, so sprang oft genug das Stäbchen, nach-

dem es bereits einige Belastungen ausgehalten hatte, aus unbekannten Gründen an einer Befestigungsstelle durch, so daß die ganzen mühsamen Vorbereitungen verloren waren. Unter diesen Umständen war es nöthig, alle einigermaßen brauchbaren Fragmente der Beobachtung zu unterwerfen, um eine Zuverlässigkeit der Endresultate zu erhalten, welche den Verbrauch so schönen Materials rechtfertigt.

Die von einem Stäbchen noch weiter benutzten Bruchstücke sind in den folgenden Tafeln durch an die Ordnungsnummer desselben angefügte Indices bezeichnet.

Die vorstehend beschriebene war aber keineswegs die einzige Schwierigkeit, welche sich aus der großen Spaltbarkeit des Baryts ergab; es besteht noch eine weitere, welche die Genauigkeit aller an so spaltbarem Material erhaltenen Constanten in Frage stellt.

Wiederholt habe ich bemerkt, daß bei der Erwärmung der Stäbchen behufs Aufkitten der Stanniolbeläge größere oder geringere Sprünge entstanden, welche sich bei der Abkühlung wieder schlossen, sodaß sie absolut unwahrnehmbar wurden, ja mitunter schlossen sich vorhandene Sprünge beim neuen Erwärmen und blieben auch nach der Abkühlung, sogar im polarisirten Lichte, unsichtbar. Man wird aber kaum annehmen dürfen, daß sie nun auch in ihrer Wirkung beseitigt seien; jedenfalls zeigte sich eine auffallende Neigung der Stäbchen parallel derartigen geschlossenen Sprüngen bei anderer Gelegenheit definitiv zu brechen, und bei dem früher gezeigten bedeutenden Einfluß, welchen kaum sichtbare Spalten auf die Beobachtung ausüben, ist es nur zu wahrscheinlich, daß auch jene geschlossenen Risse einen wenngleich kleineren Einfluß geben.

Ist nun aber hiernach anzunehmen, daß Sprünge vollständig unsichtbar werden und doch noch wirksam sein können — welche Garantie bietet das optisch tadellose Verhalten bei so leicht spaltenden Medien für normale Structur? Und wollte man auch bei der Handhabung der Stäbchen jede Erwärmung vermeiden, so wäre dieselbe bei ihrer Herstellung doch nicht zu umgehen, und die Wirkungen, denen der Krystall im Erdinnern ausgesetzt gewesen ist, entziehen sich nun gar völlig jeder Beurtheilung. Man wird hiernach wohlthun, den durch Beobachtung an so spaltbaren Medien erhaltenen Constantenwerthen nicht allzugroßes Gewicht beizulegen, zwischen verschiedenen an derselben Substanz erhaltenen Zahlen für die elastischen Widerstände aber der größeren auch mehr Vertrauen zu schenken, da diese wie manche andere Fehlerquellen (Oberflächenschichten, mangelhafte Politur) zu kleine Werthe veranlassen.

Die große Spaltbarkeit des Baryt wirkt endlich noch in einer dritten Hinsicht störend auf die Beobachtungen ein. Sehr spaltbare Substanzen nehmen bekanntlich nach verschiedenen Flächen verschieden leicht Politur an — eine Thatsache, die nach dem Mechanismus des Schleifens und Polirens leicht verständlich ist. Demgemäß ist eine uns schließlich als blank erscheinende Oberfläche je nach der verschiedenen Orientirung von verschiedener Structur, enthält speciell mehr oder weniger tiefe Poren, die durch herausgerissene winzige Fragmente gebildet sind und sich der Messung natürlich völlig entziehen.

Da nun diese Poren die Dicke der wirklich wirksamen Schicht vermindern, so muß die scheinbare Dicke der Stäbchen je nach der Orientirung der Breitseiten um verschiedene Beträge falsch sein. Ein Fehler von $0{,}001^{mm}$ macht aber die elastischen Coefficienten je nach Umständen bereits um den zwei- bis dreihundertsten Theil fehlerhaft; demgemäß tritt nicht nur eine Unsicherheit der absoluten Werthe um einen solchen Betrag leicht ein, sondern es kann auch in scheinbarem Widerspruch mit der Theorie geschehen, daß Stäbchen mit gleicher Orientirung der Längs- aber verschiedener der Querrichtung verschiedene Biegungsconstanten ergeben. Auch hier ist im Allgemeinen der größere Werth der wahrscheinlichere.

Freilich giebt es auch eine Fehlerquelle, die entgegengesetzt wirkt als die erwähnten, nämlich der Einfluß der bei der Drillung aufgelegten Stanniolbelege. Bei dem sehr kleinen Torsionswiderstand einiger Gattungen von Stäbchen gewann dieselbe einen ganz außerordentlichen Einfluß; sie ist wie oben beim Topas in den Tafeln mit δT bezeichnet. Wie beim Topas sind auch hier Controlbeobachtungen zur Bestimmung desselben angestellt worden, indem absichtlich große Stücke der Belege zwischen die Schneiden eingeschaltet wurden; aber die Resultate waren wenig übereinstimmend, offenbar weil die angewandte Kittmenge nicht immer die gleiche sein konnte. Das beste Verfahren ist, die Stanniolbeläge nur am äußern Ende aufzukitten, sodaß sie im Uebrigen lose am Stäbchen anliegen, aber dies bietet bei einem so äußerst zerbrechlichen Material wie Baryt technische Schwierigkeiten; da man nicht eine einzelne Stelle für sich erwärmen kann, so verfließt der Kitt leicht in den ganzen Zwischenraum zwischen Stanniol und Krystall, und auch die naheliegenden Auswege, wie z. B. das Emporbiegen eines Theiles des Belages beim Aufkitten, haben sich nicht bewährt.

Alles in Allem hat sich die Bestimmung zuverlässiger Werthe trotz der langjährigen Erfahrungen wiederum als eine recht schwie-

rige Aufgabe erwiesen, die eine außerordentlich große Zahl von Messungen erfordert. Beispielsweise erfordert jede einzelne Reihe von Drillungsbeobachtungen über 200 Ablesungen und die Gesammtzahl der am Baryt nur zur Bestimmung der drei Drillungs-Coefficienten T angestellten Ablesungen am Torsionsapparat beträgt über 6000, die ich ihrer großen Subtilität wegen Niemandem anvertrauen mochte, während ich bei den Messungen der Dimensionen und der Biegungen die zuverlässige und dankenswerthe Hülfe des Herrn Dr. Drude gerne wieder in Anspruch nahm.

Um die der Beobachtung unterworfenen Stäbchen zu characterisiren denke ich mir den Barytkrystall so aufgestellt, daß die Brachydiagonale des Spaltungsprismas die a-Axe, die Makrodiagonale die b-Axe, also die Normale zur Basis die c-Axe ist.

Dann stellen sich die 9 Gattungen beobachteter Stäbchen, falls man die Längsrichtung mit L, Breite mit B, Dicke mit D bezeichnet, folgendermaßen dar:

$$
\begin{array}{llll}
(\mathrm{I}b) & : L\|a, \quad B\|b; & (\mathrm{I}c) & : L\|a, \quad B\|c; \\
(\mathrm{II}c) & : L\|b, \quad B\|c; & (\mathrm{II}a) & : L\|b, \quad B\|a; \\
(\mathrm{III}a) & : L\|c, \quad B\|a; & (\mathrm{III}b') & : L\|c, \quad <(B,b) = 50^{\circ}\,50'. \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
(\mathrm{IV}) & : <(L,b) = <(L,c) = 45^{\circ}, \quad B\|a; \\
(\mathrm{V}) & : <(L,c) = <(L,a) = 45^{\circ}, \quad B\|b; \\
(\mathrm{VI}') & : \leq(L,a) = 50^{\circ}\,50', \quad <(L,b) = 39^{\circ}\,10', \quad D\|c.
\end{array}
$$

Die beiden Gattungen (IIIb') und (VI$'$) sind von den übrigen abweichend orientirt, weil die Form des benutzten Krystalles nahe legte, eine Platte parallel der vorhandenen Spaltungsfläche abzutrennen und zu verarbeiten.

Dimensionen.

Ib No. 1. $D = 860 + \delta$

$\delta =$	3,2	6,2	10,4	14,7	15,7
	6,7	10,2	14,2	18,5	19,0
	6,0	9,9	14,1	18,5	19,1
	8,5	12,3	16,5	20,7	21,2
Mittel	6,1	9,6	13,8	18,1	18,8
ber.	5,7	10,3	14,1	17,1	19,3

$\delta_0 = 14,1, \ \delta_1 = 3,4, \ \delta_2 = -0,4.$

$B = 5500 + \beta$

$\beta =$	96	96	95	97	100	102
	90	93	95	97	100	102
Mittel	92	93	95	97	100	102

Ib No. 2. $D = 860 + \delta$

$\delta =$	−1,9	5,4	8,3	11,1	14,1	14,7	9,5
	1,3	8,4	11,2	13,6	16,5	17,2	12,1
	1,9	9,3	11,9	13,8	17,1	17,3	10,8
	3,3	10,2	13,4	15,7	18,9	19,3	13,4
Mittel	1,1	8,3	11,2	13,6	16,6	17,1	11,4
ber.	1,1	7,5	12.1	14,9	15,9	15,1	12,5

$\delta_0 = 14,9, \ \delta_1 = 1,9, \ \delta_2 = -0,9.$

$B = 5400 + \beta$

$\beta =$	39	35	30	24	17	10	16	−8	−14
	41	38	32	27	22	13	14	−3	−16
Mittel	40	36	31	26	20	12	15	−5	−15

Ib No. 3. $D = 860 + \delta$

$\delta =$	−3,6	2,0	5,8	8,7	11,9	12,8	8,9
	−2,7	4,2	7,9	9,9	12,6	13,6	10,5
	−1,8	4,2	7,0	9,8	12,6	13,7	10,6
	0,6	6,3	9,7	11,8	14,9	16,8	12,8
Mittel	−1,9	4,2	7,6	10,0	13,0	14,2	10,7
ber.	−0,2	4,5	8,0	10,5	11,8	12,1	11,2

$\delta_0 = 10,5, \ \delta_1 = 1,9, \ \delta_2 = -0,56.$

$B = 5400 + \beta$

$\beta =$	64	53	45	35	27	16	8
	63	56	48	41	29	18	8
Mittel	64	54	46	38	28	17	8

Ib No. 4. $D = 850 + \delta$

$\delta =$	8,3	18,9	22,5	22,7	25,4	26,6	21,2
	8,7	18,7	21,1	23,0	26,0	26,6	21,2
	8,7	19,5	21,2	22,8	25,9	27,1	22,3
	8,4	17,5	20,5	12,1	25,3	25,8	21,1
Mittel	8,5	18,6	21,3	22,6	25,7	26,5	21,5
ber.	9,5	16,4	21,4	24,5	25,6	24,8	22,1

$\delta_0 = 24,5, \ \delta_1 = 2,1, \ \delta_2 = -0,97.$

$B = 5600 + \beta$

$\beta =$	16	19	14	9	6	11	−2
	20	24	15	13	10	8	4
Mittel	18	22	14	11	8	9	1

Ib No. 5 $D = 850 + \delta$

$\delta =$	−0,7	12,0	16,3	20,1	26,2	28,7	24,8
	0,3	11,7	16,6	20,5	26,0	28,9	26,2
	−0,5	11,6	16,8	20,3	25,7	28,7	25,8
	0,1	12,3	17,5	21,5	27,0	28,9	25,8
Mittel	−0,2	11,9	16,8	20,6	26,2	28,8	25,7
ber.	0,6	9,9	17,2	22,5	25,8	27,1	26,4

$\delta_0 = 22,5, \ \delta_1 = 4,3, \ \delta_2 = -1,0.$

$B = 5600 + \beta$

$\beta =$	−4	4	9	11	14	15	17
	−4	3	8	11	14	15	17
Mittel	−4	3	9	11	14	15	17

Ic No. 1. $D = 890 + \delta$

$\delta =$	3,0	11,6	15,1	16,4	16,1	14,2	8,4
	5,1	12,3	16,2	18,0	17,8	16,0	10,4
	5,1	13,0	16,1	17,9	17,2	15,3	10,3
	3,6	12,0	16,2	18,3	18,1	16,1	11,1
Mittel	4,2	12,2	15,9	17,7	17,3	15,4	10,1
ber.	4,9	11,5	15,8	17,8	17,6	15,1	10,3

$\delta_0 = 17,8$, $\delta_1 = 0,9$, $\delta_2 = -1,13$.

$B = 5000 + \beta$

$\beta =$	89	113	111	107	102	93	78
	91	113	111	107	102	93	76
Mittel	90	113	111	107	102	93	77

c No. 2. $D = 890 + \delta$

$\delta =$	3,2	10,0	13,0	14,6	13,5	9,3	3,7
	8,7	13,8	15,9	17,2	16,5	14,8	7,6
	7,9	13,2	16,2	17,6	16,1	12,9	4,9
	10,4	16,0	18,9	20,1	19,8	15,9	8,9
Mittel	7,6	13,2	16,0	17,4	16,5	13,2	6,3
ber.	7,5	13,1	16,4	17,5	16,2	12,7	6,7

$\delta_0 = 17,5$, $\delta_1 = -0,12$, $\delta_2 = -1,16$.

$B = 5400 + \beta$

$\beta =$	43	48	46	42	87	32	2
	42	47	46	41	37	32	22
Mittel	43	47	46	42	37	32	35

Ic No. 3. $D = 890 + \delta$

$\delta =$	3,9	11,1	13,5	13,2	12,2	10,2	6,1
	6,2	12,8	13,6	13,8	13,9	12,5	8,8
	6,5	13,2	13,7	13,9	12,8	10,9	6,3
	8,1	14,1	15,0	14,4	13,1	11,1	6,0
Mittel	6,2	12,5	14,0	13,8	13,0	11,2	6,8
ber.	7,1	11,3	13,7	14,5	13,5	10,9	6,5

$\delta_0 = 14,5$, $\delta_1 = 0,1$, $\delta_2 = -0,85$.

$B = 5400 + \beta$

$\beta =$	15	31	37	38	42	46	39
	17	32	37	39	44	44	40
Mittel	16	32	37	39	43	45	40

Ic No. 4. $D = 900 + \delta$

$\delta =$	−2,1	5,4	7,9	9,9	9,3	7,5	3,0
	−1,9	5,9	8,9	10,0	9,9	7,9	3,2
	−0,8	5,1	7,8	10,0	10,1	8,5	3,1
	−2,8	5,3	8,1	9,6	9,2	7,4	3,1
Mittel	−1,9	5,4	8,2	9,9	9,6	7,8	3,1
ber.	−1,4	4,4	8,2	10,0	9,8	7,7	3,4

$\delta_0 = 10,0$, $\delta_1 = 0,8$, $\delta_2 = -1,0$.

$B = 3800 + \beta$

$\beta =$	80	77	71	75	79	76	89
	82	77	71	76	79	76	85
Mittel	81	77	71	76	79	76	87

Ic No. 5. $D = 890 + \delta$

$\delta =$	5,7	10,0	12,6	13,3	12,4	9,4	4,5
	9,5	13,0	15,6	16,0	14,9	12,4	8,0
	9,1	12,0	15,1	15,4	14,0	12,0	8,9
	11,0	15,8	17,1	16,9	16,9	14,7	17,9
Mittel	8,8	12,7	15,1	15,4	14,5	12,1	7,3
ber.	8,7	12,8	15,0	15,7	14,6	11,8	7,3

$\delta_0 = 15,7$, $\delta_1 = 0,23$, $\delta_2 = -0,85$.

$B = 3900 + \beta$

$\beta =$	39	37	28	24	22	17	17
	41	37	26	24	24	18	20
Mittel	40	37	27	24	23	18	18

IIc No. 1. $D = 730 + \delta$

$\delta =$	4,2	10,2	12,6	13,3	13,2	13,2	11,4
	5,5	11,8	13,8	14,3	14,2	14,4	12,2
	6,6	11,9	13,5	14,0	14,3	14,3	12,5
	5,5	11,5	14,0	14,5	14,4	14,4	12,8
Mittel	5,5	11,3	13,5	14,0	14,0	14,1	12,2
ber.	6,6	10,2	12,8	14,2	14,6	14,0	12,2

$\delta_0 = 14,2$, $\delta_1 = 0,94$, $\delta = -0,53$.

$B = 5600 + \beta$

$\beta =$	−2	14	23	29	38	35	37	39
	−3	13	23	29	36	37	38	39
Mittel	−2	14	23	29	35	36	30	39

IIc No. 2'. $D = 720 + \delta$

$\delta =$	6,6	7,1	8,6	10,1	9,7
	12,0	13,0	14,0	15,1	15,0
	13,9	14,1	15,9	17,3	16,4
	17,8	19,3	20,1	21,7	21,6
Mittel	12,6	13,4	14,7	16,0	15,7

$B = 6600 + \beta$

$\beta =$	48	46	40	40	39
	47	38	41	40	40
	48	42	40	40	40

IIc No. 3. $D = 730 + \delta$

$\delta =$	2,9	11,7	12,2	12,9	12,9	12,5	11,1	6,0
	1,5	9,7	10,3	10,5	10,6	10,7	9,5	5,8
	1,5	11,0	11,2	10,6	10,2	10,9	9,7	4,6
	2,6	9,5	10,2	9,4	9,2	9,2	8,4	3,9
Mittel	2,1	10,5	9,0	10,9	10,7	10,8	9,7	5,1
ber.	4,0	7,7	10,3	11,7	11,9	10,9	8,7	5,4

$\delta_0 = 12,0$, $\delta_1 = 0,1$, $\delta_2 = -0,15$.

$B = 5500 + \beta$

$\beta =$	65	86	101	112	120	124	122	113
	65	84	100	111	119	124	122	114
Mittel	65	83	101	111	120	124	122	113

IIc No. 3'. $D = 730 + \delta$

$\delta =$	6,1	9,8	11,0	11,1	10,9
	7,2	10,7	12,4	12,4	11,8
	8,2	11,3	12,8	13,0	12,3
	7,8	11,7	13,0	13,2	13,0
Mittel	7,3	10,6	12,3	12,4	12,0.

$B = 5500 + \beta$

$\beta =$	99	98	96
	103	98	97
Mittel	101	98	97

IIc No. 3''. $D = 730 + \delta$

$\delta =$	8,4	11,1	11,2	11,1	11,2
	8,7	11,1	12,0	12,1	12,1
	8,8	11,3	12,2	12,1	12,1
	10,3	12,0	12,5	12,6	12,8
Mittel	9,0	11,4	12,0	12,0	12,0

$B = 3800 + \beta$

$\beta =$	59	64	66	64	58
	59	64	67	64	56
Mittel	59	64	66	64	57

IIc No. 4. $D = 730 + \delta$

$\delta =$	3,6	9,9	11,5	11,1	11,2	10,1	4,3
	5,4	13,0	13,7	12,9	12,4	11,4	4,8
	6,8	12,5	13,5	12,9	13,1	11,8	5,9
	9,8	13,2	14,0	13,6	13,3	11,4	5,2
Mittel	7,4	12,1	13,2	12,6	12,5	11,2	5,1
ber.	8,6	11,4	12,9	13,1	12,1	9,8	6,2

$\delta_0 = 13,1$, $\delta_1 = 0,40$, $\delta_2 = -0,63$.

$B = 5500 + \beta$

$\beta =$	65	88	101	117	128	134	132	129
	62	88	103	117	124	134	133	124
Mittel	64	88	102	117	126	134	132	126

IIc No. 5'. $D = 730 + \delta$

$\delta =$	2,4	5,9	7,1
	4,7	7,8	9,6
	5,1	7,7	9,1
	4,0	7,4	8,2
Mittel	4,1	7,2	8,5

$B = 5600 + \beta$

$\beta =$	37	38	38
	39	39	38
	38	38	38

IIa No. 1. $D = 500 + \delta$

$\delta =$	7,8	16,4	19,0	20,1	20,9	20,9	18,1
	7,9	17,0	19,8	21,0	21,7	22,0	19,9
	9,1	16,8	20,0	21,0	22,0	22,0	20,1
	9,1	17,5	20,2	21,9	22,7	22,4	20,0
Mittel	8,5	16,9	19,7	21,0	21,8	21,8	19,5
ber.	11,0	15,9	19,3	21,3	21,9	21,1	18,9

$\delta_0 = 21,3$, $\delta_1 = 1,3$, $\delta_2 = -0,7$.

$B = 5500 + \beta$

$\beta =$	−8	10	22	29	51	65	76
	−6	12	23	36	49	66	74
Mittel	−7	11	22	33	50	65	75

IIa No. 2. $D = 500 + \delta$

$\delta =$	8,1	14,8	16,2	17,9	16,7	15,9	12,0
	8,7	15,1	17,1	17,3	17,1	15,7	11,5
	10,9	15,4	17,4	17,3	16,6	15,9	12,4
	9,7	15,9	18,2	18,2	18,4	17,3	13,3
Mittel	9,4	15,3	17,2	17,7	17,2	15,9	12,3
ber.	10,8	14,6	17,0	57,9	17,4	15,4	12,0

$\delta_0 = 17{,}87$, $\delta_1 = 0{,}2$, $\delta_2 = -0{,}72$.

$B = 5500 + \beta$

$\beta =$	−2	26	37	47	58	72	80
	0	24	31	43	57	71	87
Mittel	−1	25	34	45	58	72	83

IIa No. 3. $D = 500 + \delta$

$\delta =$	3,6	9,6	13,0	15,9	17,9	17,2	11,9
	3,1	9,9	13,0	15,9	17,3	16,1	11,9
	3,1	9,1	13,0	15,8	17,3	17,1	10,8
	3,1	8,7	11,8	14,5	16,6	15,8	11,6
Mittel	3,2	9,3	12,7	15,5	17,3	16,5	11,5
ber.	3,2	9,1	13,2	15,7	16,4	15,5	12,8

$\delta_0 = 15{,}7$, $\delta_1 = 1{,}6$, $\delta_2 = -0{,}86$.

$B = 5500 + \beta$

$\beta =$	13	21	29	49	55	68	75
	−1	16	32	45	67	69	87
Mittel	6	18	31	47	61	68	78

IIa No. 4. $D = 500 + \delta$

$\delta =$	14,8	17,3	20,1	19,2	18,4	17,5	15,8
	17,3	19,6	20,0	21,0	20,8	19,3	15,8
	18,6	19,6	20,5	21,4	20,9	20,0	16,5
	15,4	18,4	20,2	19,7	19,7	18,3	14,4
Mittel	16,5	18,7	20,2	20,3	20,0	18,8	15,6
ber.	16,4	18,8	20,2	20,5	20,0	18,4	15,8

$\delta_0 = 20{,}55$, $\delta_1 = 0{,}1$, $\delta_2 = -0{,}5$.

$B = 5400 + \beta$

$\beta =$	89	94	99	104	112	111	114
	91	97	105	108	114	117	116
Mittel	98	96	100	106	113	114	115

IIa No. 5. $D = 500 + \delta$

$\delta =$	15,7	16,2	16,2	15,3	15,3	16,1	15,8
	19,9	20,7	20,5	20,3	20,5	20,4	19,5
	19,9	21,7	21,3	20,9	21,1	21,0	20,5
	23,7	25,2	25,1	24,7	25,0	24,5	23,5
Mittel	19,8	20,9	20,8	20,3	20,5	20,5	19,8
ber.	20,5	20,6	20,6	20,6	20,6	20,5	20,4

$\delta_0 = 20{,}6$, $\delta_1 = 0{,}04$, $\delta_2 = -0{,}02$.

$B = 5500 + \beta$

$\beta =$	1	4	12	17	21	29	34
	−1	6	13	23	35	29	36
Mittel	0	5	12	20	23	29	35

IIa No. 6. $D = 500 + \delta$

$\delta =$	2,3	9,0	15,0	18,6	21,0	21,5	20,5
	5,5	14,7	19,8	22,9	25,9	26,0	24,3
	5,7	14,3	20,2	23,6	25,9	26,7	25,2
	1,8	16,1	21,1	25,0	27,6	28,7	27,2
Mittel	3,8	13,5	19,0	22,5	25,1	25,7	24,3
ber.	4,8	12,6	18,6	22,8	25,2	25,8	24,6

$\delta_0 = 22{,}77$, $2\delta_1 = 3{,}5$, $\delta_2 = -0{,}9$.

$B = 5500 + \beta$

$\beta =$	17	24	34	47	56	66	78
	13	25	34	45	56	68	76
Mittel	15	24	34	46	56	67	77

IIIa No. 1. $D = 530 + \delta$

$\delta =$	5,5	4,1	2,7	3,2	5,1
	4,8	2,6	2,1	3,1	5,2
	5,6	3,0	2,3	2,6	4,7
	5,8	4,0	3,0	3,9	6,1
Mittel	5,4	3,4	2,5	3,2	5,3
ber.	5,5	3,3	2,6	3,3	5,5

$\delta_0 = 2{,}6$, $\delta_1 = 0{,}04$, $\delta_2 = 0{,}70$.

$B = 5400 + \beta$

$\beta =$	85	88	92	92	82
	86	92	94	95	85
Mittel	85	90	93	93	83

IIIa No. 2. $D = 530 + \delta$

δ =	3,1	2,4	3,0	4,1	6,1
	4,1	3,2	3,1	4,3	6,5
	3,7	2,7	3,2	4,4	6,4
	4,8	3,7	3,9	5,2	7,0
Mittel	3,9	3,0	3,3	4,5	6,5
ber.	3,8	3,1	3,3	4,5	6,6

$\delta_0 = 3,3$, $\delta_1 = 0,67$, $\delta_2 = 0,48$.

$B = 5400 + \beta$

β =	85	88	90	87	84
	85	87	87	87	87
Mittel	85	87	89	87	86

IIIa No. 3. $D = 520 + \delta$

δ =	7,6	7,2	8,3	10,4	15,5
	7,6	7,2	9,0	11,3	17,0
	7,1	8,3	8,6	11,2	16,3
	8,4	8,0	8,8	11,9	16,0
Mittel	7,4	7,8	8,7	11,2	16,2
ber.	7,6	7,5	8,8	11,7	16,0

$\delta_0 = 8,8$, $\delta_1 = 2,1$, $\delta_2 = 0,76$.

$B = 5400 + \beta$

β =	82	85	84	83	83
	79	83	83	82	82
Mittel	80	84	83	83	82

IIIa No. 4. $D = 570 + \delta$

δ =	9,3	9,6	9,0	9,9	12,0
	12,5	11,5	10,7	11,0	13,0
	12,5	11,9	10,6	11,1	13,6
	11,7	11,1	11,0	12,1	14,1
	11,5	11,0	10,3	11,0	13,2
	11,7	10,6	10,4	11,2	13,1

$\delta_0 = 10,4$, $\delta_1 = 0,34$, $\delta_2 = -0,50$.

$B = 5400 + \beta$

β =	87	89	89	86	88
	87	89	89	88	89
Mittel	87	89	89	87	89

IIIa No. 5. $D = 520 + \delta$

δ =	6,1	6,7	7,3	9,3	12,3
	9,2	9,1	9,9	14,2	14,2
	8,7	9,1	10,2	13,2	13,9
	11,3	11,1	11,5	13,4	16,2
	8,8	9,0	9,7	12,5	14,2
	8,7	9,1	10,1	11,9	14,3

$\delta_0 = 10,1$, $\delta_1 = 1,43$, $\delta_2 = 0,36$.

$B = 5400 + \beta$

β =	87	88	88	88	86
	84	87	88	88	86
Mittel	86	87	88	88	86

IIIa No. 6. $D = 520 + \delta$

δ =	8,1	8,0	8,7	10,4	13,0
	9,7	10,2	11,3	13,5	16,6
	9,8	10,2	10,7	13,6	15,0
	10,8	11,5	12,4	14,4	17,4
Mittel	9,6	10,0	10,8	13,0	15,5
ber.	9,6	9,9	11,0	12,9	15,6

$\delta_0 = 11,0$, $\delta_1 = 1,48$, $\delta_2 = 0,4$.

$B = 5400 + \beta$

β =	95	105	106	107	103
	98	104	104	104	101
Mittel	96	105	105	105	102

IIIb' No. 1. $D = 520 + \delta$

δ =	5,4	3,3	5,4	7,7	10,5
	6,2	4,9	3,9	6,0	9,6
	5,7	4,5	3,9	5,6	9,4
	6,7	5,8	2,7	4,8	8,8
Mittel	6,0	4,6	4,0	6,0	9,6
	6,1	4,2	4,2	6,0	9,5

$\delta_0 = 4,2$, $\delta_1 = 0,86$, $\delta_2 = 0,91$.

$B = 5300 + \delta$

β =	58	69	74	84	90
	59	68	75	85	88
Mittel	59	68	75	84	89

IIIe' No. 2. $D = 510 + \delta$

$\delta =$	5,2	3,9	4,2	6,8	10,7
	11,6	9,3	9,6	12,0	16,1
	10,8	8,8	8,8	11,2	15,0
	16,9	14,8	14,7	17,0	19,9
Mittel	11,1	9,2	9,3	11,8	15,4
ber.	11,2	9,3	9,4	11,5	15,4

$\delta_0 = 9,4$, $\delta_1 = 1,12$, $\delta_2 = 0,96$.

$B = 5300 + \beta$

$\beta =$	79	86	95	102	107
	82	88	95	102	108
Mittel	80	87	95	102	108

IIIb' No. 3. $D = 520 + \delta$

$\delta =$	11,5	8,7	7,7	8,2	10,1
	13,2	10,0	9,1	9,9	12,4
	12,0	9,7	9,2	9,9	11,9
	12,5	10,1	9,5	10,4	12,5
Mittel	12,6	9,6	8,9	9,6	11,7
ber.	12,2	9,7	8,8	9,5	11,8

$\delta_0 = 8,1$, $\delta_1 = 0,12$, $\delta_2 = 0,8$.

$B = 5300 + \beta$

$\beta =$	63	76	84	96	105
	65	75	84	95	97
Mittel	64	76	84	95	101

IV No. 1. $D = 500 + \delta$

$\delta =$	11,0	17,9	23,8	29,2	33,9	40,7	41,1
	12,8	19,2	24,7	29,4	34,4	39,3	42,2
	12,9	19,0	24,8	29,2	35,0	40,4	43,0
	13,5	20,4	26,0	31,2	35,5	41,0	44,6
Mittel	12,6	19,1	24,8	29,8	34,7	40,3	42,7
ber.	12,5	19,0	24,7	30,1	34,9	39,2	43,1

$\delta_0 = 30,1$, $\delta_1 = 5,1$, $\delta_2 = -0,25$.

$B = 5400 + \beta$

$\beta =$	95	94	94	94	90	90	86
	94	94	94	95	92	90	82
Mittel	94	94	94	95	91	98	86

IV No. 2. $D = 520 + \delta$

$\delta =$	7,8	9,2	12,0	14,0	16,1	17,1	16,0
	8,9	10,2	13,0	14,8	16,0	17,1	16,8
	8,9	10,5	12,9	14,9	16,8	17,7	16,0
	8,9	11,5	13,6	15,9	17,2	18,1	17,0
Mittel	8,6	10,3	12,9	14.9	16,5	17,5	16,5
ber.	8,1	10,9	13,1	14,9	16,1	16,9	17,1

$\delta_0 = 14,9$, $\delta_1 = 1,5$, $\delta_2 = -0,25$.

$B = 5400 + \beta$

$\beta =$	93	93	94	92	92	87	83
	93	93	93	92	91	89	86
Mittel	93	93	93	92	92	88	85

IV No. 3. $D = 500 + \delta$

$\delta =$	−5,2	−0,9	3,1	6,3	9,3	11,2	11,6
	7,6	12,1	15,0	18,5	21,5	23,5	23,7
	8,8	12,1	15,8	19,0	22,3	24,7	24,4
	20,1	24,3	27,3	30,7	34,1	36,6	36,9
Mittel	7,8	11,9	15,3	18,6	21,8	24,0	24,1
ber.	7,9	12,0	15,6	18,7	21,2	23,2	24,7

$\delta_0 = 18,7$, $\delta_1 = 2,8$, $\delta_2 = 0,27$.

$B = 5400 + \beta$

$\beta =$	88	90	95	96	96	98	97
	91	89	93	96	96	97	95
Mittel	90	90	94	96	96	97	96

IV No. 4. $D = 530 + \delta$

$\delta =$	2,1	4,0	6,0	7,8	9,6	10,8	9,8
	3,0	4,7	6,8	8,7	9,9	11,1	10,3
	3,7	5,8	6,6	8,5	9,6	11,4	10,4
	2,9	3,9	6,4	8,1	9,7	10,8	10,6
Mittel	2,9	4,6	6,5	8,3	9.7	11,0	10,3
ber.	2,5	4,9	6,7	8,3	9,5	10,5	10,9

$\delta_0 = 8,3$, $\delta_1 = 1,4$, $\delta_2 = -0,18$.

$B = 5400 + \delta$

$\beta =$	86	93	95	98	99	99	101
	85	91	92	94	99	99	98
Mittel	85	92	93	95	99	99	98

IV No. 5. $D = 500 + \delta$

$\delta =$	17,3	21,3	24,5	27,1	30,0	32,2	33,0
	18,8	22,4	25,3	29,0	32,1	34,1	34,3
	19,4	22,6	25,7	28,9	31,8	34,3	35,1
	19,3	23,9	26,8	29,7	32,6	34,9	36,0
Mittel	18,7	22,5	25,6	28,7	31,6	33,9	34,6
ber.	18,8	22,6	25,9	28,8	31,3	33,4	35,0

$\delta_0 = 8,78, \ \delta_1 = 2,7 \ \delta_2 = -0,21.$

$B = 5400 + \beta$

$\beta =$	100	101	103	102	99	97	91
	100	104	102	104	99	94	91
Mittel	100	101	103	102	99	96	91

IV No. 6. $D = 520 + \delta$

$\delta =$	−0,2	2,4	4,4	6,1	6,3	6,6	5,6
	4,8	7,1	9,4	10,0	10,6	10,8	9,8
	4,3	7,7	8,9	10,4	10,8	11,4	10,9
	9,4	12,1	12,5	13,8	14,7	15,0	14,4
Mittel	4,6	7,3	8,8	10,1	10,6	10,9	10,2
ber.	4,9	7,2	8,9	10,1	10,7	10,8	10,3

$\delta_0 = 10,56, \ \delta_1 = 0,9, \ \delta_2 = -0,28.$

$B = 5400 + \beta$

$\beta =$	94	96	95	92	86
	96	96	93	93	86
Mittel	94	96	94	92	86

IV No. 7. $D = 500 + \delta$

$\delta =$	−1,8	0,1	3,2	6,5	8,5	10,2	10,4
	1,9	5,8	9,4	12,1	14,0	14,9	15,0
	1,8	6,4	10,5	12,6	14,7	16,0	16,0
	5,2	9,3	13,1	15,8	18,0	19,0	19,1
Mittel	1,8	5,4	9,1	11,7	13,8	15,0	15,1
ber.	1,6	6,4	9,0	11,7	13,6	15,6	15,5

$\delta_0 = 11,74, \ \delta_1 = 2,3, \ \delta_2 = -0,36.$

$B = 5400 + \beta$

$\beta =$	94	98	98	98	96
	90	95	98	97	96
Mittel	92	96	98	97	96

V No. 1. $D = 590 + \delta$

$\delta =$	0,1	3,0	5,3	6,9	8,6	10,9	8,7
	1,4	4,3	6,2	7,7	10,2	11,4	9,5
	1,3	3,9	6,0	8,0	9,9	10,9	9,7
	1,1	4,8	6,5	8,3	10,1	10,9	8,7
Mittel	1,0	4,0	6,0	7,7	9,7	11,0	9,2
ber.	1,2	4,0	6,2	8,0	9,2	10,0	10,2

$\delta_0 = 7,95, \ \delta_1 = 1,5, \ \delta_2 = -0,25.$

$B = 5300 + \beta$

$\beta =$	6	21	34	48	56	67	78
	7	22	33	44	56	63	76
Mittel	7	22	34	46	56	65	77

V No. 2. $D = 590 + \delta$

$\delta =$	2,0	4,9	6,6	8,3	10,0	10,9	9,3
	2,3	4,1	6,1	8,0	9,1	10,4	10,0
	2,8	4,9	6,8	8,5	10,0	10,7	9,2
	3,2	4,9	7,1	8,6	10,1	11,0	9,1
Mittel	2,6	4,7	6,7	8,4	9,8	10,7	9,4
ber.	2,1	4,9	7,1	8,7	9,7	10,1	9,9

$\delta_0 = 8,66, \ \delta_1 = 1,3, \ \delta_2 = -0,3.$

$B = 5500 + \beta$

$\beta =$	97	90	80	62	56	45	26
	100	89	74	62	53	39	23
Mittel	98	90	77	62	55	42	24

V No. 3. $D = 590 + \delta$

$\delta =$	4,6	5,0	5,6	6,7	8,0	9,6	6,8
	5,7	6,1	7,2	8,6	9,4	10,6	9,1
	5,7	6,1	7,1	8,3	9,9	10,3	9,0
	6,9	7,2	8,4	10,0	11,2	12,3	10,3
Mittel	5,7	6,1	7,1	8,4	9,6	10,7	8,8
ber.	5,3	6,6	7,6	8,5	9,1	9,6	9,8

$\delta_0 = 8,46, \ \delta_1 = 0,75, \ \delta_2 = -0,1.$

$B = 5500 + \beta$

$\beta =$	99	88	78	67	56	43	36
	98	86	79	69	56	45	34
	99	87	78	68	56	44	35

V No. 4. $D = 570 + \delta$

$\delta =$	6,0	8,9	10,8	11,7	12,0	11,0	8,5
	11,3	13,3	14,4	15,1	15,3	14,2	12,6
	11,0	12,9	14,5	14,8	15,1	14,3	11,5
	13,1	14,9	15,8	15,8	15,9	15,1	13,9
Mittel	10,6	12,5	13,9	14,3	14,6	13,6	11,6
ber.	10,5	12,7	13,9	14,5	14,3	13,5	11,9

$\delta_0 = 14,45,\ \delta_1 = 0,2,\ \delta_2 = -0,36.$

$B = 5500 + \beta$

$\beta =$	66	58	48	35	23	10	−1
	68	59	49	37	24	8	−2
Mittel	67	58	49	36	23	9	−1

V No. 5. $D = 580 + \delta$

$\delta =$	7,0	8,9	10,5	12,0	13,0	12,2	10,1
	8,2	9,7	11,2	12,8	13,9	13,8	11,9
	7,4	9,9	11,4	12,7	13,4	13,8	12,0
	7,8	9,9	11,0	12,8	13,9	13,9	12,5
Mittel	7,6	9,9	11,0	12,6	13,4	13,4	11,6
ber.	7,9	10,2	11,5	12,6	13,1	13,4	12,7

$\delta_0 = 12,6,\ \delta_1 = 0,8,\ \delta_2 = -0,3.$

$B = 5300 + \delta$

$\beta =$	61	56	57	57	56	57	59
	66	59	61	59	58	63	62
Mittel	63	57	59	58	57	60	61

V No. 6. $D = 590 + \delta$

$\delta =$	1,5	2,8	4,7	6,7	8,8	10,6	11,1
	0,3	3,1	5,2	6,2	8,4	10,3	11,3
	1,5	3,6	4,6	6,7	8,5	10,4	10,5
	2,8	3,8	5,7	7,5	9,6	10,7	11,6
Mittel	1,5	3,3	5,1	6,8	8,8	10,5	11,1
ber.	1,3	3,3	5,1	6,9	8,5	10,1	11,5

$\delta_0 = 6,9,\ \delta_1 = 1,7,\ \delta_2 = -0,06.$

$B = 3400 + \beta$

$\beta =$	45	82	103	132	154	194	206
	47	75	101	130	154	181	202
Mittel	46	79	102	131	151	187	203

VI No. 1. $D = 520 + \delta$

$\delta =$	3,2	2,8	2,5	2,6	1,9
	3,4	3,6	3,9	2,7	2,4
	3,8	4,0	3,7	3,5	3,1
	4,8	5,1	5,0	4,4	2,6
Mittel	3,8	3,9	3,8	3,3	2,5
ber.	3,9	3,9	3,7	3,3	2,5

$\delta_0 = 3,7,\ \delta_1 = 0,32,\ \delta_2 = -0,15.$

$B = 5000 + \beta$

$\beta =$	93	127	151	170	183
	93	119	145	161	171
Mittel	93	123	148	165	177

VI No. 2. $D = 520 + \delta$

$\delta =$	6,1	7,4	8,0	8,2	6,2
	9,5	7,8	8,0	8,4	6,7
	6,6	7,8	8,6	8,7	6,5
	6,2	7,6	8,5	8,3	6,1
Mittel	6,2	7,7	8,3	8,4	6,4
ber.	5,5	7,8	8,5	2,2	6,3

$\delta_0 = 8,5,\ \delta_1 = 0,21,\ \delta_2 = 0,54.$

$B = 5000 + \beta$

$\beta =$	26	35	49	62	70
	25	32	47	60	68
Mittel	25	33	48	61	69

VI No. 3. $D = 520 + \delta$

$\delta =$	2,0	5,4	6,7	7,3	7,2
	2,6	5,4	7,3	8,1	8,0
	3,6	6,0	8,3	9,1	8,0
	3,6	5,7	6,9	7,6	7,5
Mittel	3,0	5,6	7,3	8,0	7,4
ber.	3,1	5,7	7,3	7,9	7,7

$\delta_0 = 7,3,\ \delta_1 = 1,12,\ \delta_2 = 0,53.$

$B = 5300 + \beta$

$\beta =$	33	43	57	71	82
	28	43	57	71	80
Mittel	31	43	57	71	81

VI No. 4. $D = 520 + \delta$

$\delta =$	0,0	2,7	4,0	4,9	5,0
	0,8	2,0	3,4	4,3	4,9
	0,9	1,3	3,4	4,4	5,4
	0,5	1,0	3,1	4,0	4,2
Mittel	0,5	1,8	3,5	4,4	4,8
ber.	0,4	2,0	3,3	4,2	4,8

$\delta_0 = 3{,}3$, $\delta_1 = 1{,}1$, $\delta_2 = -0{,}17$.

$B = 5100 + \beta$

$\beta =$	61	61	63	63	66
	67	66	65	67	67
Mittel	64	64	64	64	66

VI No. 5. $D = 520 + \delta$

$\delta =$	3,1	3,7	3,9	3,8	3,1
	4,1	4,1	4,1	36	3,2
	3,6	4,2	4,1	3,8	3,5
	4,1	4,1	3,9	3,2	3,7
Mittel	3,7	4,0	4,0	3,6	3,1
ber.	3,9	4,1	4,0	3,7	2,9

$\delta_0 = 4{,}0$, $\delta_1 = 0{,}16$, $\delta_2 = -0{,}14$.

$B = 5200 + \beta$

$\beta =$	52	59	57	52	49
	50	56	56	56	42
Mittel	51	58	56	54	45

VI No. 6. $D = 790 + \delta$

$\delta =$	1,6	2,6	2,7	2,1	0,4
	2,8	4,4	4,4	4,1	3,7
	4,8	5,2	5,4	5,6	3,7
	5,5	6,1	6,2	6,0	3,8
Mittel	3,7	4,6	4,7	4,5	2,9
ber.	3,6	4,6	4,8	4,2	3,0

$\delta_0 = 4{,}8$, $\delta_1 = 0{,}17$, $\delta_2 = -0{,}38$.

$B = 5300 + \beta$

$\beta =$	82	71	57	43	33
	80	71	57	43	28
Mittel	81	71	57	43	31

Biegungen.

Ib No. 1. $L = 16{,}3$, $B = 5596$, $D = 874{,}0$, $P = 110$,

1. Lage $\eta = 19{,}2 \quad 19{,}7 \quad 19{,}7 \quad 19{,}3$

2. Lage $\eta = 19{,}3 \quad 18{,}9 \quad 18{,}9 \quad 18{,}4$

Mittel $\eta = 18{,}2$, $\eta' = 2{,}3$,

$L = 46{,}2$,

1. Lage $\eta = 387{,}0 \quad 386{,}6 \quad 386{,}5 \quad 386{,}4$

2. Lage $\eta = 387{,}0 \quad 386{,}6 \quad 386{,}0 \quad 386{,}5$

Mittel $\eta = 386{,}6$, $(\eta') = 2{,}3$, $E = 6208000$.

b No. 2. $L = 56{,}15$, $B = 5418$, $D = 874{,}1$, $P = 110$,

1. Lage $\eta = 712{,}0 \quad 712{,}7 \quad 712{,}7 \quad 712{,}0$

2. Lage $\eta = 716{,}0 \quad 715{,}6 \quad 716{,}7 \quad 716{,}3$

Mittel $\eta = 714{,}2$, $(\eta') = 2{,}3$, $E = 6213000$.

Ib No. 3. $L = 14{,}3$, $B = 5441$, $D = 870{,}0$, $P = 110$,

1. Lage $\eta = 14{,}0 \quad 13{,}9 \quad 13{,}9 \quad 13{,}8$

2. Lage $\eta = 14{,}4 \quad 14{,}4 \quad 14{,}4 \quad 14{,}4$

Mittel $\eta = 14{,}1$, $\eta' = 2{,}2$,

$L = 50{,}2$,

1. Lage $\eta = 516{,}4 \quad 516{,}3 \quad 516{,}2 \quad 576{,}4$

2. Lage $\eta = 516{,}7 \quad 516{,}6 \quad 516{,}7 \quad 516{,}5$

Mittel $\eta = 516{,}5$, $(\eta') = 2{,}3$, $E = 6206000$.

Ib No. 4. $L = 58{,}2$, $B = 5612$, $D = 873{,}6$, $P = 110$,
1. Lage η = 767,7 767,9 767,7 767,8
2. Lage η = 769,7 769,0 768,9 768,7
Mittel η = 768,4, (η') = 2,3, E = 6215000.

Ib No. 5. $L = 14{,}3$, $B = 5610$, $D = 871{,}7$, $P = 110$,
1. Lage η = 14,0 14,1 14,0 14,1
2. Lage η = 13,9 13,8 13,9 14,0
Mittel η = 14,0, η' = 2,5,
L = 62,2,
1. Lage η = 943,8 943,7 943,8
2. Lage η = 942,4 940,8 940,2
Mittel η = 942,3 (η') = 2,3, E = 6230000.

Ic No. 1. $L = 14{,}3$, $B = 5102$, $D = 907$, $P = 40$,
1. Lage η = 5,2 5,3 5,2
2. Lage η = 5,3 5,3 5,2
Mittel η = 5,3, η' = 1,1,
L = 52,2,
1. Lage η = 201,0 201,2 201,3 201,4
2. Lage η = 201,4 201,3 201,0 200,9
Mittel η = 201,2 (η') = 1,6, E = 6164000.

Ic No. 2. $L = 14{,}3$, $B = 5540$, $D = 906{,}0$, $P = 60$,
1. Lage η = 8,2 8,0 8,0
2. Lage η = 8,2 7,9 8,3
Mittel η = 8,1, η' = 2,4,
L = 52,2,
1. Lage η = 278,6 278,7 278,6 278,5
2. Lage η = 278,8 278,4 278,6 278,5
Mittel η = 278,6, (η') = 2,3, E = 6164000.

Ic No. 3. $L = 50{,}2$, $B = 5437$, $D = 903{,}7$, $P = 60$,
1. Lage η = 252,9 252,8 253,0
2. Lage η = 253,5 253,0 253,2
Mittel η = 253,1, η' = 2,3, E = 6193000.

Hier liegt meines Erachtens der Fall vor, der in der Einleitung erwähnt ist: zwei Gattungen Stäbchen mit derselben Orientirung der Längsaxe und verschiedener der Querdimensionen geben merklich, wenn auch unerheblich verschiedene Resultate. Beachtet man, daß bei der ersteren Gattung die Hauptspaltungsrichtung in die Breitseiten fällt, die beiden andern normal dazu stehen, so ist es sehr einleuchtend, daß diese leichter und vollkommener Politur annimmt, als die letztere, bei welcher die Hauptspaltungsrichtung normal steht, die andern die Winkel von $\pm 50^{0}$ dagegen bilden; denn bei letzteren wird es viel leichter stattfinden, daß das Schleifmittel kleine Fragmente herausreißt. Der größere Werth E ist

also der wahrscheinlichere von beiden. Da indeß die andern benutzten Stäbchen meist Orientirungen haben, welche die verschiedenste Einwirkung der Spaltungsrichtungen auf die Politur ergeben, so schien es mir mehr der gleichen Behandlung aller Richtungen zu entsprechen, wenn zur Berechnung des Gesammtmittels alle Stäbe benutzt würden. Die absoluten Werthe sind, wie oben gesagt, so alle um eine Kleinigkeit zu klein. Wir erhalten:

Gesammtmittel $E_I = 6199000$, $\mathrm{E}_I = 16{,}13 \,.\, 10^{-8}$.
Wahrscheinlicher Fehler $\pm$ 5700 $\pm$ 0,015.

IIc No. 1. $L = 14{,}3$, $B = 5627$, $D = 743{,}7$, $P = 50$,
1. Lage $\eta = 12{,}1$ 11,7 11,8 11,6
2. Lage $\eta = 11{,}4$ 11,7 11,5 11,6
Mittel $\eta = 11{,}7$ $(\eta') = 2{,}1$,
$L = 44{,}2$,
1. Lage $\eta = 328{,}1$ 327,7 327,8
2. Lage $\eta = 324{,}5$ 325,5 325,6
Mittel $\eta = 326{,}5$ $(\eta') = 2{,}1$, $E = 5935000$.

IIc No. 3. $L = 52{,}2$, $B = 5607$, $D = 741{,}3$, $P = 30$,
1. Lage $\eta = 286{,}1$ 286,5 286,2
2. Lage $\eta = 286{,}5$ 286,8 286,9
Mittel $\eta = 286{,}5$, $(\eta') = 1{,}8$, $E = 5392000$.

IIc No. 4. $L = 14{,}3$, $B = 5613$, $D = 742{,}6$, $P = 30$,
1. Lage $\eta = 8{,}1$ 7,9 7,5 7,6
2. Lage $\eta = 7{,}0$ 7,6 7,4 7,6
Mittel $\eta = 7{,}6$, $\eta' = 1{,}8$,
$L = 52{,}2$,
1. Lage $\eta = 283{,}4$ 283,4 283,9
2. Lage $\eta = 282{,}9$ 283,9 283,2
Mittel $\eta = 283{,}4$, $(\eta') = 1{,}8$, $E = 5414000$,

IIa No. 1. $L = 14{,}3$, $B = 5536$, $D = 520{,}7$, $P = 20$,
1. Lage $\eta = 12{,}2$ 12,1 11,9 12,1
2. Lage $\eta = 12{,}1$ 12,2 12,1 12,1
Mittel $\eta = 12{,}1$, $(\eta') = 0{,}75$,
$L = 40{,}2$,
1. Lage $\eta = 252{,}6$ 252,4 252,2
2. Lage $\eta = 254{,}1$ 254,0 253,5
Mittel $\eta = 253{,}1$, $(\eta') = 0{,}8$, $E = 5413000$.

IIa No. 2. $L = 14{,}3$, $B = 5546$, $D = 517{,}2$, $P = 25$,
1. Lage $\eta = 15{,}6$ 15,7 15,6 15,7
2. Lage $\eta = 15{,}6$ 15,5 15,5 15,5
Mittel $\eta = 15{,}6$, $\eta' = 1{,}1$,
$L = 38{,}2$,
1. Lage $\eta = 277{,}2$ 277,6 277,4
2. Lage $\eta = 277{,}1$ 277,6 277,5
Mittel $\eta = 277{,}4$, $(\eta') = 1{,}1$, $E = 5400000$.

IIa No. 3. $L = 14{,}3$, $B = 5544$, $D = 515{,}0$, $P = 25$,
1. Lage $\eta = 16{,}1 \quad 16{,}0 \quad 15{,}7 \quad 15{,}3$
2. Lage $\eta = 15{,}3 \quad 15{,}2 \quad 15{,}1 \quad 15{,}1$
Mittel $\eta = 15{,}5$, $\eta' = 0{,}8$,
$L = 38{,}2$,
1. Lage $\eta = 281{,}2 \quad 281{,}5 \quad 281{,}3$
2. Lage $\eta = 282{,}8 \quad 282{,}6 \quad 282{,}1$
Mittel $\eta = 281{,}9$, $(\eta') = 1{,}1$, $E = 5390000$.

IIa No. 4. $L = 14{,}3$, $B = 5505$, $D = 520{,}0$, $P = 25$,
1. Lage $\eta = 15{,}4 \quad 15{,}5 \quad 15{,}3 \quad 15{,}4$
2. Lage $\eta = 15{,}5 \quad 15{,}7 \quad 15{,}6 \quad 15{,}5$
Mittel $\eta = 15{,}5$, $\eta' = 1{,}2$,
$L = 32{,}2$,
1. Lage $\eta = 164{,}2 \quad 164{,}0 \quad 164{,}1$
2. Lage $\eta = 164{,}6 \quad 164{,}3 \quad 164{,}7$
Mittel $\eta = 164{,}3$, $(\eta') = 1{,}1$, $E = 5426000$.

IIa No. 5. $L = 14{,}3$, $B = 5518$, $D = 520{,}6$, $P = 25$,
1. Lage $\eta = 15{,}4 \quad 15{,}4 \quad 15{,}2 \quad 15{,}4$
2. Lage $\eta = 16{,}1 \quad 15{,}8 \quad 16{,}0 \quad 16{,}0$
Mittel $\eta = 15{,}7$, $\eta' = 1{,}4$,
$L = 30{,}2$,
1. Lage $\eta = 135{,}7 \quad 135{,}5 \quad 135{,}5$
2. Lage $\eta = 135{,}8 \quad 135{,}7 \quad 135{,}7$
Mittel $\eta = 135{,}7$, $(\eta') = 1{,}1$, $E = 5400000$.

IIa No. 6. $L = 14{,}3$, $B = 5546$, $D = 522{,}0$, $P = 25$,
1. Lage $\eta = 15{,}0 \quad 14{,}9 \quad 14{,}9 \quad 15{,}0$
2. Lage $\eta = 15{,}0 \quad 15{,}0 \quad 15{,}1 \quad 15{,}0$
Mittel $\eta = 15{,}0$, $\eta' = 0{,}9$,
$L = 32{,}2$,
1. Lage $\eta = 162{,}7 \quad 162{,}7 \quad 162{,}8$
2. Lage $\eta = 162{,}0 \quad 161{,}9 \quad 161{,}8$
Mittel $\eta = 162{,}3$, $(\eta') = 1{,}1$, $E = 5395000$.

Gesammtmittel $E_{II} = 5403000$, $E_{II} = 18{,}51 . 10^{-8}$.
Wahrscheinlicher Fehler ± 2300 $\pm 0{,}008$.

Bei dieser Gattung stimmen die Resultate merklich überein, obgleich die Breitseiten von IIc anders orientirt sind, als von IIa; die Politur von beiden mag sonach gleich sein, oder wenigstens das Verhältniß der oberflächlichen Unebenheiten zu der ganzen Dicke übereinstimmen. Im letzteren Falle würde wieder, wie bei den Gattungen I, die Politur der Sorten IIc, welche die Breitseiten normal zur Hauptspaltungsrichtung besitzt, weniger vollkommen sein, als die der Sorte IIa, bei denen sie parallel sind.

IIIa No. 1. $L = 14{,}3$, $B = 5490$, $D = 532{,}9$, $P = 80$,

1. Lage $\eta = 27{,}0 \quad 26{,}9 \quad 26{,}9$
2. Lage $\eta = 26{,}5 \quad 27{,}2 \quad 26{,}7$

Mittel $\eta = 26{,}9$, $\eta' = 3{,}5$,

$L = 22{,}3$,

1. Lage $\eta = 93{,}3 \quad 93{,}1 \quad 93{,}6$
2. Lage $\eta = 95{,}8 \quad 95{,}6 \quad 95{,}9$

Mittel $\eta = 94{,}5$, $(\eta') = 2{,}9$, $E = 9580000$.

IIIa No. 2. $L = 14{,}3$, $B = 5487$, $D = 533{,}5$, $P = 80$,

1. Lage $\eta = 27{,}0 \quad 26{,}4 \quad 26{,}5 \quad 27{,}3$
2. Lage $\eta = 26{,}7 \quad 26{,}7 \quad 26{,}4 \quad 26{,}5$

Mittel $\eta = 26{,}7$, $\eta' = 2{,}3$,

$L = 20{,}3$,

1. Lage $\eta = 71{,}7 \quad 71{,}8 \quad 72{,}1 \quad 71{,}9$
2. Lage $\eta = 72{,}4 \quad 72{,}4 \quad 72{,}7 \quad 72{,}5$

Mittel $\eta = 72{,}2$, $(\eta') = 2{,}9$, $E = 9530000$.

IIIa No. 3. $L = 14{,}3$, $B = 5483$, $D = 529{,}5$, $P = 90$,

1. Lage $\eta = 30{,}4 \quad 30{,}4 \quad 30{,}4$
2. Lage $\eta = 30{,}8 \quad 30{,}7 \quad 30{,}7$

Mittel $\eta = 30{,}6$, $\eta' = 2{,}7$,

$L = 22{,}3$,

1. Lage $\eta = 109{,}0 \quad 109{,}0 \quad 109{,}0$
2. Lage $\eta = 108{,}2 \quad 108{,}3 \quad 108{,}1$

Mittel $\eta = 108{,}6$, $(\eta') = 3{,}5$, $E = 9590000$.

$L = 20{,}3$,

1. Lage $\eta = 82{,}5 \quad 82{,}0 \quad 82{,}3 \quad 82{,}8$
2. Lage $\eta = 82{,}8 \quad 82{,}5 \quad 82{,}7 \quad 83{,}2$

Mittel $\eta = 82{,}6$, $(\eta') = 3{,}5$, $E = 9620000$.

IIIa No. 4. $L = 14{,}3$, $B = 5488$, $D = 530{,}6$, $P = 90$,

1. Lage $\eta = 31{,}1 \quad 31{,}2 \quad 31{,}6 \quad 31{,}2$
2. Lage $\eta = 31{,}4 \quad 31{,}2 \quad 31{,}3 \quad 31{,}4$

Mittel $\eta = 31{,}3$, $(\eta') = 3{,}9$,

$L = 22{,}3$,

1. Lage $\eta = 107{,}8 \quad 107{,}9 \quad 107{,}7 \quad 108{,}0$
2. Lage $\eta = 108{,}1 \quad 107{,}9 \quad 107{,}7 \quad 107{,}8$

Mittel $\eta = 107{,}9$, $(\eta') = 3{,}5$. $E = 9580000$.

IIIa No. 5. $L = 14{,}3$, $B = 5487$, $D = 530{,}0$, $P = 90$,

1. Lage $\eta = 31{,}7 \quad 31{,}7 \quad 31{,}8 \quad 31{,}7$
2. Lage $\eta = 31{,}5 \quad 31{,}5 \quad 31{,}5 \quad 31{,}4$

Mittel $\eta = 31{,}6$, $\eta' = 4{,}3$,

$L = 22{,}3$,

1. Lage $\eta = 107{,}3 \quad 107{,}6 \quad 107{,}6 \quad 107{,}6$
2. Lage $\eta = 108{,}1 \quad 108{,}3 \quad 108{,}4 \quad 108{,}4$

Mittel $\eta = 107{,}9$, $(\eta') = 3{,}5$, $E = 9610000$.

IIIa No. 6. $L = 14{,}3$, $B = 5504$, $D = 531{,}0$, $P = 90$,
1. Lage $\eta = 31{,}6 \quad 31{,}1 \quad 31{,}2 \quad 31{,}9$
2. Lage $\eta = 31{,}1 \quad 30{,}8 \quad 31{,}2 \quad 30{,}5$
Mittel $\eta = 31{,}2$, $\eta' = 3{,}7$,
$L = 22{,}3$,
1. Lage $\eta = 108{,}0 \quad 108{,}1 \quad 108{,}0 \quad 108{,}1$
2. Lage $\eta = 107{,}9 \quad 107{,}7 \quad 107{,}6 \quad 107{,}8$
Mittel $\eta = 107{,}9$, $(\eta') = 3{,}5$, $E = 9530000$.

IIIb No. 1. $L = 22{,}3$, $B = 5375$, $D = 524{,}6$, $P = 90$,
1. Lage $\eta = 113{,}1 \quad 113{,}4 \quad 113{,}5 \quad 113{,}5$
2. Lage (zerbrochen)
Mittel $\eta = 113{,}4$, $(\eta') = 3{,}6$, $E = 9610000$.

IIIb No. 2. $L = 14{,}3$, $B = 5394$, $D = 519{,}8$, $P = 70$,
1. Lage $\eta = 26{,}1 \quad 26{,}2 \quad 26{,}5 \quad 26{,}3$
2. Lage $\eta = 26{,}4 \quad 26{,}4 \quad 26{,}2 \quad 26{,}2$
Mittel $\eta = 26{,}3$, $(\eta') = 3{,}4$,
$L = 22{,}3$,
1. Lage $\eta = 90{,}4 \quad 90{,}0 \quad 90{,}2 \quad 90{,}3$
2. Lage $\eta = 90{,}2 \quad 90{,}5 \quad 99{,}4 \quad 90{,}1$
Mittel $\eta = 90{,}3$, $(\eta') = 3{,}1$, $E = 9620000$.

IIIb No. 3. $L = 14{,}3$, $B = 5385$, $D = 529{,}1$, $P = 70$,
1. Lage $\eta = 24{,}8 \quad 25{,}0 \quad 24{,}7 \quad 24{,}7$
2. Lage $\eta = 24{,}5 \quad 24{,}4 \quad 24{,}5 \quad 24{,}3$
Mittel $\eta = 24{,}6$, $(\eta') = 2{,}7$,
$L = 22{,}3$,
1. Lage $\eta = 86{,}1 \quad 86{,}2 \quad 86{,}2 \quad 86{,}1$
2. Lage $\eta = 85{,}3 \quad 85{,}5 \quad 85{,}4 \quad 85{,}4$
Mittel $\eta = 85{,}8$, $(\eta') = 3{,}1$, $E = 9650000$.
Gesammtmittel $E_{III} = 9594000$, $\mathrm{E}_{III} = 10{,}42 . 10^{-8}$.
Wahrscheinlicher Fehler ± 9000 $\quad \pm 0{,}0097$.

Beide Gattungen III geben merklich übereinstimmende Resultate; in der That liegt hier die Hauptspaltungsebene normal zu den Breitseiten beider.

IV No. 1. $L = 14{,}3$, $B = 5492$, $D = 529{,}8$, $P = 30$,
1. Lage $\eta = 25{,}0 \quad 25{,}1 \quad 24{,}9 \quad 25{,}2$
2. Lage $\eta = 26{,}9 \quad 26{,}9 \quad 26{,}5 \quad 26{,}5$
Mittel $\eta = 25{,}9$, $\eta' = 2{,}4$,
$L = 32{,}2$,
1. Lage $\eta = 272{,}4 \quad 272{,}2 \quad 272{,}3$
2. Lage $\eta = 269{,}6 \quad 269{,}6 \quad 269{,}4$
Mittel $\eta = 270{,}9$ $(\eta') = 2{,}0$, $E = 3768000$,

IV No. 2. $L = 14{,}3$, $B = 5491$, $D = 534{,}7$, $P = 30$,
1. Lage $\eta = 24{,}9 \quad 24{,}7 \quad 24{,}7$
2. Lage $\eta = 24{,}8 \quad 24{,}7 \quad 24{,}8$
Mittel $\eta = 24{,}8$, $\eta' = 2{,}1$,

$L = 32,2$,
1. Lage $\eta = 261,3 \quad 261,4 \quad 261,3$
2. Lage $\eta = 261,6 \quad 261,0 \quad 261,2$
Mittel $\eta = 261,3$, $(\eta') = 2,0$, $\mathfrak{E} = 3779000$.

IV No. 3. $L = 14,3$, $B = 5494$, $D = 518,5$, $P = 30$,
1. Lage $\eta = 26,7 \quad 26,8 \quad 26,7$
2. Lage $\eta = 26,9 \quad 26,9 \quad 26,8$
Mittel $\eta = 26,8$, $\eta' = 1,8$,
$L = 32,2$,
1. Lage $\eta = 285,5 \quad 285,7 \quad 285,9$
2. Lage $\eta = 285,4 \quad 285,5 \quad 285,5$
Mittel $\eta = 285,6$, $(\eta') = 2,0$, $\mathfrak{E} = 3788000$.

IV No. 4. $L = 14,3$, $B = 5495$, $D = 538,0$, $P = 30$,
1. Lage $\eta = 23,8 \quad 23,9 \quad 23,8$
2. Lage $\eta = 24,0 \quad 24,1 \quad 23,9$
Mittel $\eta = 23,9$, $\eta' = 1,5$,
L $\eta = 32,2$,
1. Lage $\eta = 257,9 \quad 257,0 \quad 257,0$
2. Lage $\eta = 257,3 \quad 257,2 \quad 257,3$
Mittel $\eta = 257,3$, $(\eta') = 2,0$ $\mathfrak{E} = 3768000$.

IV No. 5. $L = 14,3$, $B = 5499$, $D = 528,6$, $P = 30$,
1. Lage $\eta = 24,7 \quad 25,1 \quad 25,2 \quad 25,4$
2. Lage $\eta = 25,8 \quad 25,7 \quad 25,7 \quad 25,5$
Mittel $\eta = 25,4$, $\eta' = 2,0$,
$L = 32,2$,
1. Lage $\eta = 270,7 \quad 270,6 \quad 270,5$
2. Lage $\eta = 270,1 \quad 270,0 \quad 269,2$
Mittel $\eta = 270,3$, $(\eta') = 2,0$, $\mathfrak{E} = 3781000$.

IV No. 6. $L = 14,3$, $B = 5493$, $D = 529,8$, $P = 40$,
1. Lage $\eta = 33,3 \quad 33,4 \quad 33,3 \quad 33,3$
2. Lage $\eta = 33,2 \quad 33,1 \quad 33,4 \quad 33,3$
Mittel $\eta = 33,3$, $\eta' = 2,0$,
$L = 26,2$,
1. Lage $\eta = 194,7 \quad 194,8 \quad 194,7 \quad 194,8$
2. Lage $\eta = 194,6 \quad 194,5 \quad 194,6 \quad 194,4$
Mittel $\eta = 194,6$, $(\eta') = 1,9$, $\mathfrak{E} = 3755000$.

IV No. 7. $L = 14,3$, $B = 5496$, $D = 511,4$, $P = 40$,
1. Lage $\eta = 36,1 \quad 36,1 \quad 36,3 \quad 36,1$
2. Lage $\eta = 36,7 \quad 36,7 \quad 36,8 \quad 36,7$
Mittel $\eta = 36,4$, $\eta' = 1,7$,
$L = 26,2$,
1. Lage $\eta = 215,1 \quad 215,1 \quad 215,2 \quad 215,3$
2. Lage $\eta = 215,1 \quad 214,8 \quad 215,0 \quad 215,0$
Mittel $\eta = 215,1$, $(\eta') = 1,9$, $\mathfrak{E} = 3776000$.

Gesammtmittel $\mathfrak{E} = 3775000$, $E = 26,50 \cdot 10^{-8}$.
Wahrscheinlicher Fehler ± 2800 $\pm 0,020$.

V No. 1. $L = 14{,}3$, $B = 5543$, $D = 597{,}7$, $P = 50$,
1. Lage $\eta = 16{,}8 \quad 16{,}8 \quad 16{,}5$
2. Lage $\eta = 16{,}4 \quad 16{,}0 \quad 16{,}2$
Mittel $\eta = 16{,}5$, $\eta' = 6{,}1$,
$L = 32{,}2$,
1. Lage $\eta = 165{,}6 \quad 165{,}9 \quad 165{,}7$
2. Lage $\eta = 166{,}1 \quad 165{,}8 \quad 165{,}3$
Mittel $\eta = 165{,}7$ $(\eta') = 2{,}1$, $E = 7085000$.

V No. 2. $L = 14{,}3$, $B = 5565$, $D = 598{,}4$, $P = 50$,
1. Lage $\eta = 16{,}8 \quad 16{,}3 \quad 16{,}4$
2. Lage $\eta = 16{,}6 \quad 16{,}4 \quad 16{,}3$
Mittel $\eta = 16{,}5$, $\eta' = 2{,}3$,
$L = 32{,}2$,
1. Lage $\eta = 165{,}4 \quad 165{,}2 \quad 165{,}4$
2. Lage $\eta = 164{,}3 \quad 164{,}5 \quad 164{,}6$
Mittel $\eta = 164{,}9$, $(\eta') = 2{,}1$, $E = 7066000$.

V No. 3. $L = 14{,}3$, $B = 5567$, $D = 598{,}4$, $P = 50$,
1. Lage $\eta = 15{,}9 \quad 16{,}2 \quad 16{,}5$
2. Lage $\eta = 16{,}5 \quad 16{,}4 \quad 16{,}5$
Mittel $\eta = 16{,}5$, $\eta' = 2{,}3$,
$L = 32{,}2$.
1. Lage $\eta = 164{,}4 \quad 164{,}0 \quad 164{,}0$
2. Lage $\eta = 164{,}1 \quad 164{,}3 \quad 164{,}6$
Mittel $\eta = 164{,}2$, $(\eta') = 2{,}1$, $E \doteq 7095000$.

V No. 4. $L = 14{,}3$, $B = 5535$, $D = 584{,}0$, $P = 50$,
1. Lage $\eta = 17{,}4 \quad 17{,}1 \quad 16{,}9 \quad 16{,}9$
2. Lage $\eta = 17{,}2 \quad 17{,}0 \quad 17{,}0 \quad 17{,}1$
Mittel $\eta = 17{,}1$, $\eta' = 1{,}6$
$L = 30{,}2$,
1. Lage $\eta = 147{,}4 \quad 148{,}1 \quad 147{,}9$
2. Lage $\eta = 148{,}4 \quad 148{,}0 \quad 147{,}7$
Mittel $\eta = 147{,}9$, $(\eta) = 2{,}1$, $E = 7040000$.

V No. 5. $L = 28{,}2$, $B = 5359$, $D = 592{,}3$, $P = 50$,
1. Lage $\eta = 119{,}5 \quad 119{,}6 \quad 119{,}6$
2. Lage $\eta = 119{,}9 \quad 119{,}5 \quad 119{,}5$
Mittel $\eta = 119{,}6$, $(\eta') = 2{,}3$, $E = 7058000$.

V No. 6. $L = 14{,}3$, $B = 3530$, $D = 596{,}9$, $P = 30$,
1. Lage $\eta = 15{,}2 \quad 15{,}3 \quad 15{,}4 \quad 15{,}4$
2. Lage $\eta = 15{,}2 \quad 15{,}6 \quad 15{,}5 \quad 15{,}4$
Mittel $\eta = 15{,}4$, $\eta' = 2{,}3$,
$L = 28{,}2$,
1. Lage $\eta = 106{,}9 \quad 106{,}8 \quad 106{,}8 \quad 107{,}0$
2. Lage $\eta = 106{,}6 \quad 106{,}8 \quad 106{,}6 \quad 106{,}9$
Mittel $\eta = 106{,}8$, $(\eta') = 2{,}3$, $E = 7044000$.

Gesammtmittel $E_r = 7063000$, $E_r = 14{,}16 \cdot 10^{-8}$.
Wahrscheinlicher Fehler ± 6000, $\pm 0{,}005$

Die folgende Gattung VI′ war von allen die ungünstigste, da die Stäbchen in Folge eines Unglücksfalles auf den Wege von Homburg hierher zerbrochen in meine Hände kamen, so daß nur wenige Stücke die Beobachtung überhaupt zuließen. Die Nummern (1) — (3) waren darunter am besten zu verwerthen; um sie möglichst vollständig auszunutzen und ihnen einen entsprechenden Einfluß zu gewähren, sind sie nicht nur in verschiedenen Längen, sondern auch bei verschiedenen Belastungen (60 und 110 g) beobachtet.

Indessen habe ich nur die Beobachtungen mit 60 g Belastung mitgetheilt, da es sich zeigte, daß bei 110 g die dünneren Stäbchen nahe an der Grenze ihrer Tragfähigkeit waren und sich deshalb wohl unregelmäßig verhielten[1]; sie gaben nämlich übereinstimmend merklich größere Werthe von E als bei geringerer Inanspruchnahme. Durch besondere Beobachtungen überzeugte ich mich, daß bei 90 g Belastung die Proportionalität zwischen Gewicht und Biegung noch vollständig war. Für die Berechnung habe ich nur die eine Belastung, aber verschiedene Längen angewandt, weil dabei nur ein Werth von η' in Betracht kam, der durch das Mittel der an allen Stäbchen erhaltenen recht genau bestimmt werden konnte.

Die Nummern (4) und (5) waren nicht ganz tadellos, sondern an den Enden mit kleinen Sprüngen oder Fortwachsungserscheinungen behaftet; da dieselben aber an den Enden geringen Einfluß haben, so glaubte ich die bezüglichen Beobachtungen nicht unterdrücken zu sollen.

Das Stäbchen (6) war das einzige Fragment einer ganzen Reihe dickerer Stäbchen, das noch eine Beobachtung zuließ; um eine meßbare Biegung zu erhalten war hier die größere Belastung von 110 g erforderlich; die vereinzelte Messung von η' hat wenig Zuverlässigkeit, — ein etwas kleinerer Werth als 3,0, vielleicht 2,8 ist nach andern Beobachtungen wahrscheinlicher.

VI No. 1. $L = 14{,}3$, $B = 5143$, $D = 523{,}6$, $P = 60$,

1. Lage $\eta = 26{,}3 \quad 26{,}5 \quad 26{,}1 \quad 26{,}1$

2. Lage $\eta = 26{,}0 \quad 26{,}2 \quad 26{,}2 \quad 26{,}2$

Mittel $\eta = 26{,}2$, $\eta' = 1{,}4$,

---

1) In der That sprangen zwei in ganz unerklärlicher Weise, als ihnen die Belastung von 110 g nochmals für eine Wiederholung der Beobachtungsreihe zugemuthet wurde. Es scheint hiernach fast, daß ähnlich wie Metallstäbe durch fortgesetztes Hin- und Herbiegen spröder werden, auch die Krystallstäbchen an Zerbrechlichkeit zunehmen.

$L = 22,3$
1. Lage $\eta = 101,2 \quad 101,1 \quad 101,1 \quad 101,3$
2. Lage $\eta = 101,7 \quad 101\ 5 \quad 101,6 \quad 101,9$
Mittel $\eta = 101,5$, $(\eta') = 1,5$, $E = 7400000$.
$L = 20,25$,
1. Lage $\eta = 77,4 \quad 77,3 \quad 77,3 \quad 77,3$
2. Lage $\eta = 77,1 \quad 77,1 \quad 76,9 \quad 77,0$
Mittel $\eta = 77,2$, $(\eta') = 1,5$, $E = 7380000$.

VI No. 2. $L = 14,3$, $B = 5347$, $D = 528,3$, $P = 60$,
1. Lage $\eta = 26,5 \quad 26,7 \quad 26,6$
2. Lage $\eta = 26,4 \quad 26,1 \quad 25,8$
Mittel $\eta = 26,4$, $\eta' = 1,6$,
$L = 22,3$,
1. Lage $\eta = 95,3 \quad 94,9 \quad 95,0 \quad 95,0$
2. Lage $\eta = 95,7 \quad 96,2 \quad 96,1 \quad 96,1$
Mittel $\eta = 95,5$, $(\eta') = 1,5$, $E = 7370000$.
$L = 20,15$,
1. Lage $\eta = 72,0 \quad 71,8 \quad 72,0 \quad 72,0$
2. Lage $\eta = 72,9 \quad 72,8 \quad 72,7 \quad 72,8$
Mittel $\eta = 72,4$, $(\eta') = 1,5$, $E = 7380000$.

VI No 3. $L = 14,3$, $B = 5355$, $D = 527,1$, $P = 60$,
1. Lage $\eta = 26,3 \quad 26,5 \quad 26,1 \quad 26,1$
2. Lage $\eta = 26,0 \quad 26,2 \quad 26,2 \quad 26,2$
Mittel $\eta = 26,2$, $\eta' = 1,7$,
$L = 24,3$,
1. Lage $\eta = 122,2 \quad 122,0 \quad 122,0 \quad 122,0$
2. Lage $\eta = 121,8 \quad 121,6 \quad 121,8 \quad 121,7$
Mittel $\eta = 121,9$, $(\eta') = 1,5$, $E = 7490000$.
$L = 20,25$,
1. Lage $\eta = 71,9 \quad 71,8 \quad 71,8 \quad 71,9$
2. Lage $\eta = 72,5 \quad 72,6 \quad 72,5 \quad 72,4$
Mittel $\eta = 72,1$, $(\eta') = 1,5$, $E = 7440000$.

VI No. 4. $L = 14,3$, $B = 5164$, $D = 523,2$, $P = 60$,
1. Lage $\eta = 28,0 \quad 28,3 \quad 28,1 \quad 28,2$
2. Lage $\eta = 27,8 \quad 27,5 \quad 27,5 \quad 27,5$
Mittel $\eta = 27,8$, $\eta' = 1,3$,
$L = 18,3$,
1. Lage $\eta = 56,9 \quad 56,7 \quad 57,0 \quad 56,7$
2. Lage $\eta = 57,1 \quad 57,0 \quad 56,8 \quad 56,8$
Mittel $\eta = 56,9$, $(\eta') = 1,5$, $E = 7360000$.

VI No. 5. $L = 14,3$, $B = 5254$, $D = 523,9$, $P = 60$,
1. Lage $\eta = 27,5 \quad 27,1 \quad 27,3 \quad 27,5$
2. Lage $\eta = 27,6 \quad 27,7 \quad 27,8 \quad 27.7$
Mittel $\eta = 27,5$, $\eta' = 1,7$,
$L = 18,3$,
1. Lage $\eta = 55,9 \quad 56,0 \quad 55,8 \quad 55,8$
2. Lage $\eta = 55,6 \quad 55,4 \quad 55,8 \quad 55,6$
Mittel $\eta = 55,8$, $(\eta') = 1,5$, $E = 7370000$.

VI No. 6. $L = 14{,}3$, $B = 5361$, $D = 794{,}5$, $P = 110$,

1. Lage $\eta = 16{,}8 \quad 16{,}8 \quad 16{,}7$
2. Lage $\eta = 16{,}1 \quad 16{,}0 \quad 16{,}3$
Mittel $\eta = 16{,}4$, $\eta' = 3{,}3$,

$L = 20{,}3$,

1. Lage $\eta = 41{,}3 \quad 41{,}8 \quad 41{,}6 \quad 41{,}9$
2. Lage $\eta = 40{,}8 \quad 39{,}8 \quad 39{,}9 \quad 39{,}6$
Mittel $\eta = 40{,}8$, $(\eta') = 2{,}8$, $E = 7400000$.

Gesammtmittel $E_{VI} = 7400000$, $\mathrm{E}_{VI} = 13{,}51 \,.\, 10^{-8}$.
Wahrscheinlicher Fehler $\pm\, 9300$, $\pm\, 0{,}017$.

Die im Vorstehenden erhaltenen Werthe sind nun noch wegen der Abweichung der Orientirung der Stäbchen von der vorgeschriebenen zu corrigiren. Auf die Gattungen I, II und III haben allerdings kleine Orientirungsfehler keinen merklichen Einfluß, wohl aber auf IV, V und VI.

Bezeichnet man resp. mit $45^{\circ} + \delta_2$ und $45^{\circ} + \delta_3$ den Winkel, den die Stäbchen der Gattung IV und V resp. mit der b- und c-Axe einschließen, so gelten die früheren Formeln (s. p. 586)

$$\mathrm{E}_{IV} = (\mathrm{E}_{IV}) - (\mathrm{E}_{II} - \mathrm{E}_{III})\,\delta_2,$$
$$\mathrm{E}_{V} = (\mathrm{E}_{V}) - (\mathrm{E}_{III} - \mathrm{E}_{I})\,\delta_3;$$

hierin bezeichnen die in Klammern gestellten E die direct beobachteten Werthe.

Bei der Gattung IV gab die Messung, die an den Resten der Platten angestellt wurde, aus welchen die Stäbchen gesägt waren, $\delta_2 = -0{,}6^{\circ}$, bei der Gattung V $\delta_3 = +0{,}^{\circ}8$; die erlangte Genauigkeit von $0{,}^{\circ}1$ genügt für unsern Zweck. Berechnet man die dadurch bedingte Correction, so ergiebt sich, daß zu den beiden beobachteten Werthen von E 0,08 additiv hinzuzufügen ist.

Die Orientirung der Stäbchen VI′ fand sich merklich richtig, wie zu begreifen ist, da bei der Orientirung eine Spaltungsrichtung maßgebend war.

Die corrigirten Werthe der E sind hiernach:

$$\mathrm{E}_{I} = (16{,}13 \pm 0{,}015)\,10^{-8}, \quad \mathrm{E}_{IV} = (26{,}58 \pm 0{,}020)\,10^{-8},$$
$$\mathrm{E}_{II} = (18{,}51 \pm 0{,}008)\,10^{-8}, \quad \mathrm{E}_{V} = (14{,}24 \pm 0{,}005)\,10^{-8},$$
$$\mathrm{E}_{III} = (10{,}42 \pm 0{,}010)\,10^{-8}, \quad \mathrm{E}_{VI} = (13{,}51 \pm 0{,}017)\,10^{-8}.$$

Drillungen.

Ib No. 1. $L = 29{,}63$, $B = 5596$, $D = 873{,}6$,

rR. $G + 30$, $\sigma =$ 128,3 128,5 128,4 128,9, $\rho = 5{,}5$
$G + 15$, $\sigma =$ 79,7 79,1 79,1 79,4, $\rho = 4{,}5$
G , $\sigma =$ 30,2 30,1 30,3 30,1, $\rho = 4{,}5$
$\sigma_{30} = 98{,}3$, $\delta T = -9000$ $\quad T = 2825000.$

$L = 22{,}26$,

rR. $G + 40$, $\sigma =$ 118,1 117,9 111,8 117,9 117,7 117,8, $\rho = 1{,}9$
$G + 20$, $\sigma =$ 66,6 66,7 66,8 66,5 66,3 66,3, $\rho = 1{,}5$
G , $\sigma =$ 15,2 15,1 15,1 15,1, $\rho = 1{,}4$
$\sigma_{40} = 102{,}8$, $\delta T = -9000$ $\quad T = 2829000.$

Ib No. 2. $L = 42{,}81$, $B = 5424$, $D = 873{,}5$,

lR. $G + 30$, $\sigma =$ 202,2 202,3 202,2 202,4 202,3, $\rho = 9{,}0$
$G + 15$, $\sigma =$ 124,5 124,9 125,3 125,1 125,2, $\rho = 7{,}8$
G , $\sigma =$ 47,8 47,7 47,8 47,9 47,8, $\rho = 7{,}0$

rR. $G + 30$, $\sigma =$ 203,6 203,3 203,1 202,8, $\rho = 3{,}5$
$G + 15$, $\sigma =$ 125,7 126,3 126,2 126,0, $\rho = 2{,}8$
G , $\sigma =$ 49,2 49,2 49,0 48,6 $\rho = 2{,}2$
$\sigma_{30} = 154{,}3$, $\delta T = -5000$, $\quad T = 2823000.$

Ib No. 3. $L = 38{,}47$, $B = 5437$, $D = 870{,}0$,

rR. $G + 30$, $\sigma =$ 165,1 165,1 165,0 164,9, $\rho = 3{,}0$
$G + 15$, $\sigma =$ 95,4 95,3 95,5 95,2, $\rho = 2{,}8$
G , $\sigma =$ 26,6 26,5 26,6 26,6, $\rho = 2{,}0$

lR. $G + 30$, $\sigma =$ 166,2 166,3 166,0 165,8, $\rho = 2{,}0$
$G + 15$, $\sigma =$ 96,4 96,3 96,2 96,2, $\rho = 2{,}3$
G , $\sigma =$ 26,4 26,4 26,3 26,4, $\rho = 2{,}1$
$\sigma_{30} = 139{,}1$, $\delta T = -6000$, $\quad T = 2837000.$

$L = 30{,}91$,

lR. $G + 30$, $\sigma =$ 132,8 133,0 132,6 132,5 132,4 132,4, $\rho = 4{,}6$
$G + 15$, $\sigma =$ 75,9 76,2 75,8 75,7 75,8 75,8, $\rho = 4{,}2$
G , $\sigma =$ 20,3 20,5 20,3 20,6 20,2, $\rho = 3{,}6$

rR. $G + 30$, $\sigma =$ 133,4 133,4 133,3 133,0 133,1 133,1, $\rho = 4{,}0$
$G + 15$, $\sigma =$ 76,8 77,0 76,9 76,7 76,7 76,8, $\rho = 3{,}8$
G , $\sigma =$ 21,3 21,1 21,2 21,4 21,2, $\rho = 3{,}6$
$\sigma_{30} = 112{,}1$, $\delta T = -6000$, $\quad T = 2828000.$

Ib No. 4. $L = 46{,}50$, $B = 5612$, $D = 873{,}0$

rR. $G + 20$, $\sigma =$ 159,2 159,3 159,4 159,0, $\rho = 3{,}4$
$G + 10$, $\sigma =$ 105,2 105,2 105,1 105,3, $\rho = 3{,}3$
G , $\sigma =$ 51,8 51,8 51,3 51,5, $\rho = 2{,}8$

lR. $G + 20$, $\sigma =$ 159,1 159,5 159,2 159,1, $\rho = 4{,}2$
$G + 10$, $\sigma =$ 105,0 106,0 106,0 105,8, $\rho = 3{,}0$
G , $\sigma =$ 51,8 51,7 51,8 51,7, $\rho = 3{,}3$
$\sigma_{20} = 187{,}6$, $\delta T = -5000$, $\quad T = 2826000.$

Ib No. 5. $L = 46{,}94$, $B = 5611$, $D = 871{,}0$,

lR. $G + 30$, $\sigma =$ 195,0 195,1 195,0 195,0, $\rho = 4{,}7$
$G + 15$, $\sigma =$ 113,2 112,9 112,9 112,9, $\rho = 4{,}6$
G , $\sigma =$ 30,6 30,8 30,8 30,7, $\rho = 4{,}4$

lR. $G+30$, $\sigma =$ 190,9 191,0 191,2 191,1, $\rho =$ 11,8
$G+15$, $\sigma =$ 109,1 108,9 109,0 109,0, $\rho =$ 11,9
G , $\sigma =$ 27,1 27,1 27,3 27,0, $\rho =$ 11,5
$\sigma_{30} =$ 164,2, $\delta T = -$ 5000 $\mathfrak{T} =$ **2824000.**

Gesammtmittel $\mathfrak{T}_b =$ **2828000,** $\mathrm{T}_b =$ **35,36 . 10^{-6}.**
Wahrscheinlicher Fehler $\pm$ 1200 $\pm$ 0,015.

Ic No. 1. $L =$ 38,12, $B =$ 5705, $D =$ 906,2.
rR. $G+30$, $\sigma =$ 149,9 149,7 149,9 150,0 150,2 149,9, $\rho =$ 2,2
$G+15$, $\sigma =$ 85,7 86,0 85,9 85,8 85,8 85,9, $\rho =$ 2,5
G , $\sigma =$ 22,5 22,5 22,6 22,5 $\rho =$ 2,6
rR. $G+30$, $\sigma =$ 152,0 152,0 152,0 152,1 152,1 152,0, $\rho =$ 2,1
$G+15$, $\sigma =$ 88,3 88,2 88,1 88,3 88,2 88,2, $\rho =$ 2,0
G , $\sigma =$ 24,5 24,5 24,4 24,4, $\rho =$ 2,0
$\sigma_{30} =$ 127,5, $\delta T = -$ 8000 $\mathfrak{T} =$ **2934000.**

Ic No. 2. $L =$ 35,43, $B =$ 5441, $D =$ 905,8,
rR. $G+30$, $\sigma =$ 132,7 132,5 132,4 132,5 132,6 132,6, $\rho =$ 2,0
$G+15$, $\sigma =$ 77,0 77,2 77,0 76,9 $\rho =$ 2,6
G , $\sigma =$ 21,0 20,9 20,9 20,9, $\rho =$ 2,7
lR. $G+30$, $\sigma =$ 131,1 131,1 131,3 131,5 131,5 131,4, $\rho =$ 3,5
$G+15$, $\sigma =$ 75,9 76,0 76,0 75,9, $\rho =$ 3,6
G , $\sigma =$ 20,8 20,8 20,7 20,8, $\rho =$ 3,6
$\sigma_{30} =$ 111,05, $\delta T = -$ 8000 $\mathfrak{T} =$ **2919000.**
$L =$ 30,00,
lR. $G+40$, $\sigma =$ 143,3 143,2 143,4 143,3 143,4 143,2, $\rho =$ 3,6
$G+20$, $\sigma =$ 80,0 80,2 80,0 80,1, $\rho =$ 3,0
G , $\sigma =$ 17,4 17,7 17,7 17,7, $\rho =$ 2,8
rR. $G+40$, $\sigma =$ 142,4 142,5 142,4 142,3, $\rho =$ 3,2
$G+20$, $\sigma =$ 79,8 79,6 79,3 79,6, $\rho =$ 3,0
G , $\sigma =$ 17,2 17,1 17,2 17,3, $\rho =$ 2,8
$\sigma_{40} =$ 125,45, $\delta T = -$ 0 $\mathfrak{T} =$ **2925000.**

Ic No. 4. $L =$ 31,89, $B =$ 3876, $D =$ 908,6,
lR. $G+20$, $\sigma =$ 124,5 124,5 124,6 124,7 124,6 $\rho =$ 2,6
$G+10$, $\sigma =$ 76,0 76,0 75,9 75,8, $\rho =$ 2,5
G , $\sigma =$ 27,6 27,6 27,5 27,5, $\rho =$ 2,2
$\sigma_{20} =$ 97,1, $\delta T = -$ 5000 $\mathfrak{T} =$ **2936000.**
$L =$ 28,51,
lR. $G+20$, $\sigma =$ 111,9 111,9 112,0 111,4 111,4 111,5, $\rho =$ 3,4
$G+10$, $\sigma =$ 68,1 67,9 67,9 67,8, $\rho =$ 3,0
G , $\sigma =$ 24,4 24,3 24,5 24,2, $\rho =$ 2,4
rR. $G+20$, $\sigma =$ 111,0 111,2 111,0 110,8 110,9 110,9, $\rho =$ 2,6
$G+10$, $\sigma =$ 67,3 67,3 67,3 66,8, $\rho =$ 2,6
G , $\sigma =$ 24,2 24,3 24,2 24,3 $\rho =$ 3,0
$\sigma_{20} =$ 87,05, $\delta T = -$ 0 $\mathfrak{T} =$ **2932000.**

Ic No. 5. $L =$ 26,44, $B =$ 3925, $D =$ 904,4,
lR. $G+20$, $\sigma =$ 103,3 103,2 103,4 103,3, $\rho =$ 2,6
$G+10$, $\sigma =$ 62,9 63,0 62,9 63,0, $\rho =$ 2,8
G , $\sigma =$ 22,9 22,8 22,5 22,6, $\rho =$ 2,8

		σ						ρ
rR.	$G+20$,	$\sigma =$ 103,5	103,4	103,4	103,1,			$\rho =$ 1,5
	$G+10$,	$\sigma =$ 63,0	62,6	63,0	62,8,			$\rho =$ 1,5
	G,	$\sigma =$ 22,6	22,7	22,6	22,6,			$\rho =$ 1,4
		$\sigma_{40} =$ 80,75,	$\delta T = -6000$					$\mathbf{T} = 2917000.$
		$L =$ 19,42,						
lR.	$G+20$,	$\sigma =$ 75,6	75,5	75,4	75,4	75,3	75,4,	$\rho =$ 4,2
	$G+10$,	$\sigma =$ 45,7	45,6	45,9	45,9,			$\rho =$ 3,8
	G,	$\sigma =$ 16,2	16,4	16,4	16,4,			$\rho =$ 3,6
rR.	$G+20$,	$\sigma =$ 75,0	75,0	74,9	75,4	75,2	75,2,	$\rho =$ 5,2
	$G+20$,	$\sigma =$ 45,4	45,3	45,4	45,6,			$\rho =$ 5,4
	G,	$\sigma =$ 15,8	16,1	16,1	16,1,			$\rho =$ 4,6
		$\sigma_{20} =$ 59,10,	$\delta T = -6000$,					$\mathbf{T} = 2927000.$

Gesammtmittel $\mathbf{T}_{Ic} = 2927000$, $T_{Ic} = 34{,}16 \cdot 10^{-8}$.
Wahrscheinlicher Fehler ± 1900, $\pm 0{,}022$.

Die folgende Gattung (IIc) bot bei der Beobachtung große Schwierigkeiten. Einerseits erwies sie sich zerbrechlicher als irgend eine frühere, was damit zusammenhängen mag, daß die Hauptspaltungsrichtung normal zu den Breitseiten steht, die beiden andern mit ihnen Winkel von nahe 40° bilden, aber keine von ihnen den Breitseiten parallel liegt. Ferner zeigte sie einen äußerst geringen Drillungswiderstand — nur etwa 0,4 der beiden vorhergehenden Gattungen —, so daß die Fehler, welche durch die aufgelegten Stanniolstreifen entstanden, sehr bedeutend wurden; trotzdem ließ die große Zerbrechlichkeit nicht zu, die Belege dünner zu wählen, weil dann die Stäbchen durch den Druck der Spiegelklemmen noch mehr gefährdet gewesen wären. Endlich aber zeigten die verschiedenen Stäbe untereinander fast ganz constante Abweichungen in den Resultaten, die sich weder aus Verschiedenheiten der Politur erklären lassen — denn die Biegungsbeobachtungen zeigen sie nicht —, noch aus Inhomogenitäten der Substanz — denn das optische Verhalten war tadellos; überdies führte die Benutzung derselben Stäbchen in verschiedenen Längen auf merklich dieselben Resultate. Ein Grund für die Abweichungen war also nicht nachweisbar und es blieb nichts anderes übrig, als von den weit über 2000 Ablesungen, die ich zur Bestimmung des einen Coefficienten T_{IIc} angestellt habe, diejenigen Reihen zusammenzustellen, welche an den vier längsten Stäbchen gemacht waren, und die mit den kurzen Fragmenten erhaltenen zu unterdrücken, weil bei diesen, welche in Fassungen eingekittet beobachtet wurden, sich stets Kitt aus den Fassungen an den Stanniolbelegungen hinzog und den Drillungswiderstand vermehrte, wie dies durch die Beobachtung auch bestätigt wurde. Die Genauigkeit, welche die mitgetheilten Reihen geben, reicht nicht ganz an

diejenige der früheren heran, doch würde eine weitere Wiederholung der Beobachtungen nur eine trügerische Verbesserung gegeben haben, da die constanten Differenzen zwischen den Resultaten der verschiedenen Stäbchen unerklärt bleiben.

IIc No. 1.	$L = 29{,}90$,	$B = 5630$,	$D = 743{,}5$,						
$rR.$	$G + 10$,	$\sigma =$ 191'6	191,5	191,5	190,9,				$\rho = 6{,}5$
	$G + 5$,	$\sigma =$ 129,5	129,6	128,7	128,7,				$\rho = 6{,}2$
	G ,	$\sigma =$ 67,8	67'5	67,5	67,2,				$\rho = 5{,}8$
$lR.$	$G + 10$,	$\sigma =$ 192,6	192,2	192,4	192,2,				$\rho = 4{,}4$
	$G + 5$,	$\sigma =$ 130,9	130,8	130,9	130,9,				$\rho = 4{,}2$
	G ,	$\sigma =$ 69,8	69,5	69,6	69,5,				$\rho = 4{,}0$
		$\sigma_{10} = 123{,}25$,	$\delta T = -9000$						$T = 1216000.$
		$L = 24{,}56$,							
$rR.$	$G + 10$,	$\sigma =$ 158,0	157,3	157,4	157,2	157,4	157,4,		$\rho = 2{,}4$
	$G + 5$,	$\sigma =$ 106,8	106,7	106,4	106,8,				$\rho = 2{,}2$
	G ,	$\sigma =$ 56,3	56,4	56,2	56,2,				$o = 2{,}0$
$lR.$	$G + 10$,	$\sigma =$ 158,8	158,6	158,7	159,1	159,0	159,2,		$\rho = 4{,}4$
	$G + 5$,	$\sigma =$ 108,1	108,1	108,1	108,2,				$\rho = 4{,}0$
	G ,	$\sigma =$ 57,2	57,1	57,2	57,2,				$o = 2{,}4$
		$\sigma_{10} = 101{,}40$,	$\delta T = -9000$						$T = 1214000.$
IIc No. 2′.	$L = 25{,}85$,	$B = 5641$,	$D = 734{,}6$,						
$rR.$	$G + 10$,	$\sigma =$ 168,4	168,0	168,3	168,1,				$\rho = 2{,}2$
	$G + 5$,	$\sigma =$ 114,4	114,5	114,2	114,3,				$\rho = 2{,}0$
	G ,	$\sigma =$ 60,3	60,5	60,1	60,1,				$\rho = 1{,}8$
$lR.$	$G + 10$,	$\sigma =$ 168,1	167,9	167,2	167,3,				$\rho = 3{,}1$
	$G + 5$,	$\sigma =$ 113,9	114,0	113,7	113,8,				$\rho = 2{,}8$
	G ,	$\sigma =$ 60,4	60,4	60,6	60,6,				$\rho = 2{,}8$
		$\sigma_{10} = 107{,}6$,	$\delta T = -24000$,						$T = 1229000.$
		$L = 23{,}95$,							
$rR.$	$G + 10$,	$\sigma =$ 158,2	157,6	158,0	157,8	157,4	158,0,		$\rho = 5{,}0$
	G ,	$\sigma =$ 56,1	56,2	56,4	56,4,				$\rho = 5{,}0$
lR	$G + 10$,	$\sigma =$ 160,9	160,6	161,0	160,5	160,3	160,5,		$\rho = 6{,}3$
	G ,	$\sigma =$ 58,3	58,3	58,4	58,3,				$\rho = 6{,}5$
		$\sigma_{10} = 101{,}9$,	$\delta T = 0$						$T = 1227000.$
IIc No. 3′.	$L = 23{,}92$,	$B = 3863$,	$D = 741{,}5.$						
$rR.$	$G + 5$,	$\sigma =$ 159,1	159,1	159,0	159,1	159,0	159,5,		$\rho = 4{,}5$
	G ,	$\sigma =$ 84,8	84,9	84,5	84,9	84,5	84,5,		$\rho = 4{,}8$
$lR.$	$G + 5$,	$\sigma =$ 160,4	160,2	159,9	159,0	159,7	159,9,		$\rho = 9{,}0$
	G ,	$\sigma =$ 85,6	84,9	85,8	84,7	84,9,			$\rho = 9{,}0$
		$\sigma_{10} = 149{,}1$,	$\delta T = -9000$						$T = 1213000.$
IIc No. 4.	$L = 37{,}75$,	$B = 5618$,	$D = 744{,}5$,						
$rR.$	$G + 10$,	$\sigma =$ 245,3	244,9	244,2	244,7,				$\rho = 7{,}4$
	$G + 5$,	$\sigma =$ 165,4	165,5	164,5	164,7,				$\rho = 6{,}3$
	G ,	$\sigma =$ 86,1	85,8	85,9	85,6,				$\rho = 6{,}1$
$lR.$	$G + 10$,	$\sigma =$ 244,6	244,4	244,3	244,5,				$\rho = 5{,}2$
	$G + 5$,	$\sigma =$ 166,0	166,3	166,9	166,6,				$\rho = 4{,}8$
	G ,	$\sigma =$ 87,3	88,0	87,5	87,7,				$\rho = 4{,}6$
		$\sigma_{10} = 157{,}9$,	$\delta T = -4000$,						$T = 1210000.$

		$L = 36{,}40$,							
lR.	$G + 10$,	$\sigma =$ 238,6	239,0	238,5	238,0	238,7	238,4,	$\rho = 4{,}8$	
	$G + 5$,	$\sigma =$ 163,1	162,9	162,1	162,0	161,8,		$\rho = 5{,}0$	
	G,	$\sigma =$ 86,2	86,3	85,4	85,5	85,3,		$\rho = 5{,}0$	
rR.	$G + 10$,	$\sigma =$ 239,0	239,2	239,4	239,0	238,7	238,5,	$\rho = 3{,}4$	
	$G + 5$,	$\sigma =$ 162,7	162,6	162,3	162,6	162,7,		$\rho = 3{,}8$	
	G,	$\sigma =$ 76.1	75,6	75,7	75,9,			$\rho = 3{,}0$	
		$\sigma_{10} = 153{,}0$.	$\delta T = -3000$,					$\mathfrak{T} = 1206000$.	
		$L = 17{,}70$,							
lR.	$G + 10$,	$\sigma =$ 116,7	116,8	116,6	116,5	116,5	116,4,	$\rho = 7{,}2$	
	G,	$\sigma =$ 48,4	42,8	42,6	42,6,			$\rho = 6{,}4$	
rR.	$G + 10$,	$\sigma =$ 116,7	116,7	116,6	116,7	116,8	116,7,	$\rho = 9{,}4$	
	G,	$\sigma =$ 42,2	42,2	42,3	42,2,			$\rho = 9{,}0$	
		$\sigma_{10} = 74{,}25$,	$\delta T = -5000$,					$\mathfrak{T} = 1206000$.	

Gesammtmittel $\mathfrak{T}_{IIc} = 1215000$, $T_{IIc} = 82{,}30 \cdot 10^{-8}$.
Wahrscheinlicher Fehler ± 2000 $\pm 0{,}14$.

Die vorstehend mitgetheilten Beobachtungen benutzen die besten vorhandenen Gattungen Stäbchen; an sich wären auch die Gattungen IIa und IIIa zur Bestimmung der Constanten T zu benutzen gewesen, aber wegen ihrer geringern Länge war auch für die Beobachtungen der Biegungen die Dicke kleiner gewählt und hierdurch wurden die Drillungsbeobachtungen gefährlicher und ungenauer. Da übrigens die Constanten T_{Ib} und T_{Ic} sich oben bereits mit ausreichender Genauigkeit ergeben haben, T_{IIc} aber durch die noch vorhandenen übrigen Stäbchen sich nicht bestimmt, so theile ich auch die angestellten Beobachtungsreihen, welche nur zur Bestätigung des Gesetzes $T_{Ib} = T_{IIa}$ und $T_{Ic} = T_{IIIa}$ dienen könnten, nicht mit.

Resultate.

Für die Anwendung stellen wir das gefundene System Werthe noch einmal zusammen. Es war:

$$
\begin{aligned}
E_{I} &= (16{,}13 \pm 0{,}015) \cdot 10^{-8}, \quad E_{IV} = (26{,}58 \pm 0{,}020) \cdot 10^{-8}, \\
E_{II} &= (18{,}51 \pm 0{,}008) \cdot 10^{-8}, \quad E_{V} = (14{,}24 \pm 0{,}005) \cdot 10^{-8}, \\
E_{III} &= (10{,}42 \pm 0{,}010) \cdot 10^{-8}, \quad E_{VI} = (13{,}51 \pm 0{,}017) \cdot 10^{-8}, \\
T_{IIc} &= T_{IIIb} = (82{,}30 \pm 0{,}140) \cdot 10^{-8}, \\
T_{IIIa} &= T_{Ic} = (34{,}16 \pm 0{,}022) \cdot 10^{-8}, \\
T_{Ib} &= T_{IIa} = (35{,}36 \pm 0{,}015) \cdot 10^{-8}.
\end{aligned}
\qquad 32)
$$

Es ist für die Folgerungen unangenehm, daß die größte von diesen Zahlen auch den relativ größten wahrscheinlichen Fehler hat, indeß ließ sich dies, wie oben erörtert, nicht ändern.

Aus diesem System folgt die Reihe der s_{hk} folgendermaßen:

$$33)\quad \begin{aligned} s_{11} &= (16{,}13 \pm 0{,}015) \,.\, 10^{-8}, & s_{23} &= -(2{,}46 \pm 0{,}075) \,.\, 10^{-3}, \\ s_{22} &= (18{,}57 \pm 0{,}008) \,.\, 10^{-8}, & s_{31} &= -(1{,}88 \pm 0{,}015) \,.\, 10^{-8}, \\ s_{33} &= (10{,}42 \pm 0{,}010) \,.\, 10^{-8}, & s_{12} &= -(8{,}80 \pm 0{,}021) \,.\, 10^{-8}, \\ s_{44} &= (82{,}30 \pm 0{,}140) \,.\, 10^{-8}, \\ s_{55} &= (34{,}16 \pm 0{,}022) \,.\, 10^{-8}, \\ s_{66} &= (35{,}36 \pm 0{,}015) \,.\, 10^{-8}. \end{aligned}$$

Die wahrscheinlichen Fehler sind wie auf S. 592 berechnet.

Die erhaltenen Zahlen bestimmen nach Formel (5) den allgemeinen Werth des Dehnungscoefficienten; wir erhalten:

$$34)\quad \mathrm{E} = 1/E = [16{,}13 \,.\, \alpha^4 + 18{,}51 \,.\, \beta^4 + 10{,}42 \,.\, \gamma^4 + 2(38{,}79 \,.\, \beta^2\gamma^2 + 15{,}21 \,.\, \gamma^2\alpha^2 + 8{,}88 \,.\, \alpha^2\beta^2)] \,.\, 10^{-8}.$$

Maxima und Minima liegen in den Hauptebenen an folgenden Stellen und haben folgende Werthe:

I. *bc*-Ebene, $\sphericalangle L, a = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \sphericalangle L, b &= 0, & \mathrm{E}_{II} &= 18{,}51 \,.\, 10^{-8}, \\ \sphericalangle L, b &= 40^{\circ}\,12', & (\mathrm{E}_{IV}) &= 26{,}93 \,.\, 10^{-8}, \\ \sphericalangle L, b &= 90^{\circ}, & \mathrm{E}_{III} &= 10{,}42 \,.\, 10^{-8}. \end{aligned}$$

II. *ca*-Ebene, $\sphericalangle L, b = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \sphericalangle L, c &= 0, & \mathrm{E}_{III} &= 10{,}42 \,.\, 10^{-8}, \\ \sphericalangle L, c &= 90^{\circ}, & \mathrm{E}_{I} &= 16{,}13 \,.\, 10^{-8}, \end{aligned}$$

III. *ab*-Ebene, $\sphericalangle L, c = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \sphericalangle L, a &= 0, & \mathrm{E}_{I} &= 16{,}13 \,.\, 10^{-8}, \\ \sphericalangle L, a &= 40^{\circ}\,57', & (\mathrm{E}_{VI}) &= 10{,}84 \,.\, 10^{-8}, \\ \sphericalangle L, a &= 90^{\circ}, & \mathrm{E}_{II} &= 18{,}51 \,.\, 10^{-8}. \end{aligned}$$

Es bietet hiernach der Baryt ein interessantes Beispiel, insofern E in jeder Hauptebene sich anders verhält; in der *bc*-Ebene erreicht es zwischen den Hauptaxen ein Maximum, in der *ab*-Ebene ein Minimum, in der *ca*-Ebene keines von beiden.

Außer diesen nimmt E noch ein relatives Maximum außer den Hauptebenen an für

$$\sphericalangle L, a = 30^{\circ}\,44', \quad \sphericalangle L, b = 76^{\circ}\,21', \quad \sphericalangle L, c = 63^{\circ}\,;3'$$

sein Werth beträgt

$$(E) = 15{,}54 \,.\, 10^{-8}.$$

Absolute Maxima und Minima stellen die Werthe

$$E_{III} = 10{,}42 \,.\, 10^{-8} \text{ und } (E_{IV}) = 26{,}93 \,.\, 10^{-8}$$

dar; die Differenz zwischen ihnen ist ganz außerordentlich und ähnlich noch bei keiner krystallinischen Substanz außer etwa bei Kalkspath erhalten.

Die Aenderung von E mit der Richtung im Baryt wird durch die Fig. (3) anschaulich gemacht, welche die drei Hauptschnitte der Oberfläche (34) darstellt. Die Größe der Längsdehnung oder Biegung eines Cylinders von constanten Dimensionen ist bei wechselnder Orientirung seiner Axe mit E proportional.

Das allgemeine Gesetz des Drillungscoefficienten T lautet nach dem System (33) und der Formel (9):

$$\begin{aligned} T = 1/T = [&4(16{,}13 \,.\, \alpha^2\alpha_1^2 + 18{,}51 \,.\, \beta^2\beta_1^2 + 10{,}42 \,.\, \gamma^2\gamma_1^2) \\ &+ 2(72{,}46 \,.\, \beta\beta_1\gamma\gamma_1 + 26{,}64 \,.\, \gamma\gamma_1\alpha\alpha_1 + 0{,}16 \,.\, \alpha\alpha_1\beta\beta_1) \qquad (35) \\ &+ 82{,}30\,(\beta^2\gamma_1^2 + \gamma^2\beta_1^2) + 34{,}16(\gamma^2\alpha_1^2 + \alpha^2\gamma_1^2) + 35{,}36(\alpha^2\beta_1^2 + \beta^2\alpha_1^2)] \,.\, 10^{-8}. \end{aligned}$$

Bemerkenswerth ist die außerordentliche Verschiedenheit der drei Coefficienten der zweiten Reihe.

Einfacher ist der Werth des Drillungscoefficienten eines Kreiscylinders, welcher lautet:

$$\begin{aligned} T' = [&69{,}52 \,.\, \alpha^2 + 117{,}66 \,.\, \beta^2 + 116{,}46 \,.\, \gamma^2 \\ &+ 4(-48{,}45 \,.\, \beta^2\gamma^2 - 3{,}85 \,.\, \gamma^2\alpha^2 + 11{,}17 \,.\, \alpha^2\beta^2)] \,.\, 10^{-8} \qquad (36) \end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned} = [&69{,}52 \,.\, \alpha^4 + 117{,}66 \,.\, \beta^4 + 116{,}46\,\gamma^4 \\ &+ 2\,(20{,}16 \,.\, \beta^2\gamma^2 + 85{,}29 \,.\, \gamma^2\alpha^2 + 127{,}35 \,.\, \alpha^2\beta^2)] \,.\, 10^{-8}. \end{aligned}$$

Maxima und Minima liegen in den Hauptschnitten und haben folgende Lagen und Werthe:

I. *bc*-Ebene, $\sphericalangle L, a = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \sphericalangle L, b &= 0, & T'_{II} &= 117{,}7 \,.\, 10^{-8}, \\ \sphericalangle L, b &= 45^\circ 1', & (T'_{IV}) &= 68{,}61 \,.\, 10^{-8}, \\ \sphericalangle L, b &= 90^\circ, & T'_{III} &= 116{,}5 \,.\, 10^{-8}, \end{aligned}$$

II. *ca*-Ebene, $\sphericalangle L, b = \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned} \sphericalangle L, c &= 0, & T'_{III} &= 116{,}5 \,.\, 10^{-8}, \\ \sphericalangle L, c &= 90^\circ, & T'_{I} &= 69{,}5 \,.\, 10^{-8}, \end{aligned}$$

III. *ab*-Ebene, $\quad < L, c = \frac{\pi}{2}$,

$$
\begin{aligned}
< L, a &= 0, & T'_{I} &= 69{,}5 \,.\, 10^{-8}, \\
< L, a &= 67^\circ 44', & (T'_{VI}) &= 119{,}1 \,.\, 10^{-8}, \\
< L, a &= 90^\circ, & T'_{II} &= 117{,}7 \,.\, 10^{-8}.
\end{aligned}
$$

Außerdem findet ein relatives Maximum statt in einer Richtung die gegeben ist durch:

$$< L, a = 47^\circ 56', \quad < L, b = 65^\circ 19', \quad < L, c = 52^\circ 8';$$

seine Größe beträgt

$$T' = 85{,}54 \,.\, 10^{-8}.$$

Die Abhängigkeit der Größe T' von der Richtung der Axe des Kreiscylinders wird durch Fig. (4) verdeutlicht, welche die Hauptschnitte der Oberfläche (36) darstellt. Die Größe der Drillung eines Kreiscylinders ist bei constanten Dimensionen mit T' proportional.

Die Coefficienten der lineären Dilatation bei allseitig gleichem Druck ergeben sich aus den Formeln (16) in Rücksicht auf das System (33):

$$(37) \quad A_a = 5{,}45 \,.\, 10^{-8}, \qquad A_b = 7{,}25 \,.\, 10^{-8}, \qquad A_c = 6{,}08 \,.\, 10^{-8},$$

ebenso der Coefficient der cubischen Dilatation

$$M = 18{,}78 \,.\, 10^{-8},$$

also außerordentlich viel größer als bei Topas. Von den Coefficienten A hängen auch die durch allseitigen Druck auftretenden Winkeländerungen ab.

Es erübrigt noch die Berechnung der Elasticitätsconstanten c_{hk} aus den in (33) angegebenen s_{hk} gemäß den Formeln (4). Man erhält:

$$
(31) \quad
\begin{aligned}
c_{11} &= 9{,}0_7 \,.\, 10^6, & c_{22} &= 8{,}0_0 \,.\, 10^6, & c_{33} &= 10{,}7_4 \,.\, 10^6, \\
c_{44} &= 1{,}2_2 \,.\, 10^6, & c_{55} &= 2{,}9_3 \,.\, 10^6, & c_{66} &= 2.8_3 \,.\, 10^6, \\
c_{23} &= 2{,}7_3 \,.\, 10^6, & c_{31} &= 2{,}7_5 \,.\, 10^6, & c_{12} &= 4{,}6_8 \,.\, 10^6.
\end{aligned}
$$

Die Poisson'schen Relationen (15)

$$c_{44} = c_{23}, \qquad c_{55} = c_{31}, \qquad c_{66} = c_{12},$$

finden sich auch bei Baryt sehr wenig bestätigt; man wird also seinen Molekülen eine merkliche Polarität beilegen müssen.

Anhang.

Während die Schwierigkeiten der Drillungsbeobachtungen andere Bearbeiter von dem Problem der Bestimmung aller Elasticitätsconstanten bisher fern gehalten haben, sind Biegungswiderstände in nicht geringer Zahl gemessen worden, und es steht zu erwarten, daß noch weitere Arbeiten der Art folgen werden. In Rücksicht hierauf halte ich mich für verpflichtet, einige Bedenken über die zumeist angewandte Methode hier auszusprechen, auf die mich die Wahrnehmung der theilweise bedeutenden Differenzen, die andere Beobachter derselben Materialien gegenüber meinen Zahlen erhalten haben, geführt hat.

Die Beobachtungen sind fast ausnahmslos mit dem sinnreichen Warburg-Koch'schen Apparat ausgeführt, von dessen Benutzung mich nur der Zustand meiner Augen, die mikroscopische Ablesungen nur kurze Zeit leisten können, abgehalten hat. In Bezug auf seine Anwendung ist mir Folgendes aufgefallen.

Die von Herrn Warburg aufgestellte Formel für die Biegung ist nur eine angenährte, nicht so wegen des von Herrn Koch erwähnten Umstandes, daß sie eine bestimmte Vertheilung der biegenden Kräfte auf die Querschnitte voraussetzt, sondern besonders, weil sie gerade in Bezug auf die am meisten gespannten mittleren Stabelemente Voraussetzungen benutzt, die in Wirklichkeit nicht erfüllt sind.

Herr Koch bezieht sich bei der Reproduction der Ableitung auf das Lehrbuch der Elasticitätstheorie von Clebsch. Auf p. 105 stehen dort die Werthe der Verschiebungen u, v, w parallel der Dicke, Breite und Länge des Prismas, wenn die Kraft A wirkt, in folgender Form:

$$u = \frac{A}{Eq\lambda^2}\left[\mu\frac{x^2-y^2}{2}(l-z)+\frac{z^2 l}{2}-\frac{z^3}{6}+z\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\right)_0\right]$$
$$v = \frac{A}{Eq\lambda^2}\mu xy(l-z)$$
$$w = \frac{A}{Eq\lambda^2}\left[-lxz+\frac{z^2}{2}+B_1-x\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\right)_0\right].$$

Hierin bezeichnet q die Fläche des Querschnitts, λ den Trägheitsradius desselben um die Y-Axe, μ ist das Verhältniß von Quercontraction und Längsdilatation. B_1 ist eine Function von x und y, welche von der Form des Querschnittes abhängt.

Von diesen Formeln ist die letzte durch ein Versehen unrichtig, welches sich durch mehrere Abschnitte des Buches hin-

zieht [1]); wie die Formeln (72) auf Seite (72) zeigen fehlt in der

---

1) Ich benutze diese Gelegenheit, um auf einen andern Fehler aufmerksam zu machen, der in diesem vorzüglichen Buch stehen geblieben ist und sich mehr versteckt, dabei aber größeren Einfluß besitzt.

In § 24 werden die Functionen untersucht, auf welche das De St. Vénant'sche Problem führt. Die Function Ω welche durch die Gleichung (66)

$$\Delta\Omega = 0$$

und einen gewissen Werth für $\frac{\overline{\partial \Omega}}{\partial n}$ in Gleichung (67) definirt ist, wird zerlegt in

$$\Omega = bB + b_0 B_0 + b_1 B_1 + b_2 B_2,$$

und, indem jedes dieser Glieder für sich behandelt wird, erwiesen, daß die Function B unmöglich, die Constante b also nothwendig gleich Null sein muß.

Indessen ist dabei stillschweigend vorausgesetzt, daß die vier Constanten b von einander unabhängig sind, also beliebig gleich Null genommen werden können. Und dies ist nicht zulässig.

Wendet man aber das p. 83 auf die B angewandte Verfahren auf das ganze Ω an, so gelangt man zu folgendem Resultat.

Aus $\Delta\Omega = 0$ folgt bekanntlich das Randintegral

$$\int ds \frac{\overline{\partial \Omega}}{\partial n} = \int ds \left(\frac{\overline{\partial \Omega}}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\overline{\partial \Omega}}{\partial y} \cos(n, y) \right) = 0.$$

Nun ist $\frac{\overline{\partial \Omega}}{\partial n}$ gegeben in der Form:

$$\frac{\overline{\partial \Omega}}{\partial n} = X \cos(n, x) + Y \cos(n, y).$$

Setzt man:

$$X = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad Y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

oder also

$$\Delta\varphi = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}, \qquad \Delta\psi = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},$$

so berechnet sich

$$\int ds \frac{\overline{\partial \Omega}}{\partial n} = \int df \, \Delta\varphi + \int ds \frac{\overline{\partial \psi}}{\partial s}.$$

Dies letztere Glied über die geschlossene Randcurve integrirt verschwindet, und es bleibt sonach

$$\int ds \frac{\overline{\partial \Omega}}{\partial n} = \int df \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) = 0.$$

Setzt man aus der Gleichung (67) die Werthe für X und Y ein, so läßt sich das Flächenintegral berechnen, man erhält

$$b + b_1 \xi + b_2 \eta = 0,$$

falls ξ und η die Schwerpunktscoordinaten des Querschnitts bezeichnen. Die Clebsch'sche Folgerung $b = 0$ ist also nur richtig, wenn der Schwerpunkt des

Klammer das Glied $-xy^2$ und muß $\frac{z^2}{2}$ der Factor x haben, es ist richtig:

$$w = \frac{A}{Eq\lambda^2}\left[-xz\left(l-\frac{z}{2}\right)-xy^2+B_1-x\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\right)_0\right].$$

Dieser Werth steht aber mit dem thatsächlichen Verhalten des durch Belastung in der Mitte gebogenen Stabes im mittelsten Querschnitt im Widerspruch. Während in Wahrheit dort für alle Elemente des Querschnittes die Verschiebung w gleich Null ist, giebt die obige Formel auf $z = 0$ angewandt:

$$w = \frac{A}{Eq\lambda^2}\left[-xy^2+B_1-x\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\right)_0\right];$$

daraus folgt, daß auch die Spannungen gerade in diesen am meisten in Anspruch genommenen Querschnitten in Wirklichkeit andere sind, als sie die aus den obigen Gleichungen abgeleitete Biegungsformel voraussetzt. Der Fehler, der hierbei gemacht ist, dürfte schwer zu beurtheilen sein, denn mit der richtigen Nebenbedingung

$$\text{für } z = 0 \qquad w = 0$$

ist die ganze De St. Vénant'sche Methode garnicht anwendbar; — aber soviel ist klar, daß er mit abnehmendem Verhältniß der Länge zur Dicke sehr wachsen muß, und es scheint mir sehr wahrscheinlich, daß er bei Beobachtungen, wo die Länge ca. 12^{mm}, die Dicke ca. 1^{mm} beträgt nicht zu vernachlässigen ist; — ja ich glaube, daß die Anwendung des Warburg'schen Correctionsgliedes trügerisch ist, und in allen Fällen, wo dieses merklich wird, auch der erwähnte Fehler sich geltend macht. In der That bemerkt Herr Koch [1], daß die Warburg'sche Formel seine Beobachtungen an kurzen und langen Stäbchen nicht vollständig zur Uebereinstimmung bringt.

Daher habe ich von jeher mit der Länge auch die Dicke der Stäbchen abnehmen lassen, bei 20^{mm} Länge sind die benutzten Dicken schon nur ca. $0{,}5^{mm}$. Dies zur Anwendung der Theorie auf die Beobachtungen.

Querschnitts der als Befestigungspunkt definirte Coordinatenanfang ist. Diese Annahme ist aber nicht gemacht, sie wird erst viel später p. 96 zur Vereinfachung der Resultate in speciellen Fällen eingeführt.

1) Koch, Wied. Ann. Bd. 5, p. 264. 1878.

Zu diesen selbst möchte ich auf die Bemerkung verweisen, die Herr Koch in Bezug auf die Eindrückung von Stäbchen und Lagerschneiden macht[1]; es scheint mir hiernach nicht zulässig bei der Anwendung kurzer Stäbe mit geringer Durchbiegung, wo der bezügliche Einfluß sehr groß wird, für die Eindrückung einen Werth zu benutzen, der an einem andern als dem beobachteten Material erhalten ist. Ja, nach den im Vorstehenden niedergelegten Erfahrungen halte ich es sogar für erwünscht, die Bestimmung der Eindrückung in jenen Fällen an jedem Stäbchen durch Anwendung desselben in zwei verschiedenen Längen vorzunehmen; sowohl die Gestalt als die Politur der Breitseite, auf welcher das Stäbchen aufliegt, ist von Einfluß auf jene Größe.

Was die von Herrn Niedmann[2]) durch Beobachtung an Stäben von Baryt erhaltenen Biegungswiderstände angeht, die mir, nachdem vorstehende Beobachtungen im Wesentlichen vollendet waren, durch die freundliche Zusendung der Arbeit durch den Verfasser bekannt wurden, so liefert eine Vergleichung seiner Zahlen mit den meinigen folgendes Bild:

	N.	V.
E_I	6,50	6,20
E_{II}	5,41	5,40
E_{III}	8,49	9,60.

Der erste Werth stimmt leidlich, der zweite durchaus, der dritte weicht völlig ab. Herr Niedmann hat für die erste und letzte Bestimmung ein, für die mittlere zwei Stäbchen benutzt. Ob sein Material von dem meinigen abweichende chemische Zusammensetzung hat, und diese überhaupt eine solche Abweichung erklärt, weiß ich nicht. Dagegen ist mir zweierlei bemerkenswerth erschienen.

Erstens liegt normal zur Längsaxe der Stäbchen, die E_{III} bestimmen, die Hauptspaltungsrichtung, — es ist also hier am wahrscheinlichsten, daß Sprünge das Resultat beeinflussen und E verkleinern.

Zweitens ist das aus den Beobachtungen von Kreisscheiben erhaltene Verhältniß der Biegungswiderstände $E_{III}:E_I$ und $E_{III}:E_{II}$ so nahe gleich dem aus der Beobachtung an Stäbchen erhaltenen gefunden, daß es Bedenken erregen muß; denn es ist von vorn herein klar, daß bei der Biegung einer Kreisplatte, die im Cen-

1) Koch, Wied. Ann. Bd. 18, p. 337. 1883.
2) H. Niedmann, Z. f. Kryst. u. Min. Bd. XIII, p. 362. 1887.

trum belastet ist und auf zwei parallelen Sehnen aufliegt, die je nach der Lage dieser Sehnen erhaltenen Unterschiede viel geringer ausfallen müssen, als bei normal zu diesen Sehnen orientirten Stäben. Ich möchte demgemäß die Uebereinstimmung einer Störung der Beobachtung an den Stäbchen zuschreiben.

Die durch Beobachtungen an den Kreisscheiben erhaltenen Maxima und Minima der Biegungswiderstände fallen ziemlich genau in diejenigen Richtungen, welche die strenge Methode der Beobachtung an Stäbchen ergeben hat.

Herr Niedmann findet in der *bc*-Ebene, außer den Minimis in den Hauptaxen, ein Maximum in der Richtung 38° gegen die *b*-Axe, ich in der Richtung 40° 12′, — in der *ab*-Ebene, außer den Maximis in den Hauptaxen, ein Minimum in der Richtung 39°,5 gegen die *a*-Axe, ich in der Richtung 40°57′, — endlich in der *ac*-Ebene kein Maximum oder Minimum außerhalb der Hauptaxen, ich desgleichen. Hierin bewährt sich also die Methode der Beobachtung an Kreisscheiben, die sich wegen des geringen Materialverbrauchs empfiehlt, ganz entschieden. Richtige Verhältnisse der Biegungswiderstände oder gar brauchbare absolute Werthe kann sie in der bisherigen Form nicht liefern. Setzt man, um Verhältnißzahlen zu vergleichen $E_{III} = 1$, so erhält man für sämmtliche Maxima und Minima folgendes Tableau.

			N.	V.
I.	*bc*-Ebene:	E_{II}	1,54	1,78
		(E_{IV})	1,79	2,59
		E_{III}	1,00	1,00
II.	*ca*-Ebene:	E_{III}	1,00	1,00
		E_{I}	1,32	1,55
III.	*ab*-Ebene:	E_{I}	1,35	1,55
		(E_{VI})	1,25	1,04
		E_{II}	1,54	1,78.

Der letzte Werth E_{II} ist in Herrn Niedmann's Tafel aus der Beobachtung in der *bc*-Ebene herübergenommen. Berücksichtigt man dies, so bemerkt man, daß, wie von vorn herein zu erwarten, die Beobachtungen mit den Kreisscheiben alle Unterschiede der Größen E sehr bedeutend verringert erscheinen lassen. Denn daß diese enormen Unterschiede sich auch nur zum Theil durch das verschiedene Material erklären, halte ich bei einer Substanz wie Baryt für ausgeschlossen.

Berichtigungen
in der Beilage zu den Nachrichten „Die Mitarbeiter an den Götting. gel. Anzeigen."

S. 44 Z. 24 Börrach lies Lörrach und setze am Schlusse hinzu: Hugo hat selbst seine Beiträge gesammelt herausgegeben unter dem Titel: Beiträge zur civilistischen Bücher-Kenntniß. 1—3. Bd. Berlin 1828—44.

S. 52 Z. 12 1817 lies 1819. — S. 64 Z. 8 Nettelrode lies Nettelrede.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

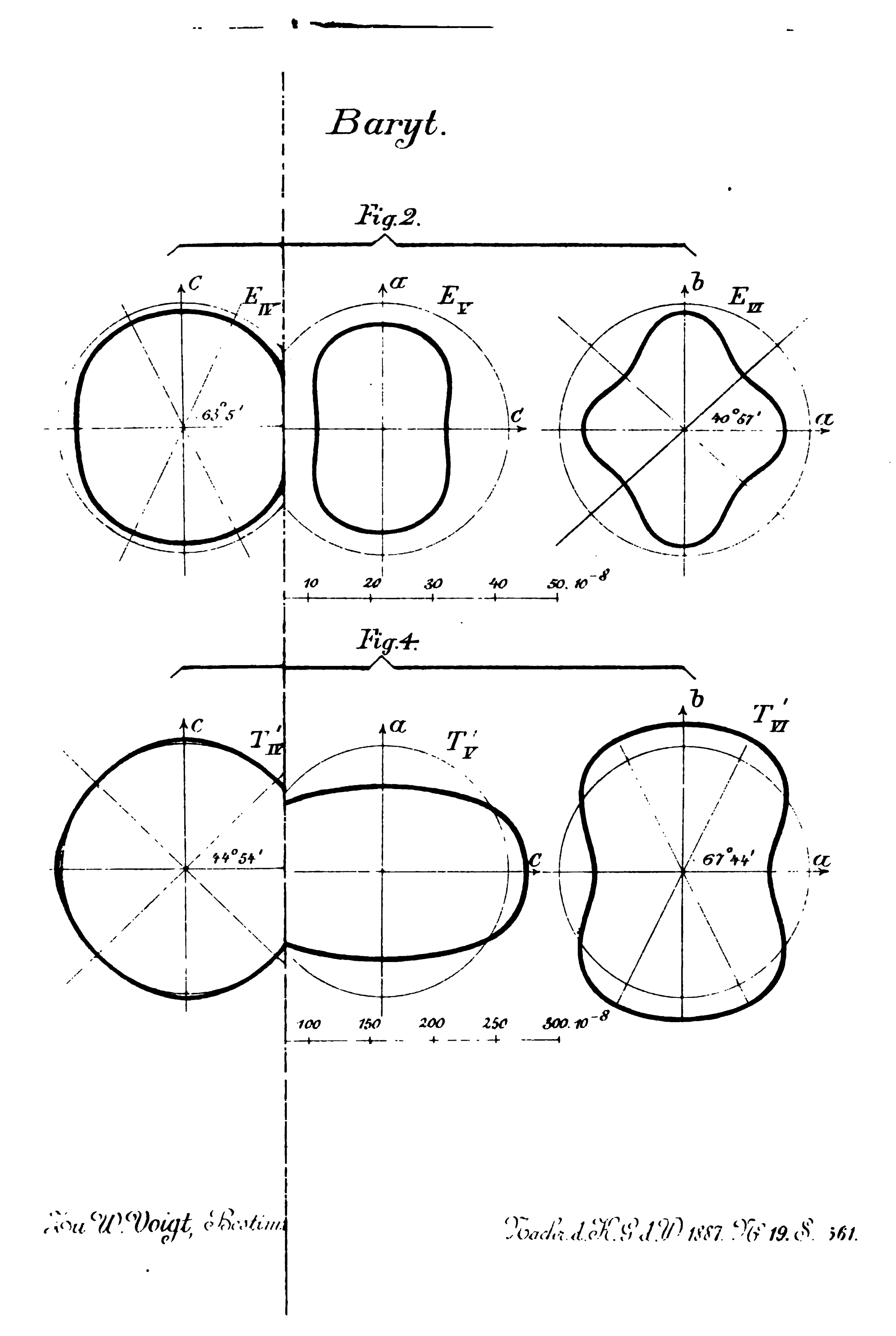
Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

November.

Sitzungsberichte der K. Pr. Akademie der Wissensch. zu Berlin. 1887. XL, XLI und XLII, XLIII, XLIV und XLV, XLVI. (2 mal).
Veröffentlichung des Kön. Pr. geodätischen Instituts. Präcisions-Nivellement der Elbe. Dritte Mittheilung.
Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematik. Band XVI. Jahrg. 1884. Heft 3.
Jahrbücher des Nassauschen Vereins für Naturkunde. Jahrgang 40.
Ueber die Bankiers, die Buchführung und die Litteralobligation der Römer v. M. Voigt. (Des X. B. d. Abhandl. der philol.-histor. Cl. der K. Sächs. Ges. d. W. No. VII).
Acta mathematica 10 [4].
XIV. Bericht der naturforschenden Gesellsch. in Bamberg.
Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins in Heidelberg. N. F. Vierter Band. Heft 1.
Sitzungsberichte der Gesellsch. für Morphologie u. Physiologie in München. II. 1886. 1—3. Heft.
Ueber den Einfluß der Temperatur auf die Elasticität der Metalle v. Nisson Katzenelsohn. (Berliner Inaugural-Dissert. 1887).
Fünfter Jahresber. des Vereins für Naturw. zu Braunschw. für 1886—1887. Als Festschrift zum 25jähr. Bestehen.
K. B. Akademie der Wissenschaften zu München: Sitzungsberichte der philos.-philolog.- u. historischen Classe. 1887. Band II. Heft 1. 1887. Band I. Heft 3.
Kaiserl. Akademie d. Wissensch. zu Wien.
a. Denkschriften. Band 51 u. 52.
b. Register zu den Bänden XV—XXXV. der Denkschriften.
c. Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissensch. Classe.
Erste Abtheilung Band XCIII Heft IV u. V.
— XCIV Heft I bis V.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).



Baryt.
Fig. 2.
c
E_IV
a
E_V
c
b
E_VI
a
63°5'
40°57'
10 20 30 40 50. 10^-8
Fig. 4.
c
T'_IV
a
T'_V
b
T'_VI
44°54'
c
67°44'
a
100 150 200 250 300. 10^-8
Zu W. Voigt, Bestimm
Nachr. d. K. G. d. W. 1887. № 19. S. 561.



Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

3. December. № 20. 1887

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung vom 3. December.

Jahresbericht des beständigen Sekretärs.

Voigt: Zum Gedächtniß von Gustav Kirchhoff. (Erscheint in Bd. 35 der Abhandlungen).

Prof. Karl Schering in Straßburg: Neuer Correctionsapparat für das Bifilar-Magnetometer zur Bestimmung der Veränderung des Stabmagnetismus ohne Benutzung der Declination. Vorgelegt von Ernst Schering.

O. Hölder: Ueber eine Formel, welche keiner algebraischen Functionalgleichung genügt. Vorgelegt von Schwarz.

de Lagarde: Gregor von Armenien, aus Vaticanischen Handschriften. (Erscheint in Band 35 der Abhandlungen).

2. Ueber eine vergessene Handschrift des sogenannten Fragmententargums.

Bericht des Sekretärs.

Seiner Pflicht gemäß erstattet hiermit der beständige Sekretär der Gesellschaft einen kurzen Bericht über das, was im Verlauf dieses Jahres in der Gesellschaft geschah und geleistet wurde.

Versammlungen fanden neun statt, in denen folgende Vorträge gehalten oder Mittheilungen gemacht wurden.

8. Januar. Riecke: Ueber einige Beziehungen zwischen hydrodynamischen und elektrischen Erscheinungen.

Meyer: Ueber die Molekulargröße des Zinks.

Dedekind in Braunschweig, auswärt. Mitglied: Erläuterungen zur Theorie der sogenannten allgemeinen complexen Größen. Vorgelegt für Herrn Weber von Sauppe.

Voigt: Ueber das Dopplersche Princip.

Weingarten in Berlin, Korrespondent: Eine neue Klasse auf einander abwickelbarer Flächen. Vorgelegt von Schwarz.

Frensdorff legt die zweite Abtheilung seiner Abhandlung: „Das statutarische Recht der deutschen Kaufleute in Nowgorod" vor. (Im 34. Bande der Abhandlungen gedruckt.)

5. Februar. von Könen: Ueber die Crinoiden des Muschelkalks. (Im 34. Bande der Abhandlungen gedruckt.)

Meyer und Warrington: Ueber Zersetzung der Acetoxime.

P. Drude: Ein Satz aus der Determinantentheorie. Vorgelegt von Herrn Voigt.

de Lagarde kündigt: „Ausgewählte Kapitel der vergleichenden Grammatik der semitischen Sprachen. I. Die einsylbigen Hauptwörter einiger semitischer Sprachen" für die Abhandlungen an.

Schwarz zeigt ein von Herrn Dr. von Lichtenfels in Wien mit großer Sorgfalt ausgeführtes Gypsmodell einer speciellen Minimalfläche vor, welches derselbe der hiesigen K. Sammlung mathematischer Instrumente und Modelle als Geschenk überwiesen hat.

A. Hurwitz, Professor in Königsberg: Ueber diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen. Empfohlen von Herrn Prof. Klein.

Meyer: Zur Kenntniß einiger Metalle.

5. März. von Könen: Ueber die ältesten und jüngsten Tertiärbildungen der Umgegend von Kassel.

Meyer und J. Mensching: Beschreibung eines Pyrometers.

Meyer: Ueber eine chemische Eigenschaft carbonyl- und cyanhaltiger Benzylverbindungen.

Herr Prof. Marmé in Göttingen: Neuere Untersuchungen über die Wirkung des Cytisinnitrats. Vorgelegt von Merkel.

Riecke: Zwei Fundamentalversuche zur Lehre von der Pyroëlektricität.

Dr. Krüger: Ueber den galvanischen Widerstand dünner Metallplatten. Vorgelegt von Riecke.

7. Mai. Meyer: Medicinisch-chemische Notizen.

Meyer und R. Demuth: Ueber die Sulfurane.

Meyer und J. Mensching: Ueber das Verhalten des Antimons, Phosphors und Arsen's bei Weißglühhitze.

Prof. Franz Mertens in Graz, Korrespondent der mathem. Klasse: Ueber die Convergenz einer aus Primzahlpotenzen gebildeten unendlichen Reihe.

Derselbe: Ueber ein dreifaches Integral, welches das Potential eines homogenen Ellipsoids als speciellen Fall enthält. Vorgelegt von Schwarz.

Prof. Weingarten in Berlin, Korresp. der mathem. Klasse:

Ueber die durch eine Gleichung von der Form $\mathfrak{X} + \mathfrak{Y} + \mathfrak{Z} = 0$ darstellbaren Minimalflächen. Vorgelegt von Schwarz.

Prof. Julius Petersen in Kopenhagen: Ueber n-dimensionale complexe Zahlen. Vorgelegt von Schwarz.

R. Hennig: Beobachtungen über Metallreflexion. Vorgelegt von Voigt.

Wieseler: Zweiter Nachtrag zu der Abhandlung über die Einlegung und Verzierung von Werken aus Bronze mit Silber und anderem Material in der griech. und römischen Kunst.

de Lagarde: Purim. Ein Beitrag zur Geschichte der Religion. (Im 34. Band der Abhandlungen gedruckt.)

21. Mai. Prof. Hermann in Königsberg, Korrespondent: Ueber Polarisation zwischen Elektrolyten. Vorgelegt von Riecke.

Prof. Fuchs in Berlin, auswärt. Mitglied: Bemerkungen zu einer Note des Herrn Hurwitz, enthalten in Nr. 6 Jahrg. 1887 p. 104 ff. der Nachrichten. Vorgelegt von de Lagarde.

Dr. J. Brock: Zur Systematik der Cephalopoden. Vorgelegt von Ehlers.

Meyer und G. Daccomo: Bestimmung der Dichte des Stickoxyds bei niederer Temperatur.

2. Juli. Dr. Hamann: Vorläufige Mittheilungen zur Morphologie der Ophiuren. Vorgelegt von Ehlers.

A. Henle: Das plasmatische Canalsystem des stratum mucosum geschichteter Epithelien. Vorgelegt von Merkel.

H. Berkenbusch: Die Blutversorgung der Beugesehnen der Finger. Vorgelegt von Merkel.

Schering: C. F. Gauß und die Erforschung des Erdmagnetismus. (Gedruckt im 34. Bande der Abhandlungen.)

L. Holborn: Resultate aus den Beobachtungen der magnetischen Deklination, welche während der Jahre 1844—1886 zu Klausthal angestellt sind. Vorgelegt von Schering.

Schwarz: Ueber specielle, zweifach zusammenhängende Flächenstücke, welche kleineren Flächeninhalt besitzen, als alle benachbarten, von denselben Randlinien begrenzten Flächenstücke. (Gedruckt im 34. Band der Abhandlungen.)

General Ed. Neovius in Helsingfors: Ueber eine specielle geometrische Aufgabe des Minimums. Vorgelegt von Schwarz.

Dr. Schönflies: Ueber einige ebene Configurationen und die zugehörigen Gruppen von Substitutionen. Vorgelegt von Schwarz.

Voigt: Theoretische Studien über die Electricitätsverhältnisse der Krystalle. (Gedruckt im 34. Bande der Abhandlungen.)

Dr. Baltzer: Ueber einen Satz der Determinantentheorie. Aus einem Briefe des Verfassers von Voigt mitgetheilt.

O. Bolza: Darstellung der rationalen ganzen Invarianten der Binärform sechster Ordnung durch die Nullwerthe der zugehörigen ϑ-Funktionen.

H. Maschke: Ueber die quaternäre, endliche, lineare Substitutionsgruppe der Borchardtschen Moduln.

Prof. Dr. Voss in München: Ueber bilineare Formen. Die drei letzten Mittheilungen empfohlen von Prof. F. Klein.

Wieseler: Archäologische Beiträge. (Erscheint im 35. Band der Abhandlungen.)

Wüstenfeld: Die Mitarbeiter an den Göttinger Gelehrten Anzeigen 1801—1830. (Erschienen als Ergänzungsheft zu den Nachrichten von 1887.)

Während der Universitätsferien wurden mit Zustimmung der physicalischen Klasse in den Nachrichten S. 435 ff. gedruckt:

Liebisch: Ueber eine besondere Art von homogenen Deformationen krystallisirter Körper.

und

Professor Ferd. Braun in Tübingen: Ueber einen allgemeinen qualitativen Satz für Zustandsänderungen nebst einigen sich anschließenden Bemerkungen, insbesondere über nicht eindeutige Systeme. Vorgelegt von Riecke.

5. November.

Riecke: Ueber die scheinbare Wechselwirkung von Ringen, welche sich in einer incompressiblen Flüssigkeit in Ruhe befinden.

Prof. Hermann in Königsberg, Korrespondent: Kleiner Nachtrag zu der Mittheilung in den Nachrichten 1887 S. 326 ff. Vorgelegt von Riecke.

Voigt: Bestimmung der Elasticitätsconstanten für Topas und Baryt.

Klein: Zur Theorie der hyperelliptischen Functionen beliebig vieler Argumente.

Prof. Reifferscheid in Greifswald: Des Kaiser Sigismund Buch von Eberhard Windeck. Vorgelegt von Sauppe.

de Lagarde: Agathangelos Geschichte der Armenier. (Erscheint im 35. Bande der Abhandlungen.)

Meyer: Ueber die negative Natur organischer Radicale.

2. Weitere Beobachtungen über die Haltbarkeit antiseptischer Sublimatlösungen.

Mit Ausnahme derjenigen Mittheilungen, deren Aufnahme in die Abhandlungen angegeben worden ist, sind alle in den Nachrichten zum Abdruck gekommen.

Außerdem wurden in den Sitzungen die Wahlen neuer Mitglieder vollzogen und andere Geschäfte erledigt, die sich zum großen Theil auf den Tauschverkehr mit andern Akademien, Gesellschaften, Anstalten und Vereinen bezogen.

Ihrem ordentlichen Mitglied, Herrn Professor Dr. Wieseler, überbrachten der zeitige Direktor, Professor Ehlers, und der beständige Sekretär am 13. Januar die besten Glückwünsche der Gesellschaft zur 50jährigen Jubelfeier seiner Promotion.

Zu demselben Zweck sendete die Gesellschaft Adressen an Herrn Professor Beyrich in Berlin, der am 12. April 1837 promoviert hatte, und an ihr Ehrenmitglied, Sr. Excellenz Herrn von Kokscharow, Mitglied der Kais. Russischen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, der am 18. Juni dasselbe Fest feierte.

Sie hatte ferner die Freude ihre innige Theilnahme an zwei Festen zu bezeugen, die sie auf das nächste berührten. Am 8. August feierte unsere Universität das Fest ihres hundertfünfzigjährigen Bestehns. Wie die Gesellschaft mit der Universität entstanden ist, so ist sie in all ihrer Entwicklung, ihrer Thätigkeit und ihrem Wohl unzertrennlich mit derselben verbunden. Durchdrungen von diesem Gefühl glaubte sie ihre Wünsche für die Blüthe und fernere segensreiche Wirksamkeit der Universität am besten durch die Widmung des 34. Bandes ihrer Abhandlungen zum Ausdruck bringen zu können. Der beständige Sekretär übergab denselben Sr. Magnificenz dem Herrn Prorektor in der eigentlichen Festversammlung, die am 8. August in der Aula stattfand.

Am 14. Oktober aber begieng der Herr Geheime Regierungsrath Dr. Adolf von Warnstedt, den die Gesellschaft seit 1867 unter ihre Ehrenmitglieder zählt, die 50jährige Jubelfeier seines Eintritts in den Staatsdienst. Seit mehr als einem Menschenalter hat er mit seltener Kenntniß der Verhältnisse und unermüdeter Sorgfalt für das Wohl wie der Universität so auch unserer Gesellschaft gesorgt, ihre Mittel zu mehren und dadurch eine Erweiterung ihrer Thätigkeit möglich zu machen sich bemüht. So hielt sich die Gesellschaft für verpflichtet die Gefühle inniger Dankbarkeit und die herzlichsten Wünsche für sein Wohlergehn ihm in einer Adresse auszusprechen, welche Direktor und Sekretär an seinem Ehrentage überreichten.

Ueber die Preisfragen ist Folgendes zu berichten.

1. Für dies Jahr lag die von der Physicalischen Klasse 1884 gestellte Aufgabe vor:

„Es wird eine eingehende, besonders auch chemische Untersuchung gewünscht 1) des stickstofffreien Reservestoffs, welcher in den Samen der gelben und blauen Lupine (muthmaßlich auch anderer Lupinenarten) die Stelle des für gewöhnlich in den Samen der Leguminosen enthaltenen Stärkemehls vertritt, sowie 2) der Umwandlung dieses Reservestoffs bei der Keimung."

Es ist am 26. September, also zu rechter Zeit, eine Abhandlung eingegangen, die mit dem Motto

Viribus unitis.

bezeichnet war. Ein versiegeltes Couvert mit demselben Spruch lag bei.

Nach eingehender Prüfung hatte die physicalische Klasse ihr Urtheil in folgender Weise zusammengefaßt:

„Die mitgetheilten Untersuchungen beziehen sich auf die Samen der gelben Lupine. Für dieselben wird zunächst nachgewiesen, daß sie nicht bloß einen sondern zwei die Stelle des Stärkemehls vertretende Stoffe enthalten, von welchen der eine in Wasser löslich, der andere darin unlöslich ist. Alsdann wird in dem I. und II. Abschnitte der Arbeit über die umfassenden und erfolgreichen Untersuchungen berichtet, denen die beiden mit den Namen β-Galactan und Paragalactin belegten Körper unterworfen sind, um ihre Eigenschaften, ihr chemisches Verhalten u. s. w. festzustellen. Sie haben sich dabei als Kohlenhydrate erwiesen, welche zu der Galactose in naher Beziehung stehen, und sind eben deswegen wie angegeben benannt.

Der III. und letzte Abschnitt der Arbeit handelt von der Umwandlung des β-Galactans und des Paragalactin während des Keimungsprocesses. Es wird darin gezeigt, daß die Keimung einen Verbrauch sowohl von Galactan als von Paragalactin zur Folge hat und daß dabei Glycosen und dextrinartige Stoffe als intermediäre Producte auftreten.

Nach dem Gesammteindruck, den man von der Arbeit mitnimmt, ist durch dieselbe die gestellte Aufgabe, soweit es sich um deren chemischen Theil handelt, ihrer Lösung so nahe gebracht, daß die Ertheilung eines Preises gerechtfertigt erscheint. Bei dem Preisausschreiben war es aber, wie aus dessen Wortlaut hervorgeht, nicht bloß auf chemische sondern auch auf Untersuchungen anderer Art, welche der Natur der Sache nach nur botanisch-mikroskopische sein konnten, abgesehen. Untersuchungen der Art sind nicht unterblieben, indeß nicht von dem Verfasser der Concurrenzschrift ausgeführt, sondern, wie in derselben angegeben wird, von Herrn Cramer, Professor am Polytechnikum in Zürich,

der diese Untersuchungen „an einem anderen Orte selbst zu publiciren beabsichtigt.“ — Zu bemerken ist außerdem, daß in den Berichten der Deutschen chemischen Gesellschaft bereits vorläufige Mittheilungen über β-Galactan und Paragalactin erschienen sind, welche sich unzweifelhaft auf die in dem I. und II. Abschnitt der Bewerbungsschrift beschriebenen Untersuchungen beziehen.

Nach dem Ausschreiben vom 6. December 1884 beträgt der Preis mindestens fünfzig Dukaten = 500 Rmk.

Die K. Gesellschaft der Wissenschaften hat beschlossen, der Bewerbungsschrift einen Preis in diesem Betrage unter der Voraussetzung zu ertheilen, daß dieselbe, bevor sie zum Druck gelangt, in der von ihrem Verfasser vorbehaltenen Weise vervollständigt wird.“

Der mit dem Motto: Viribus unitis bezeichnete Zettel ergab bei seiner in der öffentlichen Sitzung am 3. December erfolgten Eröffnung als Verfasser

„Professor E. Schulze
und
Dr. E. Steiger
in Zürich“.

2. Die für das Jahr 1888 von der Mathematischen Klasse gestellte Aufgabe ist:

„Daß die von Eisenstein angefangene Untersuchung über den Zusammenhang der quadratischen Zerfällung der Primzahlen mit gewissen Congruenzen für die Fälle, in welchen die von Cauchy und Jacobi angewandten Principien nicht mehr ausreichen (s. Crelle, Journ. f. d Mathematik. Bd. 37. S. 97 ff.), fortgesetzt und, soweit möglich, zu Ende geführt werde.“

3. Für 1889 hat die Historisch-philologische Klasse folgende Aufgabe gestellt:

„In der Erwägung, daß es den einzelnen Forschern zur Zeit unmöglich fällt einen vollständigen Ueberblick über die arabische Literatur zu erwerben, da zur Verbuchung des uns zugänglichen Bestandes derselben eine nicht unerhebliche, geflissentliche Arbeit erfordert wird, in der weiteren Erwägung, daß einen Ueberblick über das zum Studium des Arabischen vorhandene Material zu besitzen für jeden Semitisten nothwendig ist, verlangt die Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

eine von den Anfängen anhebende, bis zu der Zeit, in der die Türken Aegypten eroberten, fortgeführte Uebersicht über Alles, was die Araber und die arabisch schreibenden Angehörigen der islamischen und christlichen Reiche auf dem Gebiete der Literatur

geleistet haben. Der Ausdruck L i t e r a t u r *wird hier im weitesten Sinne gebraucht, dessen er fähig ist.*

Es bleibt den Bewerbern überlassen, welche Ordnung sie ihrem Berichte geben wollen. Derselbe darf chronologisch oder geographisch gegliedert sein, er darf auch sich nach den Mittelpunkten theilen, um welche die litterarische Bewegung kreist.

Verlangt wird:

I. daß die Nationalität der arabisch schreibenden Schriftsteller thunlichst genau angegeben werde: es ist noch lange nicht bekannt genug, daß die bedeutendsten dieser Schriftsteller nicht Araber, ja nicht einmal Semiten gewesen sind:

II. daß eine, soweit die gedruckten Kataloge eine solche ermöglichen, vollständige Verweisung auf die von jedem einzelnen arabischen Werke uns zur Verfügung stehenden Handschriften der Besprechung der Documente beigefügt, und daß überall auf die einschlagenden Artikel der Zeitschriften hingewiesen werde:

III. daß man sich für Zeitangaben ausschließlich der christlichen Zeitrechnung bediene: die Königl. Gesellschaft der Wissenschaften würde jede nach den Jahren der Flucht rechnende Bewerbungsschrift a limine abweisen.

Der Preisträger verpflichtet sich durch die Annahme des Preises, dem Drucke seiner Arbeit ausführliche Register beizugeben, die der Handschrift beizufügen unthunlich sein würde. Ueber die Art, wie diese Register anzulegen sind, wird die Königl. Gesellschaft der Wissenschaften seiner Zeit auf Wunsch gern ihre Ansicht mittheilen."

4. Für 1890 lautet die Aufgabe der P h y s i c a l i s c h e n K l a s s e:

„Es ist allgemein bekannt und anerkannt, daß dichte oder krystallinische Kalke, zumal des Mittel-Devon, allerlei Umwandlungen erlitten haben, sei es durch Veränderung ihrer Structur, sei es durch Stoffaustausch u. s. w.

Die mechanischen und chemischen Vorgänge, welche hierbei mitwirken, sind jedoch durchaus nicht genügend bekannt.

Es wird daher gewünscht, daß diese Umwandlungen mit Hülfe chemischer und mikroskopischer Untersuchungen verfolgt und erklärt werden möchten."

Die für die Bewerbung um die Preise eingesendeten Arbeiten müssen mit einem Spruch versehn vor Ablauf des Septembers des bestimmten Jahres an die Königl. Gesellschaft der Wissenschaften postfrei eingesendet werden und von einem versiegelten Zettel begleitet sein, welcher Namen und Wohnort des Verfassers angiebt und außen mit dem Spruche, der die Arbeit bezeichnet, versehn ist.

Der für jede dieser Aufgaben ausgesetzte Preis beträgt 500 Rmk.

5. Die von der Wedekindschen Preisstiftung für deutsche Geschichte für den am 14. März 1886 begonnenen fünften Verwaltungszeitraum gestellten Aufgaben sind in den Nachrichten 1887 S. 69 ff. bekannt gemacht.

Das Direktorium der Gesellschaft ist am 1. Oktober von Herrn Ehlers auf Herrn Schering übergegangen.

Im Laufe des Jahres verlor die Gesellschaft folgende auswärtige Mitglieder und Korrespondenten:

1) von der Physicalischen Klasse

Bernhard Studer, Prof. der Universität Bern, der am 2. Mai starb, 93 Jahre alt, seit 1860 Korrespondent. und

Alexander Ecker, Prof. an der Universität in Freiburg, der am 20. Mai starb, im 71. Jahre, seit 1863 Korrespondent.

2) von der Mathematischen Klasse:

Gustav Robert Kirchhoff, Professor der Universität Berlin, starb am 17. Oktober, im 63. Jahre, seit 1862 auswärtiges Mitglied.

Georg Rosenhain, Professor der Universität Königsberg, starb am 14. März, im 71. Jahre, seit 1856 Korrespondent.

3) von der Historisch-philologischen Klasse starben

am 12. Januar 1887 Johann Nicolaus Madvig, Prof. der Universität Kopenhagen, im 83. Jahre, seit 1871 auswärtiges Mitglied;

am 11. Juni Ludolf Stephani, Mitglied der Kais. Akad. in St. Petersburg, im 72. Jahre, seit 1869 auswärtiges Mitglied;

am 5. Juli August Friedrich Pott, Prof. der Universität Halle, 85 Jahre alt, seit 1876 auswärtiges Mitglied;

am 27. Januar Wilhelm Henzen, erster Sekretär des Kais. deutschen archäologischen Instituts in Rom, alt 71 Jahre, seit 1887 Korrespondent;

am 18. März endlich Friedrich Ferdinand Carlson in Stockholm, im 76. Jahre, seit 1863 Korrespondent.

Von den ordentlichen Mitgliedern folgte

Carl Klein

zu Ostern d. J. einem Rufe an die Universität Berlin, und am 24. Oktober, dem Tage, an welchem er in sein 84. Lebensjahr eintrat, erklärte unser hoch verehrter Senior, Sr. Excellenz, der Wirkliche Geheime Rath

Wilhelm Ernst Weber

schriftlich seinen Austritt aus unserer Gemeinschaft, „der er 56 Jahre angehört habe, weil er sich weder zu wissenschaftlicher noch geschäftlicher Mitwirkung mehr im Stande fühle“.

Die Gesellschaft glaubte den Willen des Mannes, der so lange Zeit ihre Zierde und ihr Stolz gewesen ist, ehren und Versuchen seinen Vorsatz umzustimmen entsagen zu müssen. Um aber der tiefen Verehrung, die wir für ihn hegen, auch bei dieser Gelegenheit Ausdruck zu geben hat die Gesellschaft in ihrer Sitzung am 12. November einstimmig beschlossen ihn zum Ehrenmitglied zu ernennen und ihn so auch für die Zukunft in Verbindung mit sich zu erhalten.

Im Laufe des Jahres, am 2. Juli, wurde zum ordentlichen Mitglied in der Physicalischen Klasse

Theodor Liebisch

ernannt.

Sodann sind am 12. November ernannt worden

1. zu ordentlichen Mitgliedern
   in der Mathematischen Klasse
      Herr Dr. Felix Klein,
   in der Physicalischen
      Herr Dr. Gottfried Berthold;
2. zu auswärtigen Mitgliedern
   in der Mathematischen Klasse
      Herr Dr. Ludwig Boltzmann in Graz, seit 1882 Korrespondent;
   in der Historisch-philologischen Klasse
      Herr Commendatore Giovanni Battista de Rossi in Rom, seit 1860 Korrespondent,
      Herr Dr. Julius Oppert, Membre de l'Institut zu Paris, seit 1876 Korrespondent;

zu Korrespondenten
   in der Mathematischen Klasse
      Herr Dr. Hermann Vogel in Potsdam,
      Herr Dr. Emil Warburg in Freiburg i/Br.,
      Herr Dr. Ernst Mach in Prag;
   in der Historisch-philologischen Klasse:
      Herr Dr. Eugen Petersen in Rom,
      Herr Dr. Hermann Usener in Bonn,
      Herr Dr. Sophus Bugge in Christiania,
      Herr Dr. Ignazio Guidi in Rom;
   in der Physicalischen Klasse:
      Herr Dr. Walter Flemming in Kiel.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

28. December. № 21. 1887.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 3. December.

Neuer Corrections-Apparat für das Bifilarmagnetometer zur Bestimmung der Veränderung des Stabmagnetismus ohne Benutzung der Declination.

Von

Karl Schering.

(Mit 1 Tafel.)

Gauss hebt in seiner ersten Mittheilung über das Bifilar, in den: „Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins“ 1837, p. 6, hervor, daß die „transversale“ Lage des Magneten die angemessenste sei, weil dann die Berechnung „des Resultats am schärfsten ist, und auch eine kleine Veränderung der magnetischen Declination vermöge der stündlichen oder zufälligen Variationen auf die Stellung keinen merklichen Einfluß hat“.

Man würde also bei transversaler Lage des Magneten aus der Beobachtung des Bifilars allein die Aenderung der Horizontalintensität berechnen können, wenn nicht der Magnetismus des Stabes wechselnden Aenderungen in Folge von Temperaturschwankungen und außerdem fortdauernder Abnahme unterworfen sein würde.

Seine Excellenz Herr Geh.-Rath W. Weber macht in den „Resultaten" etc. 1840 p. 35 darauf aufmerksam, wie unvollkommen es sein würde, wenn man sich bei einem Bifilar, welches in einem magnetischen Observatorium längere Zeit hindurch zur Ermittelung der Variationen der Horizontalintensität dienen soll, mit der Ablesung der Temperatur begnügen wollte, um jene Aenderungen des Stabmagnetismus zu berechnen.

Herr W. Weber zeigt dann[1]), wie man mit Hülfe eines an den Bifilarmagneten anzuhängenden kleinen Magneten, welcher um ungefähr 45° aus dem Meridian abgelenkt ist, die Aenderungen des magnetischen Moments und auch die Aenderung der Horizontalintensität berechnen kann, wenn man die Standänderung der drei Instrumente:

1) eines Bifilars, 2) einer Hülfsnadel, welche am Bifilar hängt, 3) eines Instruments für die Variationen der Declination, gleichzeitig beobachtet.

Diese Weber'sche Hülfsnadel ist seither in Verbindung mit dem Bifilar im Göttinger Observatorium benutzt.

In Folge der Abhängigkeit des Standes der Hülfsnadel von der Richtung des magnetischen Meridians ist jedoch die durch die transversale Stellung des Bifilarmagneten erreichte Unabhängigkeit von den Variationen der Declination wieder verloren gegangen und diese Variationen kommen mit nahezu der Hälfte ihres Betrages in den schließlichen Formeln vor (s. Gl. 17 im § 2). Eine solche Abhängigkeit der Variationsinstrumente von einander beeinträchtigt aber, wie es besonders die Erfahrungen der Polarexpeditionen 1882/3 zeigen, bei magnetischen Stürmen sehr die Genauigkeit der Resultate und kann diese ganz unbrauchbar machen, wenn die Ablesungen an den Instrumenten, welche in der Regel bei Expeditionen von nur einem Beobachter ausgeführt werden müssen, nicht genau gleichzeitig erfolgen.

Mit Rücksicht darauf sei es mir gestattet, im Folgenden einen neuen, aus zwei mit einander verbundenen kleinen Magneten bestehenden Hülfsapparat zu beschreiben, welcher von dem erwähnten Mangel frei ist. Es wird nämlich bei passender Wahl der Richtungen für die Achsen dieser beiden Magnete möglich, aus den Standänderungen des Bifilars und des Hülfsapparats allein, ohne irgend eine Kenntniß der Declinationsvariationen, sowohl

---

1) Siehe auch: W. Weber: Bestimmung der rechtwinkeligen Componenten der erdmagnetischen Kraft in Göttingen von 1834—1853 (1854 Novbr. 27). (Abhandlg. d. Kön. Ges. der Wiss. zu Göttingen. Band VI. 1856.)

die Aenderungen der Horizontalintensität wie auch die Aenderungen des magnetischen Moments des Hauptstabes zu berechnen (s. § 3). Man kann zweitens, wie bei einer andern Gelegenheit des Näheren ausgeführt werden soll, den neuen Apparat so einrichten, daß seine Ruhelage auch von der Bewegung des Bifilarmagneten nicht beeinflußt wird, sondern seine Standänderungen allein den Aenderungen des magnetischen Moments proportional sind.

§ 1.
Bifilar und ein unifilares System zweier Magnete.

Vertical über oder unter der Mitte des Magneten im Bifilar, dessen Moment durch M bezeichnet werde, sei unifilar ein System zweier durch eine verticale Messingstange mit einander fest verbundener kleiner Magnete mit den Momenten m_1 resp. m_2, aufgehängt; die Entfernungen ihrer Mitten von der Mitte des Bifilars seien r_1 resp. r_2, $r_1 < r_2$.

Die vom astronomischen Süden über Westen gezählten Azimuthe der magnetischen Achsen seien:

a für den Magneten mit dem Momente M
a_1 „ „ „ „ „ „ m_1
a_2 „ „ „ „ „ „ m_2,

vom astronomischen Süden aus werde auch die magnetische Declination D gezählt. (Man vergleiche die Figur 1, welche eine Projection der beiden Apparate auf eine Horizontalebene darstellt.)

Auf den Bifilarmagneten wirken dann die folgenden Drehungsmomente:

1) das erdmagnetische: $MT \cdot \sin(D-a)$, wenn T die horizontale Intensität bedeutet;

2) das der Bifilarsuspension: $-Q \cdot \sin(b'-b)$, wenn b das Azimuth der oberen Verbindungslinie der Drähte, b' das der unteren Verbindungslinie bezeichnet und Q den Maximalwerth dieses Drehungsmoments angiebt;

3) das der Torsionskraft: $-Q \cdot \Theta(b'-b)$, worin also Θ das Verhältniß der Torsionskraft zu Q bezeichnet;

4) das von den beiden Magneten des Hülfsapparats ausgeübte Drehungsmoment:

$$-\frac{Mm_1}{r_1^3} \cdot \varepsilon_1 \sin(a_1 - a) - \frac{Mm_2}{r_2^3} \cdot \varepsilon_2 \sin(a_2 - a),$$

in welchem:

$$\varepsilon_1 = f(r_1) \qquad \varepsilon_2 = f(r_2)$$

nach Potenzen von $\frac{1}{r_1}$ resp $\frac{1}{r_2}$ fortschreitende Reihen bedeuten, von denen die drei ersten Glieder:

$$f(r) = 1 - \tfrac{3}{2}\frac{C^2}{r^2} + \tfrac{15}{16}\frac{C_1^4}{r^4},$$

welche für den vorliegenden Zweck ausreichen werden, durch Einführung der Hülfswinkel:

$$\cos\nu = \sqrt{\tfrac{5}{8}} \cdot \frac{C_1^2}{C} \cdot \frac{1}{r}, \quad \cos\nu' = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\, C \cdot \frac{\sin\nu}{r},$$

die Form:

$$f(r) = \sin\nu'^2$$

erhalten.

Der Hülfsapparat steht unter der Einwirkung:

1) des erdmagnetischen Drehungsmoments:

$$-m_1 T \sin(a_1 - D) - m_2 T \sin(a_2 - D);$$

2) der Torsionskraft: $-\zeta(c' - c)$; es bezeichnet c das Azimuth der Normale des am Hülfsapparat befestigten Spiegels, wenn statt der Magnete Messingstäbe in die Schiffchen eingelegt sind; dagegen ist c' das Azimuth jener Spiegelnormale bei der definitiven Aufstellung des Apparats;

3) des von den Bifilarmagneten ausgeübten Drehungsmoments:

$$+\frac{Mm_1}{r_1^3} \cdot \varepsilon_1 \sin(a_1 - a) + \frac{Mm_2}{r_2^3} \cdot \varepsilon_2 \sin(a_2 - a).$$

Das Bifilar und der Hülfsapparat befinden sich daher in der Ruhelage, wenn die Gleichungen:

$$\text{(1)} \quad \left.\begin{array}{l} MT\sin(D - a) - Q\sin(b' - b) - Q \cdot \Theta(b' - b) \\ -\frac{Mm_1}{r_1^3} \cdot \varepsilon_1 \sin(a_1 - a) - \frac{Mm_2}{r_2^3} \cdot \varepsilon_2 \sin(a_2 - a) \end{array}\right\} = 0;$$

$$\text{(2)} \quad \left.\begin{array}{l} -m_1 T\sin(a_1 - D) - m_2 T\sin(a_2 - D) - \zeta(c' - c) \\ +\frac{Mm_1}{r_1^3}\varepsilon_1 \sin(a_1 - a) + \frac{Mm_2}{r_2^3}\varepsilon_2 \sin(a_2 - a) \end{array}\right\} = 0;$$

erfüllt sind.

Eine gleichzeitige Aenderung der Größen: T, D, M, m_1, m_2, r_1, r_2, Q um die Beträge:

$$\delta T,\ \delta D,\ \delta M,\ \delta m_1,\ \delta m_2,\ \delta r_1,\ \delta r_2,\ \delta Q,$$

welche theils von Aenderungen der erdmagnetischen Kraft, theils

von Temperaturänderungen herrühren, möge eine Standänderung des Bifilars um:

$$\delta B = \delta a = \delta b',$$

und des Hülfsapparats um:

$$\delta H = \delta a_1 = \delta a_2 = \delta c'$$

zur Folge haben. Für diese Aenderungen gelten die durch die Variation der Gleichungen (1) und (2) entstehenden Formeln, welche so geschrieben werden können:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{T}\cdot\frac{\delta T}{T}+\mathfrak{M}\cdot\frac{\delta M}{M}+\mathfrak{D}\cdot\delta D+\mathfrak{B}\cdot\delta B+\mathfrak{H}\cdot\delta H \\ +\mathfrak{m}_1\cdot\frac{\delta m_1}{m_1}+\mathfrak{m}_2\cdot\frac{\delta m_2}{m_2}+\delta\tau \end{aligned}\right\} = 0; \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{T}'\cdot\frac{\delta T}{T}+\mathfrak{M}'\cdot\frac{\delta M}{M}+\mathfrak{D}'\cdot\delta D+\mathfrak{B}'\cdot\delta B+\mathfrak{H}'\cdot\delta H \\ +\mathfrak{m}_1'\cdot\frac{\delta m_1}{m_1}+\mathfrak{m}_2'\cdot\frac{\delta m_2}{m_2}+\delta\tau' \end{aligned}\right\} = 0; \tag{4}$$

darin ist durch $\delta\tau$ resp. $\delta\tau'$ das Aggregat derjenigen Glieder bezeichnet, welche von δr_1, δr_2, δQ abhängen. Um die Coëfficienten der Gleichungen (3) und (4) übersichtlich darstellen zu können, setze ich:

$$s_1 = \frac{Mm_1}{Q\cdot r_1^3}\cdot\varepsilon_1; \qquad s_2 = \frac{Mm_2}{Q\cdot r_2^3}\cdot\varepsilon_2;$$

$$s_1' = s_1\frac{Q}{MT} = \frac{m_1}{Tr_1^3}\cdot\varepsilon_1; \quad s_2' = s_2\frac{Q}{MT} = \frac{m_2}{Tr_2^3}\cdot\varepsilon_2; \quad \Theta' = -\frac{\xi}{\mathfrak{T}'};$$

$$\sigma = 1+\Theta\cdot\frac{b'-b}{\sin(b'-b)}; \quad \sigma' = 1+\Theta'(c'-c) \tag{5}$$

$$\sigma_1 = 1-\frac{s_1'\sin(a_1-a)+s_2'\sin(a_2-a)}{\sin(D-a)} = 1-\frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{T}}$$

$$\sigma_2 = 1+\frac{\Theta}{\cos(b'-b)}-\frac{s_1\cos(a_1-a)+s_2\cos(a_2-a)}{\cos(b'-b)}$$

$$= 1+\frac{\Theta}{\cos(b'-b)}+\frac{\mathfrak{B}'}{Q\cdot\cos(b'-b)}.$$

Die Größen s_1, s_2, s_1', s_2' haben sehr kleine Werthe, wenn man m_1 und m_2 hinreichend klein wählt, so daß das vom Hülfsapparat auf das Bifilar ausgeübte Drehungsmoment klein ist im Verhältniß zu demjenigen der Bifilarsuspension. Die Größen σ, σ', σ_1, σ_2 werden daher sehr nahe gleich Eins.

Die in (3) und (4) vorkommenden Coëfficienten bestimmen sich nun durch die folgenden Gleichungen:

$$
(6)\quad
\begin{aligned}
\mathfrak{T} &= \frac{\mathfrak{M}}{\sigma_1} = MT\sin(D-a)\\
\mathfrak{M} &= \mathfrak{T}\cdot\sigma_1 = Q\cdot\sigma\cdot\sin(b'-b)\\
\mathfrak{D} &= \quad MT\cos(D-a)\\
\mathfrak{B} &= -MT\cos(D-a)-Q\cdot\sigma_2\cdot\cos(b'-b)\\
\mathfrak{H} &= -Q\cdot s_1\cos(a_1-a)-Q\cdot s_2\cos(a_2-a)\\
\mathfrak{m}_1 &= -Q\cdot s_1\sin(a_1-a)\\
\mathfrak{m}_2 &= -Q\cdot s_2\sin(a_2-a)\\
\delta\tau+\delta\tau' &= -Q\cdot\sigma\cdot\sin(b'-b)\frac{\delta Q}{Q}
\end{aligned}
$$

$$
(7)\quad
\begin{aligned}
\mathfrak{T}' &= -\frac{\mathfrak{M}'}{\sigma'} = -m_1 T\sin(a_1-D)-m_2 T\sin(a_2-D)\\
\mathfrak{M}' &= -\mathfrak{T}'\cdot\sigma' = -\mathfrak{m}_1-\mathfrak{m}_2 = Q(s_1\sin(a_1-a)+s_2\sin(a_2-a))\\
\mathfrak{D}' &= m_1 T\cos(a_1-D)+m_2 T\cos(a_2-D)\\
\mathfrak{B}' &= \mathfrak{H};\ \mathfrak{H}' = -\mathfrak{H}-\mathfrak{D}'-\mathfrak{z}\\
\mathfrak{m}_1' &= -\mathfrak{m}_1-m_1 T\sin(a_1-D)\\
\mathfrak{m}_2' &= -\mathfrak{m}_2-m_2 T\sin(a_2-D)\\
\delta\tau' &= -3Qs_1\left\{1-\tfrac{1}{3}\frac{\varepsilon_1' r_1}{\varepsilon_1}\right\}\sin(a_1-a)\frac{\delta r_1}{r_1}\\
&\quad -3Qs_2\left\{1-\tfrac{1}{3}\frac{\varepsilon_2' r_2}{\varepsilon_2}\right\}\sin(a_2-a)\frac{\delta r_2}{r_2}.
\end{aligned}
$$

In der Gleichung für $\delta\tau'$ bedeuten ε_1' und ε_2' die Derivirten von ε_1 und ε_2 nach r_1 resp. r_2.

Bei der Auflösung der Gleichungen (3) und (4) nach $\frac{\delta T}{T}$ und $\frac{\delta M}{M}$ erhalten diese Größen den Factor:

$$\mathfrak{T}'\mathfrak{M}-\mathfrak{T}\mathfrak{M}' = (\sigma_1+\sigma')\mathfrak{T}\mathfrak{T}'.$$

Nach Division durch $\mathfrak{T}\cdot\mathfrak{T}'$ ergeben sich dann die ganz allgemein gültigen Formeln:

$$(8)\qquad (\sigma_1+\sigma')\frac{\delta T}{T} = D_1\delta D+B_1\delta B+H_1\delta H+\varkappa_1+\lambda_1$$

$$(9)\qquad (\sigma_1+\sigma')\frac{\delta M}{M} = D_2\delta D+B_2\delta B+H_2\delta H+\varkappa_2+\lambda_2.$$

Hierin sind die Coëfficienten, wenn zur Abkürzung:

$$(10)\qquad \operatorname{tang} p = \frac{m_2}{m_1}\,\frac{\sin(a_2-D)}{\sin(a_1-D)}$$

$$\cos q_1 = -\frac{r_1^3 m_2 \varepsilon_2}{r_2^3 m_1 \varepsilon_1} \cdot \frac{\sin(a_2 - a)}{\sin(a_1 - a)} = -\frac{s_2}{s_1} \cdot \frac{\sin(a_2 - a)}{\sin(a_1 - a)};$$

$$\cos q_2 = \frac{r_1^3}{r_2^3} \frac{m_2}{m_1} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\cos(a_2 - a)}{\cos(a_1 - a)} = \frac{s_2}{s_1} \cdot \frac{\cos(a_2 - a)}{\cos(a_1 - a)};$$

ferner:

$$\mu = \frac{m_1 \sin(a_1 - D) - m_2 \sin(a_2 - D)}{m_1 \sin(a_1 - D) + m_2 \sin(a_2 - D)} = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - p\right);$$

$$\varrho = \frac{s_1 \sin(a_1 - a) - s_2 \sin(a_2 - a)}{s_1 \sin(a_1 - a) + s_2 \sin(a_2 - a)} = \mathrm{cotg}^2 \tfrac{1}{2} q_1;$$

$$\mu_1 = -\frac{m_1 \cos(a_1 - D) + m_2 \cos(a_2 - D)}{m_1 \sin(a_1 - D) + m_2 \sin(a_2 - D)}; \tag{11}$$

$$\varrho_1 = -\frac{s_1 \cos(a_1 - a) + s_2 \cos(a_2 - a)}{s_1 \sin(a_1 - a) + s_2 \sin(a_2 - a)} = -\mathrm{cotg}(a_1 - a) \cdot \left\{\frac{\cos \frac{1}{2} q_2}{\sin \frac{1}{2} q_1}\right\}^2$$

gesetzt wird, durch die Gleichungen:

$$D_1 = -\sigma_1 \mu_1 - \sigma' \mathrm{cotg}(D - a); \qquad D_2 = \mu_1 - \mathrm{cotg}(D - a)$$

$$B_1 = \sigma_1 \sigma' \varrho_1 + \sigma' \mathrm{cotg}(D - a) + \frac{\sigma_1 \sigma_2 \sigma'}{\sigma} \mathrm{cotg}(b' - b);$$

$$B_2 = -\sigma' \varrho_1 + \mathrm{cotg}(D - a) + \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma} \mathrm{cotg}(b' - b) \tag{12}$$

$$H_1 = \sigma_1 \mu_1 - \sigma_1 \Theta' - \sigma' \varrho_1;$$

$$H_2 = -\mu_1 + \sigma' \varrho_1 + \Theta' + \frac{s_1' \cos(a_1 - a) + s_2' \cos(a_2 - a)}{\sin(D - a)}$$

bestimmt.

Die Größen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ enthalten diejenigen Glieder, welche von den Aenderungen der magnetischen Momente des Hülfsapparats abhängen, und durch λ_1 und λ_2 sind die Ausdrücke bezeichnet, welche von den Linerarausdehnungen der Theile der Apparate bei steigender Temperatur herrühren. Setzt man nämlich:

$$\varkappa = \tfrac{1}{2} \Theta'(c' - c) \left\{\frac{\delta m_1}{m_1} + \frac{\delta m_2}{m_2}\right\} - \tfrac{1}{2}(\mu - \sigma' \varrho) \left\{\frac{\delta m_1}{m_1} - \frac{\delta m_2}{m_2}\right\}$$

$$\varkappa' = s_1' \frac{\sin(a_1 - a)}{\sin(D - a)} \cdot \frac{\delta m_1}{m_1} + s_2' \cdot \frac{\sin(a_2 - a)}{\sin(D - a)} \cdot \frac{\delta m_2}{m_2}$$

$$\lambda = -3 \frac{\sigma' s_1 Q}{\mathfrak{M}'} \sin(a_1 - a)\left(1 - \tfrac{1}{3} \frac{\varepsilon_1' r_1}{\varepsilon_1}\right) \frac{\delta r_1}{r_1}$$
$$\quad - 3 \frac{\sigma' s_2 Q}{\mathfrak{M}'} \sin(a_2 - a)\left(1 - \tfrac{1}{3} \frac{\varepsilon_2' r_2}{\varepsilon_2}\right) \frac{\delta r_2}{r_2}$$

$$\lambda' = \sigma_1 \frac{\delta Q}{Q} - 3 s_1' \frac{\sin(a_1 - a)}{\sin(D - a)} \cdot \left(1 - \tfrac{1}{3} \frac{\varepsilon_1' r_1}{\varepsilon_1}\right) \frac{\delta r_1}{r_1}$$
$$\quad - 3 s_2' \frac{\sin(a_2 - a)}{\sin(D - a)} \left(1 - \tfrac{1}{3} \frac{\varepsilon_2' r_2}{\varepsilon_2}\right) \frac{\delta r_2}{r_2},$$

so ist:

$$\text{(13)}\qquad \begin{aligned} \varkappa_1 &= \sigma_1 \varkappa + \sigma' \varkappa' \\ \varkappa_2 &= -\varkappa + \varkappa' \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= \sigma_1 \lambda + \sigma' \lambda' \\ \lambda_2 &= -\lambda + \lambda'. \end{aligned}$$

Unten im § 6 ist ein Zahlenbeispiel vollständig durchgerechnet, hier sei nur auf die Größenordnung der in den Gleichungen (8) und (9) vorkommenden Ausdrücke hingewiesen. Die Variationen δD, δB, δH sind nahe von derselben Größe und betragen (für Göttingen für einen Tag) etwa 0,001 bis 0,002; von derselben Ordnung sind im allgemeinen Falle auch die sechs Glieder $D_1 \cdot \delta D$, $B_1 \cdot \delta B$, $H_1 \cdot \delta H$; $D_2 \cdot \delta D$, $B_2 \cdot \delta B$, $H_2 \cdot \delta H$. Anders verhält es sich mit den Gliedern $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$. Nach den bisherigen Erfahrungen liegen die Temperaturcoëfficienten der Magnete von mäßigen Dimensionen, also auch die Größen $\frac{\delta m_1}{m_1}$ und $\frac{\delta m_2}{m_2}$ zwischen 0,0003 und 0,001. Wenn nun die beiden kleinen Magnete des Hülfsapparats gleiche Dimensionen haben, aus Stücken eines und desselben Stahlcylinders bestehen und gleicher Behandlung bei und nach der Magnetisirung unterworfen sind, so wird, wie durch vorläufige Beobachtungen festzustellen ist, $\frac{\delta m_1}{m_1} - \frac{\delta m_2}{m_2}$ eine kleine Größe sein im Verhältniß zu $\frac{\delta m_1}{m_1}$ und $\frac{\delta m_2}{m_2}$ selbst, also etwa ein Hundertstel oder ein Tausendstel einer Größe von der Ordnung 0,0003 bis 0,001. Da außerdem im Producte $\Theta' \cdot (c' - c)$ der Factor $c' - c$ beliebig klein gemacht werden kann, ferner Θ' und besonders s_1' und s_2' sehr kleine Größen sind, so erkennt man, daß alle Glieder, aus denen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ besteht, nahezu Größen von der Ordnung $(\delta B)^2$ oder $(\delta H)^2$ sind und daher für die practische Anwendung nur kleine oder kaum in Betracht kommende Correctionen ergeben.

Dasselbe gilt von den Größen λ_1 und λ_2, wie unmittelbar ersichtlich, wenn man berücksichtigt, daß die Ausdehnungscoëfficienten der Metalle, also, bei einer Temperaturerhöhung von einem Grad, auch die Größen $\frac{\delta Q}{Q}$, $\frac{\delta r_1}{r_1}$, $\frac{\delta r_2}{r_2}$ zwischen 0,00001 und 0,00002 liegen.

§ 2.

Erster Specialfall: Weber's Hülfsnadel.

Aus den allgemeinen Gleichungen (8) und (9) des § 1 mögen zunächst die Formeln für die Weber'sche Hülfsnadel abgeleitet werden, das heißt für einen einzigen am Bifilar in der Entfernung r hängenden Magneten vom Momente m.

Wir haben zu dem Zweck nur zu setzen:

$$m_1 = m_2 = \tfrac{1}{2} m; \quad r_1 = r_2 = r; \quad a_1 = a_2,$$

dann wird:

$$s_1 = s_2 = \tfrac{1}{2} s = \tfrac{1}{2} \frac{M \cdot m}{Q \cdot r^3} \cdot \varepsilon; \; s_1' = s_2' = \tfrac{1}{2} s' = \tfrac{1}{2} \frac{sQ}{MT}; \; \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$$

$$\sigma \doteq 1 + \Theta \cdot \frac{b' - b}{\sin(b' - b)}; \qquad \sigma' = 1 + \frac{\zeta}{mT} \frac{c' - c}{\sin(a_1 - D)}$$

$$\sigma_1 = 1 - s' \cdot \frac{\sin(a_1 - a)}{\sin(D - a)}; \qquad \sigma_2 = 1 + \frac{\Theta}{\cos(b' - b)} - s \cdot \frac{\cos(a_1 - a)}{\cos(b' - b)}$$

und daher (s. die Gleichungen (11))

$$\mu = 0, \; \varrho = 0, \; \mu_1 = -\operatorname{cotg}(a_1 - D); \; \varrho_1 = -\operatorname{cotg}(a_1 - a).$$

Die Coëfficienten in den Formeln:

$$(\sigma_1 + \sigma') \frac{\delta T}{T} = D_1 \cdot \delta D + B_1 \cdot \delta B + H_1 \cdot \delta H + \varkappa_1 + \lambda_1 \tag{8}$$

$$(\sigma_1 + \sigma') \frac{\delta M}{M} = D_2 \cdot \delta D + B_2 \cdot \delta B + H_2 \cdot \delta H + \varkappa_2 + \lambda_2 \tag{9}$$

lauten daher jetzt:

$$\begin{aligned}
D_1 &= \sigma_1 \operatorname{cotg}(a_1 - D) - \sigma' \operatorname{cotg}(D - a) \\
B_1 &= -\sigma_1 \sigma' \operatorname{cotg}(a_1 - a) + \sigma' \operatorname{cotg}(D - a) + \frac{\sigma_1 \sigma_2 \sigma'}{\sigma} \operatorname{cotg}(b' - b) \\
H_1 &= -\sigma_1 \operatorname{cotg}(a_1 - D) - \sigma_1 \Theta' + \sigma' \operatorname{cotg}(a_1 - a) \\
D_2 &= -\operatorname{cotg}(a_1 - D) - \operatorname{cotg}(D - a) \\
B_2 &= \sigma' \operatorname{cotg}(a_1 - a) + \operatorname{cotg}(D - a) + \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma} \operatorname{cotg}(b' - b) \\
H_2 &= \operatorname{cotg}(a_1 - D) - \sigma' \operatorname{cotg}(a_1 - a) + \Theta' + s' \cdot \frac{\cos(a_1 - a)}{\sin(D - a)},
\end{aligned} \tag{14}$$

ferner ist:

$$\varkappa = \Theta' \cdot (c' - c) \frac{\delta m}{m}; \qquad \varkappa' = s' \cdot \frac{\sin(a_1 - a)}{\sin(D - a)} \cdot \frac{\delta m}{m}$$

$$\lambda = -3\sigma' \cdot \left(1 - \tfrac{1}{3} \frac{\varepsilon' r}{\varepsilon}\right) \frac{\delta r}{r}; \; \lambda' = \sigma_1 \frac{dQ}{Q} - 3 s' \cdot \frac{\sin(a_1 - a)}{\sin(D - a)} \cdot \left(1 - \tfrac{1}{3} \frac{\varepsilon' r}{\varepsilon}\right) \frac{\delta r}{r}$$

und wie früher:

$$\varkappa_1 = \sigma_1 \varkappa + \sigma' \varkappa'; \; \varkappa_2 = -\varkappa + \varkappa'; \; \lambda_1 = \sigma_1 \lambda + \sigma' \lambda'; \; \lambda_2 = -\lambda + \lambda'.$$

Wenn wir jetzt die Gauß'sche Bedingung der Transversalstellung des Bifilars, das heißt die Gleichung:

$$D - a = \frac{\pi}{2}$$

erfüllen, aus der dann: $\cot g(a_1 - a) = -\tan g(a_1 - D)$ folgt, so bewirkt dies nicht ein Nullwerden eines Gliedes der Gleichungen (8) und (9).

Vernachlässigen wir die Größen s und s', setzen ferner, nach dem Vorgange von Hrn. W. Weber, die Größen:

$$\Theta = 0; \quad \Theta' = 0; \quad \varepsilon = 1; \quad \varepsilon' = 0,$$

so wird

$$\sigma = \sigma' = \sigma_1 = \sigma_2 = 1; \quad \varkappa = \varkappa' = 0$$

und die Gleichungen (8) und (9) reduciren sich auf:

$$(15) \quad \begin{aligned} 2\frac{\delta T}{T} = {} & \cot g(a_1 - D) \cdot \delta D + [\operatorname{tg}(a_1 - D) + \cot g(b' - b)]\delta B \\ & - [\cot g(a_1 - D) + \operatorname{tg}(a_1 - D)]\,\delta H + \frac{\delta Q}{Q} - 3\frac{\delta r}{r}; \end{aligned}$$

$$(16) \quad \begin{aligned} 2\frac{\delta M}{M} = {} & -\cot g(a_1 - D)\,\delta D + [-\operatorname{tg}(a_1 - D) + \cot g(b' - b)]\delta B \\ & + [\cot g(a_1 - D) + \operatorname{tg}(a_1 - D)]\,\delta H + \frac{\delta Q}{Q} + 3\frac{\delta r}{r} \end{aligned}$$

welche mit den von Hrn. W. Weber in den Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Bd. VI, 1856; Mathematische Classe pag. 36 unter Nr. (5) und (6) angegebenen identisch werden, wenn man die dort benutzten Bezeichnungen:

$$\delta D = \alpha, \; \delta H = \beta, \; \delta B = \gamma, \; \frac{\delta T}{T} = \delta, \; \frac{\delta M}{M} = \varepsilon, \; \frac{\delta Q}{Q} = \zeta, \; \frac{\delta r}{r} = \varrho$$

$$a_1 - D = \varphi; \quad b' - b = -\frac{\pi}{2} - \psi$$

einführt.

Der Factor von δB in der Gleichung für $\frac{\delta M}{M}$ kann noch fortgeschafft werden, dadurch, daß man die Bedingung:

$$-\operatorname{tg}(a_1 - D) + \cot g(b' - b) = 0$$

erfüllt. Geschieht dies durch die Weber'schen Normalwerthe:

$$a_1 - D = \frac{\pi}{4}; \qquad b' - b = \frac{\pi}{4},$$

so erhält man schließlich:

$$(17) \quad \begin{aligned} \frac{\delta T}{T} &= \tfrac{1}{2}\delta D + \delta B - \delta H + \tfrac{1}{2}\frac{\delta Q}{Q} - \tfrac{3}{2}\frac{\delta r}{r} \\ \frac{\delta M}{M} &= -\tfrac{1}{2}\delta D \qquad + \delta H + \tfrac{1}{2}\frac{\delta Q}{Q} + \tfrac{3}{2}\frac{\delta r}{r}. \end{aligned}$$

§ 3.

Zweiter Specialfall: Neuer Corrections-Apparat.

Erste Aufstellungsweise.

Kehren wir wieder zu den allgemeinen Gleichungen (8) und (9) des § 1 zurück. Wir fügen zu der Gauss'schen Bedingung

$$D - a = \frac{\pi}{2},$$

welche das magnetische Azimut des Bifilars bestimmt, noch die folgende: $\mu_1 = 0$ hinzu, aus der sich ergiebt

$$m_1 \cos(a_1 - D) + m_2 \cos(a_2 - D) = 0. \tag{18}$$

Dann wird:

$$D_1 = 0 \quad \text{und} \quad D_2 = 0$$

und die Gleichungen (8) und (9) reduciren sich auf:

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_1 + \sigma') \frac{\delta T}{T} &= B_1 \cdot \delta B + H_1 \, \delta H + \varkappa_1 + \lambda_1 \\ (\sigma_1 + \sigma') \frac{\delta M}{M} &= B_2 \cdot \delta B + H_2 \, \delta H + \varkappa_2 + \lambda_2 \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

in denen:

$$\left.\begin{aligned} &B_1 = \sigma_1 \sigma' \varrho_1 + \frac{\sigma_1 \sigma_2 \sigma'}{\sigma} \operatorname{cotg}(b' - b); \; B_2 = -\sigma' \varrho_1 + \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma} \operatorname{cotg}(b' - b) \\ &H_1 = -\sigma_1 \Theta' - \sigma' \varrho_1 \qquad H_2 = +\sigma' \varrho_1 + \Theta' + s_1' \cos(a_1 - a) + s_2' \cos(a_2 - a) \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

ist; $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, λ_1, λ_2 bleiben im wesentlichen ungeändert (s. Gl. (13)).

Die Variationen der Declination sind also ganz herausgefallen.

Wenn wir auch hier, wie im § 2, die Werthe $\Theta, \Theta', s_1, s_2, s_1', s_2'$ vernachlässigen, also:

$$\sigma = \sigma' = \sigma_1 = \sigma_2 = 1$$

setzen, reduciren sich die Gleichungen (19) auf:

$$2 \frac{\delta T}{T} = [\varrho_1 + \operatorname{cotg}(b' - b)] \, \delta B - \varrho_1 \cdot \delta H + \varkappa_1 + \lambda_1 \tag{21}$$

$$2 \frac{\delta M}{M} = [-\varrho_1 + \operatorname{cotg}(b' - b)] \, \delta B + \varrho_1 \cdot \delta H - \varkappa_1 + \lambda_2 \tag{22}$$

in denen, mit Rücksicht auf die Gleichungen:

$$a_1 - a = a_1 + \frac{\pi}{2} - D; \qquad a_2 - a = a_2 + \frac{\pi}{2} - D$$

die Größe ϱ_1 mit Hülfe der Formeln:

$$\operatorname{tg} p = \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{\sin(a_2 - D)}{\sin(a_1 - D)}; \; \cos q_1 = \frac{r_1^2}{r_2^2} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}; \; \cos q_2 = \cos q_1 \cdot \operatorname{tg} p$$

(23)

$$\varrho_1 = \operatorname{tg}(a_1 - D) \cdot \left\{ \frac{\cos \frac{1}{2} q_2}{\sin \frac{1}{2} q_1} \right\}^2$$

berechnet werden kann. ϱ_1 hängt also außer von den Winkeln $a_1 - D$ und $a_2 - D$ nur von den Verhältnissen $\frac{m_1}{m_2}$, $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$, $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$ ab.

Ferner ist:

(24)

$$\varkappa_1 = -\tfrac{1}{2}(\mu - \varrho)\left(\frac{\delta m_1}{m_1} - \frac{\delta m_2}{m_2}\right); \; \lambda' = \frac{\delta Q}{Q}; \; \lambda_1 = \lambda + \lambda'; \; \lambda_2 = -\lambda + \lambda'$$

$$\lambda = -\tfrac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2} q_1} \left(1 - \tfrac{1}{2} \frac{\varepsilon_1' r_1}{\varepsilon_1}\right) \frac{\delta r_1}{r_1} + \tfrac{1}{2} \frac{\cos q_1}{\sin^2 \frac{1}{2} q_1} \left(1 - \tfrac{1}{2} \frac{\varepsilon_2' r_2}{\varepsilon_2}\right) \frac{\delta r_2}{r_2}.$$

Mit gleichem Rechte übrigens, wie die mit Θ multiplicirten Größen, kann man auch diese Größen $\varkappa_1$, λ_1, λ_2 aus den Formeln ganz fortlassen.

Durch die Gleichung (18) wird eine Relation zwischen den magnetischen Azimuthen der Magnete des Hülfsapparats festgesetzt. Es bietet für die Aufstellung des Corrections-Apparates eine bedeutende Erleichterung, wenn die Magnete winkelrecht zu einander stehen, also die Gleichung:

(25)

$$a_2 - D = a_1 - D + \frac{\pi}{2}$$

erfüllen, dann geht (18) über in

(26)

$$\operatorname{tang}(a_1 - D) = \frac{m_1}{m_2}$$

und es wird daher $a_1 - D$ sehr nahe gleich 45°, weil, wie schon in § 1 erwähnt wurde, m_1 und m_2 einander möglich nahe gleich zu wählen sind.

Die Bestimmung von δT und δM mit Hülfe dieses ganzen Instrumentes, also nach den Formeln (19), erfordert eine nahe gleichzeitige Ablesung des Bifilars und des Hülfsapparates.

Bei dem Göttinger Bifilar ist dies dadurch zu ermöglichen, daß man den Hülfsapparat über dem Bifilar aufhängt und den Spiegel des ersteren unter dem unteren Magneten in solcher Höhe anbringt, daß er sich nahe über dem Spiegel des Bifilars befindet, und also die beiden Spiegelbilder der Scala im Gesichtsfelde des Fernrohrs gleichzeitig, unmittelbar über einander, zu sehen sind.

§ 4.

Construction des Hülfsapparats.

Erste Aufstellungsweise.

Für den Hülfsapparat sind zwei Magnete von gleichen Dimensionen zu verwenden, deren Momente m_1 und m_2 sehr nahe gleich sind. Die Schiffchen der beiden Magnete sind durch einen langen dünnen, etwa 1^{mm} bis 2^{mm} im Durchmesser haltenden Messingcylinder mit einander zu verbinden, der, nach unten verlängert, drei Spiegel in gleicher Höhe trägt, welche, ehe sie am Apparat befestigt werden, mit Hülfe eines Theodoliten so einzustellen sind, daß die Normale des mittleren (Nr. 2) einen Winkel von 45° mit den beiden seitlichen (Nr. 1) und (Nr. 3) bilden. Der Apparat erhält so eine ziemliche Ausdehnung in der Richtung von oben nach unten und es würde leicht möglich sein, daß die verticale Drehungsachse des Apparats einen Winkel mit der Achse des verbindenden Messingcylinders bildete und daher die Mitte des unteren Magneten bei der Drehung auch gleichzeitig einen Kreisbogen von nicht ganz unbeträchtlichem Radius beschreiben würde. Um dies nahezu vollständig zu vermeiden, wird es zweckmäßig sein, in dem Messingcylinder unter jedem der beiden Magnete eine Art cardanischer Aufhängung vermittelst vier kurzer Drähte einzuschalten, so wie sie in natürlicher Größe in Figur 2, in drei Theile I, II, III zerlegt und auf eine zur Achse des Messingcylinders senkrechte Ebene projicirt, gezeichnet ist.

Dieselbe Vorrichtung habe ich bei dem Deflectoren-Bifilar mit Vortheil angewandt.

Der obere Theil des Messingcylinders ist bei (g) mit dem Messingstabe (I) verbunden; an diesem sind bei d_1, d_2 die oberen Enden zweier etwa 2 bis 3^{mm} langer Messingdrähte befestigt, deren untere Enden in den Punkten d_1', d_2' mit dem einen Arme des Messingkreuzes (II) verbunden sind. Der andere dazu senkrechte Arm dieses Kreuzes trägt vermittelst zweier anderer bei d_3, d_4, d_3', d_4' festgeklemmter, ebenfalls 2 bis 3^{mm} langer Drähte den Messingstab (III) und mit ihm den unteren Theil des Apparats, nämlich den unteren Magneten und die drei Spiegel. Mit diesem unteren Theil ist die Platte p, p, fest verschraubt; diese kann um g gegen den Messingstab (III) vermittelst der Druck- und Zug-Schrauben Σ_1 und Σ_2 um kleine Winkel gedreht und in jeder Lage festgehalten werden. Diese beiden Schrauben sollen dazu dienen, die Achsen der beiden Magnete genau senkrecht auf einander zu stellen.

In der schematischen Figur 3 sind, von der Seite gesehen, in $\frac{1}{10}$ der natürlichen Größe die beiden Instrumente, Bifilar und Hülfsapparat angedeutet; es sind dabei die Dimensionen der Göttinger Instrumente, wie sie im § 6 angegeben sind, zu Grunde gelegt: M, M ist der, an den beiden Drähten D_1, D_2 aufgehängte Magnet; der untere Abstand der Drähte ist jetzt 44^{mm}, die Länge derselben 4782^{mm}. m_1 ist der untere, m_2 der obere Magnet des Hülfsapparats, mit einander durch den dünnen Messingcylinder g, g, verbunden, in welchem bei C, C die eben beschriebenen cardanischen Aufhängungen je vermittelst vier kurzer Drähte angebracht sind, d ist der dünne Draht, an welchem der Hülfsapparat hängt. Die beiden Spiegel, S_1 am Bifilar, und S_2 am Hülfsapparat befinden sich so nahe übereinander, daß ihre Bewegungen mit demselben Fernrohr in ein und derselben Lage desselben beobachtet werden können. Die beiden seitlich von S_2 am Hülfsapparat befindlichen Spiegel sind in der Zeichnung fortgelassen, ebenso die auf geeigneten Unterlagen ruhenden Kupferdämpfer der drei Magnete, und der geeignet construirte große Luftkasten, welcher das Bifilarmagnetometer, den Hülfsapparat und die Drähte in ihrer ganzen Ausdehnung, bis zum oberen Ende, vor Luftströmungen schützt.

§ 5.

Anordnung der Beobachtungen bei der ersten Aufstellungsweise des Apparats.

Zunächst sind die folgenden Einstellungen am Hülfsapparat auszuführen, bei denen er der Einwirkung des Bifilars entzogen sein muß:

1) Im oberen Schiffchen liegt Magnet (m_2); im unteren ein Torsionsstab; Scalenablesung sei n' im Spiegel Nro. 1.

2) In beiden Schiffchen liegen Torsionsstäbe: Ablesung n_0 in demselben Spiegel.

3) Am Torsionskreise ist dann zu drehen, bis die Ablesung n' gleich der Ablesung n_0 wird; die definitive Einstellung sei n_1.

4) Im oberen Schiffchen liegt ein Torsionsstab, im unteren der Magnet (m_1); der Torsionskreis ist um 90° zu drehen, so daß, wenn der Magnet (m_1) in den Meridian sich einstellt, der Draht nicht tordirt ist. Im Fernrohr ist dann ein Bild der Scala sichtbar, das durch Reflexion von Spiegel (3) entsteht, dessen Normale senkrecht auf derjenigen des Spiegels Nr. 1 steht.

5) An den Schrauben Σ_1, Σ_2, (s. § 4 und Fig. 2. III) muß jetzt gedreht werden, bis im Spiegel Nr. 3 die Scalenablesung $n_1 + \delta D$ ist, wenn δD die inzwischen eingetretene Declinationsänderung

bedeutet. Die Achsen der Magnete stehen dann genau aufeinander senkrecht; es ist daher:

$$a_2 - D = a_1 - D + \frac{\pi}{2}. \tag{25}$$

6) Hierauf ist nach Entfernung der Magnete des Hülfsapparats die Constantenbestimmung des Bifilars und die Transversalstellung desselben nach der Gauss'schen Methode (s. Resultate des magnetischen Vereins 1840 p. 1—26; Gauss' Werke Bd. V p. 404—426) mit Berücksichtigung der von Hrn. Wild[1]) für den Einfluß des Inductionscoëfficienten gegebenen Formeln auszuführen.

7) Nach definitiver Aufstellung des Bifilars, also nach Erfüllung der Bedingung

$$D - a = \frac{\pi}{2}$$

sind wieder die Magnete in den Hülfsapparat einzulegen und durch allmähliches Aufwinden des oberen Endes des Suspensionsdrahtes die Entfernung vom Bifilar so zu reguliren, daß die Gleichung (18) des § 3:

$$\mu_1 = 0 \quad \text{odor} \quad m_1 \cos(a_1 - D) + m_2 \cos(a_2 - D) = 0$$

welche, mit Berücksichtigung von Gl. (25) in:

$$\operatorname{tang}(a_1 - D) = \frac{m_1}{m_2} \tag{26}$$

übergeht, erfüllt ist. Da der Voraussetzung nach m_1 und m_2 nahe gleich sind, ist $a_1 - D$ von 45° nur um eine kleine Größe verschieden und es ist daher möglich, durch Beobachtung der im Spiegel Nr. 2, dessen Normale einen Winkel von 45° mit derjenigen von Nr. 1 und Nr. 3 bildet, reflectirten Scala, mit beliebiger Genauigkeit die Gl. (26) zu erfüllen. Gleichzeitig ist der Torsionskreis des Hülfsapparats um den Winkel $a_1 - D$ so zu drehen, daß bei der definitiven Aufstellung der Draht nicht tordirt, also $c' - c = 0$ ist.

8) Bemerkt man jetzt an der Scala des Bifilars, daß dieses Instrument um einen kleinen Winkel: $-\gamma$ abgelenkt ist, so kann man hieraus direct ein Urtheil über die Größenordnung von s_1 gewinnen, denn es besteht die Beziehung:

$$\gamma \cdot \sigma_2 \cos(b' - b) = \left(s_1 - s_2 \frac{m_1}{m_2}\right) \cos(a_1 - D) \tag{27}$$

1) Wild im: Bulletin de l'Acad. Imp. d. Sciences de St. Pétersbourg. Tome XXVI. 1880 p. 69.

Die beiden Instrumente, Bifilar und Hülfsapparat sind jetzt für die definitiven Variationsbeobachtungen fertig aufgestellt.

§ 6.

Beispiel: Gauss' Bifilar mit dem neuen Corrections-Apparat in der ersten Aufstellungsweise.

In dem Gauss'schen Bifilarmagnetometer im Observatorium in Göttingen liegt ein 11870 g schwerer Magnetstab von: $1220{,}5^{mm}$ Länge, 76^{mm} Breite und $15{,}1^{mm}$ Dicke. Beobachtungen im Juni 1882 ergaben für diesen Magneten:

$$\log \frac{M}{T} = 9{,}37494 \ (\mathrm{mm})^2$$

(Gauss giebt in den „Resultaten" etc. 1840 pag. 32 für denselben Magneten: $\frac{M}{T} = 2{,}63318 \ (\mathrm{m})^2$, woraus folgen würde $\log \frac{M}{T} = 9{,}42048 \ (\mathrm{mm})^2$. Setzt man ferner, für 1840, $T = 1{,}782$; für 1882, $T = 1{,}8647$ so ergiebt sich, daß das Moment dieses Magneten von 1840 bis 1882 um 5,78 Procent abgenommen hat).

Zur Berechnung der Constanten C, C_1 dieses Magneten (s. § 1 unter Nr. 4) liegen noch keine definitiven Beobachtungen vor, doch werden die Werthe:

$$C = 556^{mm} \qquad C_1 = 512^{mm}$$

für die folgenden, zum Zweck einer ersten Orientirung ausgeführten Rechnungen genügen. Die angegebenen Werthe sind diejenigen, welche, gemäß den Regeln der Methode der kleinsten Quadrate einerseits am besten der Beobachtung genügen, nach der für $r = 1115^{mm}$ die Ablenkung eines kleinen Magneten nahe $45°$ beträgt, welche andererseits den von Herrn F. Kohlrausch (Sitzungsberichte der math.-phys. Classe der k. Bayer. Academie d. Wiss. 1887. Heft 1, pag. 26) für mehrere Magnete berechneten Werthen sich anschließen.

Für die definitive Benutzung des Bifilars und des Hülfsapparats zu Variationsbeobachtungen ist übrigens eine genaue Kenntniß der Werthe von C und C_1 nicht erforderlich, da die Größen ε_1 und ε_2 nur in den kaum in Betracht kommenden Werthen s_1 und s_2, λ und λ' auftreten (s. Gl. 5 und 13).

Nehmen wir weiter an, daß die beiden kleinen Magnete gleiches Moment besitzen und ihre magnetischen Achsen senkrecht auf einander stehen, so erhalten wir, durch Auflösung der Gleichung:

$$\frac{2T}{M} = \varphi(r_1) - \varphi(r_2); \;\; \varphi(r) = \frac{1}{r^3}\left\{1 - \frac{3}{2}\frac{C^2}{r^2} + \frac{15}{16}\frac{C_1^4}{r^4}\right\} \qquad (28)$$

in welche unter den angegebenen Voraussetzungen die Gl. (2) übergeht, für diejenigen Entfernungen r_1 und r_2, bei welchen der nähere Magnet um 45° abgelenkt ist, die folgenden Werthe in Millimeter:

$$\begin{array}{rcllll} r_1 & = & 650 & 700 & 750 & 801{,}5 \\ r_2 & = & 1970 & 2113 & 2560 & \infty \\ r_2 - r_1 & = & 1320 & 1413 & 1810 & \infty \end{array}$$

Es möge demgemäß der Hülfsapparat so construirt werden, daß der Abstand der beiden Magnete von einander 1413^{mm} beträgt. Diese Magnete seien identisch mit denjenigen, welche ich augenblicklich im Deflectoren-Bifilar benutze und deren Momente:

$$m_1 = 1945600 \quad \text{und} \quad m_2 = 1933300$$

sind. Dann ist die Gleichung (Nr. 26)

$$\operatorname{tang}(a_1 - D) = \frac{m_1}{m_2}$$

durch den Werth: $a_1 - D = 45° \, 10' \, 53''$ erfüllt. Die Rechnung ergiebt, daß diese Ablenkung bei einer Entfernung: $r_1 = 699{,}9^{mm}$ des näheren Magneten vom Bifilar erhalten wird; dann ist also: $r_2 = 699{,}9 + 1412 = 2112{,}9^{mm}$ und weiter folgt: (s. Gl. (11) im § 1; und (23) im § 3)

$$\begin{array}{llll} \mu = 0{,}0063 & & \varrho = 1{,}2259 \\ \mu_1 = 0 & & \varrho_1 = 1{,}2324. \end{array}$$

Aus den Beobachtungen im Sommer 1882 folgt:

$$b' - b = 50° \, 20'{,}6$$

Wenn wir diesen letzteren Werth beibehalten, so ergiebt sich:

$$\frac{MT}{Q} = 0{,}7699 \quad \text{und} \quad \frac{M}{Q} = 0{,}4130$$

und für die Größen s und σ (s. Gl. (5) im § 1) erhalten wir, auf vier Decimalstellen abgerundet, die Zahlen:

$$\begin{array}{ll} s_1 = 0{,}0008 & s_2 = 0{,}0001 \\ s_1' = 0{,}0010 & s_2' = 0{,}0001 \\ \sigma = 1 + \Theta \cdot 1{,}1413 & \sigma' = 1 \\ \sigma_1 = 1 - 0{,}0006 & \sigma_2 = 1 + \Theta \cdot 1{,}5669 + 0{,}0009. \end{array}$$

Man erkennt, daß die vier Größen s in der That im Ver-

hältniß zu den Coëfficienten:

$$\varrho_1 = 1.2324 \qquad \operatorname{cotg}(b'-b) = 0{,}8289$$

der Gleichungen (Nr. 21 im § 3) unberücksichtigt gelassen werden können, und daß nur ein großer Werth des Torsionscoëfficienten Θ Veranlassung geben könnte, die Größen σ und σ_2 nicht der Einheit gleich zu setzen.

Die weitere Rechnung ergiebt (s. Gl. 13 im § 1)

$$\varkappa = 0{,}6096 \cdot \left\{\frac{\delta m_1}{m_1} - \frac{\delta m_2}{m_2}\right\}$$

$$\varkappa' = 0{,}0007 \cdot \frac{\delta m_1}{m_1} - 0{,}0001 \cdot \frac{\delta m_2}{m_2}$$

$$\lambda = -0{,}5078 \cdot \frac{\delta r_1}{r_1} + 0{,}3144 \cdot \frac{\delta r_2}{r_2}$$

$$\lambda' = -0{,}0003 \cdot \frac{\delta r_1}{r_1} + 0{,}0002 \cdot \frac{\delta r_2}{r_2} + 0{,}9994 \frac{\delta Q}{Q}$$

und ferner:

$$\varkappa_1 = -\varkappa_2 = 0{,}6095 \cdot \left\{\frac{\delta m_1}{m_1} - \frac{\delta m_2}{m_2}\right\}$$

$$(29) \quad \lambda_1 = -0{,}5079 \cdot \frac{\delta r_1}{r_1} + 0{,}3144 \cdot \frac{\delta r_2}{r_2} + 0{,}9994 \cdot \frac{\delta Q}{Q}$$

$$\lambda_2 = +0{,}5075 \cdot \frac{\delta r_2}{r_2} - 0{,}3142 \; \frac{\delta r_2}{r_2} + 0{,}9994 \cdot \frac{\delta Q}{Q}$$

Es möge ferner der lineare Ausdehnungscoëfficient:
der Drähte des Bifilars mit ε
des unteren Verbindungsstücks dieser Drähte mit ε_1
" oberen " " " " " " ε_2
des Drahtes des Hülfsapparats mit ε'
des Verbindungsstücks der beiden Magnete dieses Apparats mit ε'_1
bezeichnet werden, dann ist:

$$\frac{\delta Q}{Q} = -\varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2; \quad \frac{\delta r_1}{r_1} = (\varepsilon - \varepsilon')\frac{h}{r_1} + (\varepsilon' - \varepsilon'_1)\frac{r_2}{r_1} + \varepsilon'_1; \quad \frac{\delta r_2}{r_2} = (\varepsilon - \varepsilon')\frac{h}{r_2} + \varepsilon'$$

wenn h die Länge der Bifilardrähte bezeichnet, und wenn angenommen wird, daß die oberen Befestigungspunkte der Drähte beider Apparate in gleicher Höhe liegen. Für $h = 4782^{\text{mm}}$, dem für das Göttinger Bifilar bisher gültigen Werthe, erhält man dann für eine Temperaturerhöhung von 1°:

$$\lambda_1 = -3{,}758 \cdot \varepsilon + 0{,}999\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + 1{,}540 \cdot \varepsilon' + 1{,}024 \cdot \varepsilon'_1$$

$$\lambda_2 = 1{,}757 \cdot \varepsilon + 0{,}999\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - 1{,}539 \cdot \varepsilon' - 1{,}023 \cdot \varepsilon'_1$$

oder, wenn:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon' = \varepsilon_1' \text{ ist},$$

$$\lambda_1 = -3{,}758\,\varepsilon + 4{,}564\,\varepsilon_1; \quad \lambda_2 = 1{,}757 \cdot \varepsilon - 0{,}564 \cdot \varepsilon_1.$$

Es ist daher möglich, wenn auch schwer ausführbar, durch passende Wahl des Materials der Drähte λ_1 zu Null zu machen.

Wird für alle Drähte das gleiche Material, etwa Messing: $\varepsilon = 0{,}000019$ genommen, so wird für eine Temperaturerhöhung von $(t - t_0)$ Centesimalgrade:

$$\lambda_1 = 0{,}000015 \cdot (t - t_0) \qquad \lambda_2 = 0{,}000023 \cdot (t - t_0).$$

Auch diese Größen geben daher nur zu sehr geringen Correctionen Veranlassung.

Mit Berücksichtigung der oben berechneten Werthe erhalten die Gleichungen (8) und (9), beziehungsweise (21) schließlich die Form:

$$\begin{aligned} \frac{\delta T}{T} &= 1{,}0307 \cdot \delta B - 0{,}6162 \cdot \delta H + \tfrac{1}{2}\varkappa_1 + \tfrac{1}{2}\lambda_1 \\ \frac{\delta M}{M} &= -0{,}2017 \cdot \delta B + 0{,}6162 \cdot \delta H - \tfrac{1}{2}\varkappa_1 + \tfrac{1}{2}\lambda_2 \end{aligned} \qquad (30)$$

oder auch:

$$\frac{\delta T}{T} = +0{,}8290 \cdot \delta B - \frac{\delta M}{M} + \tfrac{1}{2}\lambda_1 + \tfrac{1}{2}\lambda_2.$$

§ 7.

Schlußbemerkung.

Anderweitige Anwendung des neuen Apparates.

Der in der vorstehenden Arbeit beschriebene Hülfsapparat zum Bifilar, welcher die Aenderungen des Magnetismus des Bifilarmagneten angiebt, ohne selbst wieder die Beobachtung der Declinationsvariationen nothwendig zu machen, ist natürlich in seiner Anwendbarkeit nicht auf ein Bifilar von so großen Dimensionen, wie das im § 6 behandelte Göttinger Instrument beschränkt, sondern würde mit Vortheil an jedem transportabeln Bifilar, etwa von der Größe des von Herrn F. Kohlrausch in Wiedemann's Annalen, Band 15, 1882 pag. 534—540, beschriebenen anzubringen sein, wenn es längere Zeit hindurch zu Bestimmungen der Variationen der Intensität dienen soll.

Es wird sich dann empfehlen, das Stativ oder Steinpostament

für das Bifilar so einzurichten, daß der Suspensionsdraht des Hülfsapparats unter der Mitte des erstgenannten Instruments befestigt werden kann, also derselbe unter dem Bifilar hängt. Die beiden Magnete sind so auszuwählen, daß ihre Momente gegen dasjenige des Bifilars kleine Größen sind; ihre Entfernungen vom Hauptmagneten sind natürlich desto kleiner zu machen, je schwächer magnetisch der letztere ist. Will man auf die Anwendung von drei Spiegeln an dem Hülfsapparat zur Justirung desselben verzichten, und nur einen leichten Beobachtungsspiegel anbringen, so wird am unteren Ende des Hülfsapparats ein horizontaler Zeiger (Glasfaden) zu befestigen sein, welcher centrisch über einem horizontalen eisenfreien Theilkreise sich bewegt.

Straßburg, 1887 November.

Ueber eine Function, welche keiner algebraischen Functionalgleichung genügt.

Von **O. Hölder.**

(Vorgelegt von H. A. Schwarz).

In einem seiner Briefe an Bessel[1]) macht Gauss den Vorschlag, an Stelle des Integrallogarithmus die Function

$$\int_0 \frac{e^x - 1}{x}\, dx$$

in die Analysis einzuführen. Diese Function ist eindeutig, und dies ist auch der Grund, welcher Gauss bestimmt, derselben den Vorzug zu geben, „da eine einförmige Function immer ohne Vergleich als classischer und einfacher anzusehen ist als eine vielförmige.“ Zugleich hebt Gauss hervor, daß bei den Aufgaben aus der Physik, die auf den Integrallogarithmus $li\, x$ führen, gemeiniglich x selbst eine Exponentialgröße sei. Die in Rede stehende Function ist aber nicht bloß eindeutig, sie ist das, was man nach einer neueren Ausdrucksweise eine ganze transcendente Function nennt. Für jeden endlichen Werth von x wird die Function durch die Reihe

---

1) Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel, hrsggb. auf Veranlassung d. k. preuß. Akad. d. Wiss. Leipzig 1880. pag. 157 u. 158.

$$x + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} + \cdots$$

dargestellt. Dieselbe möge im Folgenden mit $J(x)$ bezeichnet werden.

Bei jeder transcendenten Function ist nun die Frage von Wichtigkeit, ob algebraische Gleichungen zwischen einer Reihe von Functionswerthen bestehen können, wenn die zugehörigen Argumente durch bestimmte andere algebraische Gleichungen verknüpft sind. Aus der vorausgesetzten Existenz einer solchen Gleichung kann häufig ein Rückschluß auf die Function gemacht werden. Bedeuten z. B. u und v zwei willkürliche Veränderliche, und setzt man von einer analytischen Function $\varphi(u)$ voraus, daß zwischen je drei Werthen $\varphi(u)$, $\varphi(v)$ und $\varphi(u+v)$ eine algebraische Gleichung bestehe, so hängt nach einem bekannten Satz des Herrn Weierstraß[1]) die Größe $\varphi(u)$ entweder von u selbst, oder von einer Exponentialfunction, oder von einer elliptischen Function algebraisch ab. Herr Königsberger[2]) hat allgemeinere Functionalgleichungen betrachtet, in welche eine beliebige Anzahl von Functionswerthen und zugleich die zugehörigen Argumente selbst mit eingehen. Dabei kommt es darauf an, wie viele von den Functionswerthen, welche in der irreductibeln Gleichung wirklich vorkommen, Argumenten zugehören, welche als unabhängig angesehen werden können. Herr Königsberger hat die Bedingung hinzugefügt, daß mehr als die Hälfte der Argumente unabhängig veränderlich sein sollen, und ist unter dieser Voraussetzung zu dem Resultat gelangt, daß alle solchen algebraischen Functionalgleichungen aus dem Abel'schen Theorem ableitbar sein müssen.

Es sind jedoch unzählige andere algebraische Functionalgleichungen möglich, wenn die die Anzahl der unabhängigen Argumente betreffende Bedingung fallen gelassen wird, insbesondere, wenn man nur ein Argument als unabhängig veränderlich annimmt. Solche Functionalgleichungen bietet z. B. die Gammafunction dar, welche ganz außerhalb des Bereichs des Abel'schen Theorems fällt, da dieselbe überhaupt keiner algebraischen Differentialgleichung genügt.

Die Function $J(x)$ aber, welche den Gegenstand dieser Mittheilung bildet, läßt gar keine algebraische Functionalgleichung

---

1) Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn K. Weierstraß herausggb. v. H. A. Schwarz. Göttingen 1883.

2) Journal für Mathematik Bd. 100 p. 121.

zu, wobei übrigens bemerkt werden möge, daß die Function einer algebraischen und zugleich linearen Differentialgleichung genügt, nämlich der Gleichung:

$$x\frac{d^2J}{dx^2}-(x-1)\frac{dJ}{dx}-1=0.$$

Der im Folgenden auseinandergesetzte Beweis macht es nothwendig, Exponentialgrößen mit in Betracht zu ziehen[1]), deren Exponenten algebraische Functionen der unabhängigen Veränderlichen x sind. Es ist deßhalb zweckmäßig, den zu beweisenden Satz gleich so zu fassen:

Die Größen

$$y_1,\ y_2,\cdots y_r,\ z_1,\ z_2,\cdots z_s$$

mögen irgend welche algebraische Functionen der unabhängigen Veränderlichen x sein, nur so, daß keine von den Functionen y und z constant ist, daß keine zwei von den Functionen y identisch sind und daß keine zwei von den Functionen z eine constante Differenz haben. Man betrachte nun eine ganze Function von

$$J(y_1),\ J(y_2),\cdots J(y_r),\ e^{z_1},\ e^{z_2},\cdots e^{z_s},$$

welche in Bezug auf die s Exponentialgrößen linear ist, und deren Coëfficienten algebraische Functionen von x sind. Eine solche ganze Function kann nur dann für alle Werthe von x verschwinden, wenn sie identisch verschwindet, d. h. wenn sie auch noch gleich Null ist, falls an die Stelle von

$$J(y_1),\ J(y_2),\cdots J(y_r),\ e^{z_1},\ e^{z_2},\cdots e^{z_s}$$

$r+s$ von einander und von dem Argumente x unabhängige Veränderliche gesetzt werden.

Dabei ist hervorzuheben, daß auch einige von den Functionen y mit einigen von den Functionen z übereinstimmen können. Der Grund, die Gleichung in Bezug auf die Exponentialgrößen linear anzunehmen, liegt darin, daß das Product zweier Exponentialgrößen wieder als Exponentialgröße dargestellt werden kann.

Ist nun

$$G(x\,|\,J(y_1),\ J(y_2),\cdots J(y_r);\ e^{z_1},\ e^{z_2},\cdots e^{z_s})$$

eine ganze Function von der vorausgesetzten Art, welche für alle Werthe von x verschwinden soll, so hat man sich zunächst x in

---

1) Weil die Ableitungen der Function sich mit Hilfe der Exponentialfunction ausdrücken lassen.

der Umgebung einer Stelle $x = a$ zu denken. Es müßte dann

$$G(x \mid J(y_1),\ J(y_2),\ \cdots J(y_r);\ e^{z_1},\ e^{z_2} \cdots e^{z_s}) = 0$$

sein, wenn für die algebraischen Functionen

$$y_1,\ y_2,\ \cdots y_r,\ z_1,\ z_2,\ \cdots z_s$$

und zugleich für die algebraischen Functionen von x, welche die Coëfficienten der Gleichung bilden, gewisse ihrer Zweige eingesetzt werden, welche der Stelle $x = a$ entsprechen. Umgekehrt genügt dies auch, um die Allgemeingiltigkeit der Gleichung nach dem Princip der Fortsetzung zu erschließen. Dabei ist noch ein Umstand besonders zu beachten. Für irgend eine von den algebraischen Functionen, z. B. für y_1, kann ein beliebiger Zweig jederzeit gesetzt werden, aber es kann nicht behauptet werden, daß die verschiedenen Zweige der sämmtlichen Functionen in beliebiger Combination genommen werden dürfen. Es können hier bestimmte Combinationen auftreten, auf welche sich die Giltigkeit der Gleichung beschränkt [1]), es kann aus der Giltigkeit der Gleichung für eine Combination von Zweigen die Giltigkeit für eine andere Combination nur dann erschlossen werden, wenn die zweite aus der ersten hervorgeht durch gemeinschaftliche Fortsetzung der sämmtlichen algebraischen Functionen auf demselben Wege.

Um nun den aufgestellten Satz zu beweisen, fasse man in der Gleichung

$$G(x \mid J(y_1),\ J(y_2),\ \cdots J(y_r);\ e^{z_1},\ e^{z_2}, \cdots e^{z_s}) = 0 \tag{1}$$

die Glieder ins Auge, welche in Bezug auf die Größen

$$J(y_1),\ J(y_2),\ \cdots J(y_r)$$

von der höchsten Dimension sind. Diese Dimension sei die $m$te, so daß also die betrachteten Glieder theils von der $m+1$ten, theils von der $m$ten Ordnung sind, je nachdem sie einen Exponentialfactor enthalten oder nicht. Man kann aber unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, daß eines dieser Glieder ohne Exponentialfactor sei. Ist dies nämlich nicht der Fall, und hat man ein Glied

$$w(x)\ e^{z_k} (J(y_1))^{\alpha_1} (J(y_2))^{\alpha_2} \cdots (J(y_r))^{\alpha_r},$$

wo

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r = m$$

ist, und $w(x)$ eine algebraische Function bedeutet, so kann man der Gleichung die gewünschte Eigenschaft ertheilen, indem man

1) Es ist auch nicht ausgeschlossen, daß z. B. zwei der Functionen y verschiedene Zweige derselben algebraischen Function vorstellen.

mit e^{-z_k} multiplicirt. Die neue Gleichung bekommt dann dieselbe Form wie die alte, indem man die Producte von Exponentialfactoren vereinigt. Die nunmehr vorkommenden Exponentialgrößen sind

$$e^{-z_k}, \quad e^{z_\nu - z_k}; \ \nu = 1, 2, \cdots k-1, k+1, \cdots s,$$

und die Exponenten haben wiederum die Eigenschaft, daß keiner constant ist, und daß unter denselben keine zwei eine constante Differenz haben. Da man nun mit der algebraischen Function $w(x)$ auch noch dividiren kann, kann man annehmen, daß unter den Gliedern, welche in Bezug auf die Größen $J(y_1)$, $J(y_2)$, $\cdots J(y_r)$ von der $m$ten Dimension sind, mindestens eins vorhanden sei, welches ohne Exponentialfactor ist und den Coëfficienten $+1$ besitzt. Es möge vorausgesetzt werden, daß in der Gleichung (1) sich dies alles schon so verhalte, so daß also in dieser ein Glied

$$(2) \qquad (J(y_1))^{\alpha_1} (J(y_2))^{\alpha_2} \cdots (J(y_r))^{\alpha_r}, \ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r = m,$$

vorkommt.

Jetzt differentiire man die Gleichung (1) und setze gleichzeitig für die einzelnen Differentialquotienten ihre Werthe ein. Es ist

$$\frac{dJ(y_k)}{dx} = \frac{e^{y_k}-1}{y_k} \frac{dy_k}{dx}, \quad \frac{de^{z_k}}{dx} = e^{z_k} \frac{dz_k}{dx}.$$

Die durch die Differentiation entstehende Gleichung ist dann noch etwas umzuformen. Die Exponentialfactoren, welche mit einander zu multipliciren sind, werden vereinigt, so daß die Gleichung linear wird in Bezug auf gewisse neue Exponentialgrößen. Unter diesen könnten nun noch einige vorkommen, deren Exponenten constante Differenzen besitzen, welche also ein constantes Verhältniß haben. Unter solchen Exponentialgrößen wählt man eine und drückt die andern durch diese aus. So kommt die neue Gleichung schließlich in die Gestalt

$$(3) \qquad H(x \mid J(y_1), J(y_2), \cdots J(y_r); e^{z'_1}, e^{z'_2}, \cdots e^{z'_{s'}}) = 0,$$

d. h. auf die Form der Gleichung (1), wobei die Functionen z'_1, z'_2, $\cdots z'_{s'}$ denselben Einschränkungen unterworfen sind, wie oben z_1, z_2, $\cdots z_s$. Dabei kann übrigens die Zahl der Größen z' die Zahl der Größen z übertreffen.

Es kommt nun darauf an, zweierlei zu zeigen: einmal, daß die Gleichung (3) keine identische sein kann, wenn, was natürlich vorausgesetzt wird, die Ausgangsgleichung (1) nicht identisch ist; dann, daß die Gleichung (3) in gewissem Sinne einfacher ist als die Gleichung (1).

Es möge jetzt wieder die Dimension der Glieder in Bezug

auf die Größen $J(y_1)$, $J(y_2)$, $\cdots J(y_r)$ allein betrachtet werden. Offenbar können die Glieder m^{ter} Dimension von (3) nur herrühren aus den Gliedern m^{ter} Dimension der Gleichung (1). Das mit (2) bezeichnete Glied von (1)

$$(J(y_1))^{\alpha_1}\,(J(y_2))^{\alpha_2}\cdots(J(y_r))^{\alpha_r},\quad \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r=m,$$

giebt nach der Differentiation nur Glieder, die von niedrigerer Dimension als der m^{ten} sind. Dasselbe gilt von allen denjenigen Gliedern m^{ter} Dimension von (1), welche keine Exponentialgröße enthalten und außerdem einen constanten Coëfficienten besitzen.

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

I. Es werde angenommen, daß außer den eben genannten noch andere Glieder in (1) enthalten seien, welche in Bezug auf die Größen $J(y_1)$, $J(y_2)$, $\cdots J(y_r)$ von der m^{ten} Dimension sind. Solche Glieder sind nothwendig von einer der beiden Formen

$$v(x)\,(J(y_1))^{\beta_1}\,(J(y_2))^{\beta_2}\cdots(J(y_r))^{\beta_r}$$

oder

$$u(x)\cdot e^{z_t}\cdot(J(y_1))^{\gamma_1}\,(J(y_2))^{\gamma_2}\cdots(J(y_r))^{\gamma_r},$$

wo

$$\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_r=m,\quad \gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_r=m,$$

wo ferner $v(x)$ und $u(x)$ algebraische Functionen bedeuten, von welchen die erste nicht constant, die zweite wenigstens nicht gleich Null sein darf. Ebenso ist die algebraische Function z_t nicht constant. Wenn man nun diese Ausdrücke differentiirt und in dem Resultat nur diejenigen Glieder beibehält, welche von der m^{ten} Dimension sind, erhält man

$$\frac{dv(x)}{dx}\,(J(y_1))^{\beta_1}\,(J(y_2))^{\beta_2}\cdots\cdots(J(y_r))^{\beta_r},$$

beziehungsweise

$$\left\{\frac{du(x)}{dx}+u(x)\,\frac{dz_t}{dx}\right\}\,e^{z_t}\,(J(y_1))^{\gamma_1}\,(J(y_2))^{\gamma_2}\cdots\,(J(y_r))^{\gamma_r}.$$

Man hat also in dem mit I bezeichneten Falle in der Gleichung (3) eines oder mehrere Glieder von der ersten oder der zweiten Form. Es wird später gezeigt werden, daß die algebraischen Functionen

$$\frac{dv}{dx},\ \frac{du}{dx}+u\cdot\frac{dz_t}{dx},$$

welche hier die Coëfficienten bilden, nicht gleich Null sind. Jedenfalls kann aber behauptet werden, daß die gefundenen Glieder m^{ter} Dimension, falls es überhaupt mehrere sind, sich nicht

formell gegenseitig aufheben können. Dieselben enthalten dieselben Producte wie die Glieder der Gleichung (1), aus welchen sie hervorgegangen sind, nämlich die Producte von der Form

$$(J(y_1))^{\beta_1}\,(J(y_2))^{\beta_2}\cdots(J(y_r))^{\beta_r},$$

beziehungsweise

$$e^{z_i}\,(J(y_1))^{\gamma_1}\,(J(y_2))^{\gamma_2}\cdots(J(y_r))^{\gamma_r}.$$

Alle Producte, die man so erhält, müssen aber der Form nach von einander verschieden sein, weil sonst in der Gleichung (1) sich ohne Weiteres noch hätten Glieder zusammenziehen lassen, während diese Gleichung richtig geordnet vorausgesetzt werden soll. Die berechneten Glieder m^{ter} Dimension werden also gerade so, wie sie erhalten wurden, in der geordneten Gleichung (3) auftreten, und diese Gleichung ist wirklich in Bezug auf die Größen J von der m^{ten} Dimension. Zugleich bemerkt man, daß die Gleichung (3) mindestens ein Glied m^{ter} Dimension weniger hat als die Gleichung (1), weil das mit (2) bezeichnete Glied von (1) zu (3) keinen Beitrag dieser Dimension gegeben hat.

Es ist noch zu zeigen, daß die algebraischen Functionen

$$\frac{dv}{dx},\ \frac{du}{dx}+u\,\frac{dz_i}{dx}$$

nicht für jeden Werth von x verschwinden. Für die Function $\frac{dv}{dx}$ ist dies ohne Weiteres ersichtlich, weil v nicht constant sein sollte. Die Function u ist als von Null verschieden anzunehmen, und z_i ist nicht constant (s. o.). Dann kann aber zwischen den beiden algebraischen Functionen u und z_i die Gleichung

$$\frac{du}{dx}+u\,\frac{dz_i}{dx}=0 \tag{4}$$

nicht bestehen. Wäre zunächst u constant, so würde man erhalten

$$u\,\frac{dz_i}{dx}=0,$$

was dem Vorhergehenden widerspricht. Wenn nun die Function u nicht constant ist, so muß dieselbe mindestens an einer Stelle unendlich werden. Sei $x=a$ eine solche Stelle, an welcher die Function u, oder richtiger ein Zweig derselben unendlich wird. Man setze nun gerade diesen Zweig in die Gleichung

$$\frac{1}{u}\,\frac{du}{dx}+\frac{dz_i}{dx}=0$$

ein, was erlaubt ist, wenn man nur einen entsprechenden Zweig

der Function z_i dazu nimmt. Wenn nun ρ eine passend gewählte, positive ganze Zahl bedeutet, kann man die zusammengehörigen Zweige der Functionen u und z_i in der Umgebung der Stelle $x = a$ durch Reihen darstellen, welche nach Potenzen der Größe

$$\tau = (x-a)^{\frac{1}{\rho}}$$

fortschreiten. Die Reihe für u wird noch eine endliche Anzahl von Gliedern mit negativen Exponenten enthalten und die für z_i eventuell auch. Es ist auch nicht ausgeschlossen, daß $a = \infty$ ist, es ist dann

$$\tau = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\rho}}$$

zu setzen. Die Gleichung (4) kann jetzt auch in die Form

$$\frac{1}{u}\,\frac{du}{d\tau} + \frac{dz_i}{d\tau} = 0$$

gebracht werden. Setzt man nun für u und z_i die erwähnten Entwicklungen ein, so erhält man

$$\frac{1}{u}\,\frac{du}{d\tau} = -\frac{n}{\tau} + \mathfrak{P}(\tau),$$

wo n eine positive ganze Zahl ist, und $\mathfrak{P}(\tau)$ nur Potenzen mit positivem Exponenten enthält. Da aber in der Entwicklung von z_i kein Glied vorkommt, welches nach der Differentiation $\frac{1}{\tau}$ ergäbe, ist die obige Gleichung (4) unmöglich[1]).

Es ist gezeigt, daß die Gleichung (3) nicht identisch ist. Dieselbe enthält wirklich Glieder, welche in den Größen $J(y)$ von der m^{ten} Dimension sind, aber diese Glieder sind in geringerer Zahl vorhanden als in der Gleichung (1). Die Gleichung (3) kann nun, nachdem man eventuell mit einer algebraischen Function und einer Exponentialgröße dividirt hat, gerade so behandelt werden, wie die Gleichung (1) behandelt worden ist. Man differentiirt, und wenn wiederum der mit I bezeichnete Fall eintritt, so gelten genau dieselben Schlüsse wie vorher. Man erhält eine Gleichung, in welcher wieder Glieder m^{ter} Dimension vorkommen, aber in noch geringerer Zahl. Dieses Verfahren kann man so lange fortsetzen, bis einmal der mit I bezeichnete Fall nicht mehr eintritt. Dies muß, da die Glieder m^{ter} Dimension nicht fortwährend in ihrer Zahl abnehmen können, jedenfalls einmal geschehen.

1) Im Grund besagt dies dasselbe, wie der bekannte Satz: Der Logarithmus einer algebraischen Function kann niemals einer algebraischen Function gleich sein, er sei denn constant.

Man kommt damit auf den Fall, der allein noch übrig ist:

II. Die Glieder der Gleichung, welche in Bezug auf die Größen $J(y_1)$, $J(y_2)$, $\cdots J(y_r)$ von der höchsten (m^{ten}) Dimension sind, enthalten keine Exponentialgrößen und haben constante Coëfficienten. Es sei nun

$$(5) \qquad G_0(x\,|\,J(y_1),\ J(y_2),\ \cdots J(y_r);\ e^{z_1},\ e^{z_2},\ \cdots e^{z_s}) = 0$$

eine solche Gleichung, welche dabei alle die von der Gleichung (1) vorausgesetzten Eigenschaften besitzt. Man kommt nun wieder durch Differentiation zu einer Gleichung

$$(6) \qquad H_0(x\,|\,J(y_1),\ J(y_2),\ \cdots J(y_r);\ e^{z_1'},\ e^{z_2'},\ \cdots e^{z_{s'}'}) = 0.$$

Aus den p. 667 angestellten Betrachtungen geht bereits hervor, daß die Gleichung (6) nicht von einer höheren Dimension sein kann als der $m-1^{\text{ten}}$, die Dimension immer nur in Bezug auf die Größen $J(y)$ gerechnet. Es soll nunmehr gezeigt werden, daß in dieser Gleichung jedenfalls Glieder $m-1^{\text{ter}}$ Dimension vorkommen müssen.

Solche Glieder können nur hervorgehen aus den Gliedern m^{ter} und $m-1^{\text{ter}}$ Dimension von (5). Es sei

$$(7) \qquad (J(y_1))^{\alpha_1}\,(J(y_2))^{\alpha_2}\cdots(J(y_k))^{\alpha_k}\cdots(J(y_r))^{\alpha_r}$$

ein Glied höchster Dimension von (5),

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k+\cdots+\alpha_r = m,$$

wobei wir den Coëfficienten gleich 1 annehmen können. Da einer der Exponenten von Null verschieden sein muß, möge dies von α_k angenommen werden. Das mit (7) bezeichnete Glied der Gleichung (5) giebt nach der Differentiation unter andern Gliedern folgenden Ausdruck:

$$\alpha_k(J(y_1))^{\alpha_1}\cdots(J(y_{k-1}))^{\alpha_{k-1}}(J(y_k))^{\alpha_k-1}\,(J(y_{k+1}))^{\alpha_{k+1}}\cdots\cdots(J(y_r))^{\alpha_r}$$
$$\times\frac{e^{y_k}-1}{y_k}\,\frac{dy_k}{dx},$$

welcher also in die Gleichung (6) eingeht. Es fragt sich, ob noch andere Glieder entstehen können, welche das Product

$$8) \qquad (J(y_1))^{\alpha_1}\cdots(J(y_{k-1}))^{\alpha_{k-1}}(J(y_k))^{\alpha_k-1}(J(y_{k+1}))^{\alpha_{k+1}}\cdots(J(y_r))^{\alpha_r}$$

enthalten. Aus (7) geht ein weiteres Glied nicht hervor, welches das Product (8) enthielte. Dagegen kann dieses Product durch die Differentiation noch hervorgehen aus andern Gliedern m^{ter} Dimension der Gleichung (5). Diese müssen dann die Form haben:

$$C\cdot(J(y_1))^{\alpha_1}\cdots(J(y_{k-1}))^{\alpha_{k-1}}(J(y_k))^{\alpha_k-1}(J(y_{k+1}))^{\alpha_{k+1}}\cdots(J(y_r))^{\alpha_r}\times J(y_l).$$

Dabei bedeutet C eine Constante und l eine von k verschiedene ganze Zahl.

$$l = 1, \cdots k-1, \; k+1 \cdots r.$$

Wenn nämlich l mit k zusammenfiele, so würde dieses Glied der Gleichung (5) von dem mit (7) bezeichneten Gliede nicht verschieden sein.

Wenn man jetzt den letzten Ausdruck differentiirt, erhält man

$$C \cdot (\alpha_l + 1) \cdot (J(y_1))^{\alpha_1} \cdots (J(y_{k-1}))^{\alpha_{k-1}} (J(y_k))^{\alpha_k - 1} (J(y_{k+1}))^{\alpha_{k+1}} \cdots (J(y_r))^{\alpha_r}$$
$$\times \frac{e^{y_l}-1}{y_l} \, \frac{dy_l}{dx}$$

und außerdem noch andere Glieder, welche das Product (8) nicht enthalten. Bildet man nun das Aggregat aller der aus den Gliedern $m$ter Dimension von (5) durch Differentiation entstehenden Glieder, welche das Product (8) enthalten, so wird dieses Aggregat gebildet durch Multiplication des Productes (8) mit einem Ausdruck von der Form

$$\sum_{\nu=1}^{r} c_\nu \frac{e^{y_\nu}-1}{y_\nu} \, \frac{dy_\nu}{dx}.$$

Dabei ist von den Constanten c_ν die $k$te

$$c_k = \alpha_k,$$

also von Null verschieden.

Es ist jetzt zu untersuchen, ob das Product (8) nicht auch entsteht durch Differentiation von Gliedern $m-1$ter Dimension. Ein Glied der Gleichung (5), welches in Bezug auf die Größen $J(y)$ von der $m-1$ten Dimension ist, und durch dessen Differentiation das Product (8) erhalten wird, hat eine von den beiden Formen:

$$w(x)\,(J(y_1))^{\alpha_1} \cdots (J(y_{k-1}))^{\alpha_{k-1}} (J(y_k))^{\alpha_k - 1} (J(y_{k+1}))^{\alpha_{k+1}} \cdots (J(y_r))^{\alpha_r},$$

$$v(x)\,e^{z_k} (J(y_1))^{\alpha_1} \cdots (J(y_{k-1}))^{\alpha_{k-1}} (J(y_k))^{\alpha_k - 1} (J(y_{k+1}))^{\alpha_{k+1}} \cdots (J(y_r))^{\alpha_r},$$

wo $w(x)$ und $v(x)$ algebraische Functionen von x bedeuten. Wenn man nun hier differentiirt und nur die Glieder beibehält, welche das Product (8) enthalten, so erhält man letzteres multiplicirt mit

$$\frac{dw(x)}{dx} \text{ beziehungsweise mit } \left\{ \frac{dv(x)}{dx} + v(x)\,\frac{dz_k}{dx} \right\} e^{z_k}.$$

Zieht man nun alle Glieder zusammen, welche durch Differentiation der Glieder $m-1$ter Dimension von (5) entstehen und das Product (8) enthalten, so erhält man letzteres Product multiplicirt mit einem Ausdruck von folgender Gestalt:

$$\frac{dw(x)}{dx}+\sum_{\mu=1}^{\mu=s}e^{z_\mu}\left\{\frac{dv_\mu(x)}{dx}+v_\mu(x)\frac{dz_\mu}{dx}\right\}.$$

In der That kann man den Summationsbuchstaben μ alle Werthe von 1 bis s durchlaufen lassen, indem nicht ausgeschlossen sein soll, daß einzelne von den algebraischen Functionen

$$w(x),\ v_1(x),\ v_2(x),\ \ldots\ v_s(x)$$

gleich Null sind. Es können sogar alle diese Functionen für alle Werthe von x verschwinden.

Wenn man also alle Glieder der Gleichung (6) zusammenfaßt, welche das Product (8) enthalten, so erscheint dieses Product mit

$$(9)\qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=r}c_\nu\frac{e^{y_\nu}-1}{y_\nu}\frac{dy_\nu}{dx}+\frac{dw}{dx}+\sum_{\mu=1}^{\mu=s}e^{z_\mu}\left\{\frac{dv_\mu(x)}{dx}+v_\mu(x)\frac{dz_\mu}{dx}\right\}$$

multiplicirt. Hier hat man nur noch Glieder zusammenzuziehen. Der von Exponentialgrößen freie Theil des Ausdrucks ist

$$-\sum_{\nu=1}^{r}\frac{c_\nu}{y_\nu}\frac{dy_\nu}{dx}+\frac{dw}{dx}.$$

Unter den übrigen Gliedern

$$\sum_{\nu=1}^{r}c_\nu\frac{e^{y_\nu}}{y_\nu}\frac{dy_\nu}{dx}+\sum_{\mu=1}^{s}e^{z_\mu}\left\{\frac{dv_\mu(x)}{dx}+v_\mu(x)\frac{dz_\mu}{dx}\right\}$$

können auch noch einige zusammengezogen werden, wenn zwei oder mehrere von den Functionen

$$y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_r,\ z_1,\ z_2,\ \ldots\ z_s$$

sich nur um additive Constanten unterscheiden. Um nun zu zeigen, daß die Gleichung (6) in Bezug auf die Größen $J(y)$ von der $m-1$ten Dimension ist, hat man nur nachzuweisen, daß der Ausdruck (9) nicht identisch gleich Null ist. Dies ist aber nur so zu verstehen, daß die Glieder dieses Ausdrucks bei der Ausführung der erwähnten Zusammenziehungen sich nicht formell gegenseitig wegheben. Ob ein solcher Ausdruck nicht trotzdem für alle Werthe von x verschwinden kann, ist eine Frage, welche an dieser Stelle nicht berücksichtigt zu werden braucht, die aber später beantwortet werden wird.

Man bedenke, daß $c_k = \alpha_k$ von Null verschieden ist. Jetzt sammle man alle die Glieder des Ausdrucks (9), welche sich mit

$$c_k\frac{e^{y_k}}{y_k}\frac{dy_k}{dx}$$

vereinigen lassen. Unter Umständen bekommt man mehrere Glieder von der Form

$$c_\nu \frac{e^{y_\nu}}{y_\nu} \frac{dy_\nu}{dx}, \text{ wo } y_\nu = y_k + const.$$

Dabei ist die Constante von Null verschieden, wenn ν von k verschieden ist. Außerdem kann möglicher Weise noch ein Glied aus der Summe

$$\sum_{\mu=1}^{s} e^{z_\mu} \left\{ \frac{dv_\mu(x)}{dx} + v_\mu(x) \frac{dz_\mu}{dx} \right\}$$

hinzutreten, aber jedenfalls nur eines, weil keine zwei von den Functionen

$$z_1, z_2, \ldots z_s$$

eine constante Differenz haben sollen. Sei

$$z_\lambda = y_k + A,$$

wo A eine Constante bedeutet, so kommt noch hinzu

$$e^{z_\lambda} \left\{ \frac{dv_\lambda(x)}{dx} + v_\lambda(x) \frac{dz_\lambda}{dx} \right\} = e^{y_k} \left\{ \frac{d(e^A v_\lambda(x))}{dx} + (e^A v_\lambda(x)) \frac{dy_k}{dx} \right\}$$

Faßt man dies alles zusammen, so ergiebt sich, daß in dem Ausdruck (9) nach der Zusammenziehung die Größe e^{y_k} mit einem Ausdruck von folgender Gestalt multiplicirt erscheint:

$$\frac{c_k}{y_k} \frac{dy_k}{dx} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{b_\lambda}{y_k + a_\lambda} \frac{dy_k}{dx} + \frac{dv(x)}{dx} + v(x) \frac{dy_k}{dx}. \tag{10}$$

Es bedeutet $v(x)$ eine algebraische Function, welche auch identisch gleich Null sein kann. Die Größen $b_1, b_2, \ldots b_n$ sind Constanten, deren Anzahl n unbekannt ist, ebenso $a_1, a_2, \ldots a_n$; diese Größen a_λ sind außerdem als von Null verschieden anzunehmen. c_k ist ferner auch von Null verschieden.

Nun ist nach Voraussetzung die algebraische Function y_k nicht constant, und es läßt sich leicht zeigen, daß der Ausdruck (10) nicht für alle Werthe von x verschwinden kann. Die Function y_k muß einmal gleich Null werden. Dies soll der Fall sein bei $x = a$ für einen Zweig der Function y_k. Wenn nun ρ eine passend gewählte, positive ganze Zahl bedeutet, so kann man den in Frage stehenden Zweig und zugleich den zugehörigen Zweig der Function $v(x)$ nach Potenzen von

$$\tau = (x - a)^{\frac{1}{\rho}}$$

entwickeln. Ist $a = \infty$, so ist wiederum

$$\tau = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\varrho}}$$

zu setzen. Die Entwicklung von y_k enthält nur Potenzen von τ mit positivem Exponenten und besitzt kein von τ freies Glied; in der Entwicklung von v können möglicherweise Potenzen mit negativem Exponenten in endlicher Anzahl auftreten.

Wenn nun der Ausdruck (10) für alle Werthe von x verschwände, so müßte auch die Gleichung

$$\frac{c_k}{y_k}\frac{dy_k}{d\tau} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{b_\lambda}{y_k + a_\lambda}\frac{dy_k}{d\tau} + \frac{dv}{d\tau} + v\frac{dy_k}{d\tau} = 0 \tag{11}$$

bestehen und zwar müßte dieselbe nach Einführung der Reihenentwicklungen für y_k und v identisch werden. Weil nun die Constanten $a_1, a_2, \ldots a_n$ von Null verschieden sind, so gehen aus der Entwickelung der Summe

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{b_\lambda}{y_k + a_\lambda}\frac{dy_k}{d\tau}$$

nur Potenzen von τ mit positivem Exponenten hervor. Es ist ferner

$$\frac{c_k}{y_k}\frac{dy_k}{d\tau} = p \cdot c_k \frac{1}{\tau} + \mathfrak{P}(\tau),$$

wo p eine positive ganze Zahl bedeutet, und $\mathfrak{P}(\tau)$ eine gewöhnliche Potenzreihe vorstellt, welche nur Potenzen mit positiven Exponenten enthält. Nun könnte offenbar das Glied $p c_k \frac{1}{\tau}$ sich in der Gleichung (11) nicht wegheben, wenn die Function v an der betrachteten Stelle endlich wäre. Die Entwicklung von v enthält also Potenzen von τ mit negativen Exponenten. Sei von diesen Potenzen τ^{-i} die höchste, so wird in $\frac{dv}{d\tau}$ ein Glied mit τ^{-i-1} vorkommen, welches sich sicher gegen keines der übrigen aus der Entwicklung von (11) hervorgehenden Glieder aufheben könnte. Es ist also die Gleichung (11) widersprechend. Somit ist der Ausdruck (10) nicht für alle Werthe von x gleich Null, und deßhalb ist auch der Ausdruck (9) nicht formell gleich Null, auch nicht, nachdem die erwähnte Zusammenziehung einzelner Glieder desselben erfolgt ist.

Damit ist bewiesen, daß die Gleichung (6) in den Größen

$$J(y_1),\ J(y_2),\ \ldots\ J(y_r)$$

in der That von der $m-1$ten Dimension ist.

Wenn also eine Gleichung von der Form der Gleichung (1) besteht, welche in Bezug auf die Größen $J(y_1) \,..\, J(y_r)$ von der $m$ten Dimension ist, so besteht auch eine Gleichung von derselben Form, welche von der $m-1$ten Dimension ist, und in welche andere Exponentialgrößen linear eingehen. Es besteht also auch eine Gleichung $m-2$ter, $m-3$ter Dimension u. s. w., also auch eine Gleichung von der 0ten Dimension. D. h. es müßte eine solche Gleichung bestehen:

$$v(x) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=t} v_\lambda(x) e^{z_\lambda} = 0, \tag{12}$$

wo von den algebraischen Functionen z_λ keine constant wäre und keine zwei eine constante Differenz hätten, wo außerdem

$$v(x),\ v_1(x),\ v_2(x),\ ..\ v_t(x)$$

algebraische Functionen vorstellen, von welchen mindestens eine nicht identisch gleich Null wäre.

Daß die Gleichung (12) nicht für alle Werthe von x bestehen kann, beweist man durch die Fortsetzung des eingeschlagenen Beweisverfahrens. Man kann annehmen, daß $v(x)$ nicht identisch gleich Null ist, denn man kann dies nöthigenfalls durch Division mit einer Exponentialgröße erreichen. Nun kann man auch mit $v(x)$ noch dividiren und erhält

$$1 + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=t} w_\lambda(x) e^{z_\lambda} = 0. \tag{13}$$

Sollten die algebraischen Functionen $w_1, w_2, \,..\, w_t$ alle identisch verschwinden, so enthielte diese Gleichung schon einen Widerspruch. Andernfalls differentiirt man die linke Seite der Gleichung (13) und erhält

$$\sum_{\lambda=1}^{t} \left\{ \frac{dw_\lambda(x)}{dx} + w_\lambda(x) \frac{dz_\lambda}{dx} \right\} e^{z_\lambda} = 0.$$

Angenommen $w_k(x)$ sei nicht immer gleich Null, so kann, da z_k nicht constant ist, nach einer früheren Ausführung auch die Größe

$$\frac{dw_k(x)}{dx} + w_k(x) \frac{dz_k}{dx}$$

nicht für alle Werthe von x verschwinden. Man hätte also nun eine Gleichung von derselben Form wie (12), welche aber ein Glied weniger enthält. So kann man nun weiter schließen; zuletzt, wenn die Gleichung nur noch ein Glied enthält, ist man nothwendig zu einen Widerspruch gelangt.

Die Voraussetzung, daß eine Gleichung von der Gestalt der Gleichung (1) bestehe, führt also stets auf einen Widerspruch. Damit ist der im Eingang aufgestellte Satz bewiesen.

Das auseinandergesetzte Beweisverfahren zeigt eine genaue Analogie mit einem in den Mathematischen Annalen Bd. XXVIII pag. 1 bis 13 von mir gegebenen Verfahren, welches dazu dient, zu zeigen, daß die Gammafunction keiner algebraischen Differentialgleichung genügt. Es lassen sich in den beiden Beweisen dieselben Durchgangspunkte aufzeigen. An Stelle der im vorliegenden Beweise benutzten Differentiation der Gleichungen tritt aber in dem andern Beweise eine andere Operation, welche man füglich als eine Art von Differenzenrechnung bezeichnen kann. Der gemeinsame Gedankengang kann noch auf verschiedene andere Fragen mit Erfolg angewendet werden. So z. B. kann man mittelst derselben Methode den folgenden bekannten Satz [1]) beweisen:

Wenn $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ Functionen einer Veränderlichen x bedeuten, deren Differentialquotienten algebraische Functionen sind, und wenn zwischen den Größen

$$x, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$$

eine algebraische Gleichung besteht, so besteht auch mindestens eine lineare Gleichung

$$\sum_{\alpha=1}^{n} C_\alpha \varphi_\alpha = \psi,$$

wo ψ eine algebraische Function von x und die $C_1, C_2, \ldots C_n$ constante Größen bedeuten. Man kann dann eine bestimmte Zahl solcher linearen Gleichungen finden, als deren Folge jede der zwischen $x, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ bestehenden algebraischen Gleichungen sich darstellt.

Ein gewisse Aehnlichkeit besteht zwischen der hier benutzten Methode und einer Methode, welche Liouville [2]) auf die Frage angewendet hat, unter welchen Umständen das Integral einer algebraischen Function selbst wieder durch einen algebraischen Ausdruck dargestellt werden kann, wobei er sich aber auf solche algebraische Functionen beschränkt hat, welche durch Wurzelzeichen dargestellt werden können.

1) Dieser Satz ist in einem allgemeineren enthalten, welchen Abel in einem Brief an Legendre ausgesprochen hat. Vergl. Abel's Werke, 2. Ausgabe, Christiania 1881, II. Bd. p. 275, ferner das Fragment ebendaselbst p. 206. Man vergleiche auch die Untersuchungen des Herrn Petersen in den Göttinger Nachrichten, Jahrgang 1878, p. 68.

2) Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences T. 5. p. 76.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).

Nachr. d. K. G. d. W. | Corrections-Apparat
netometer.

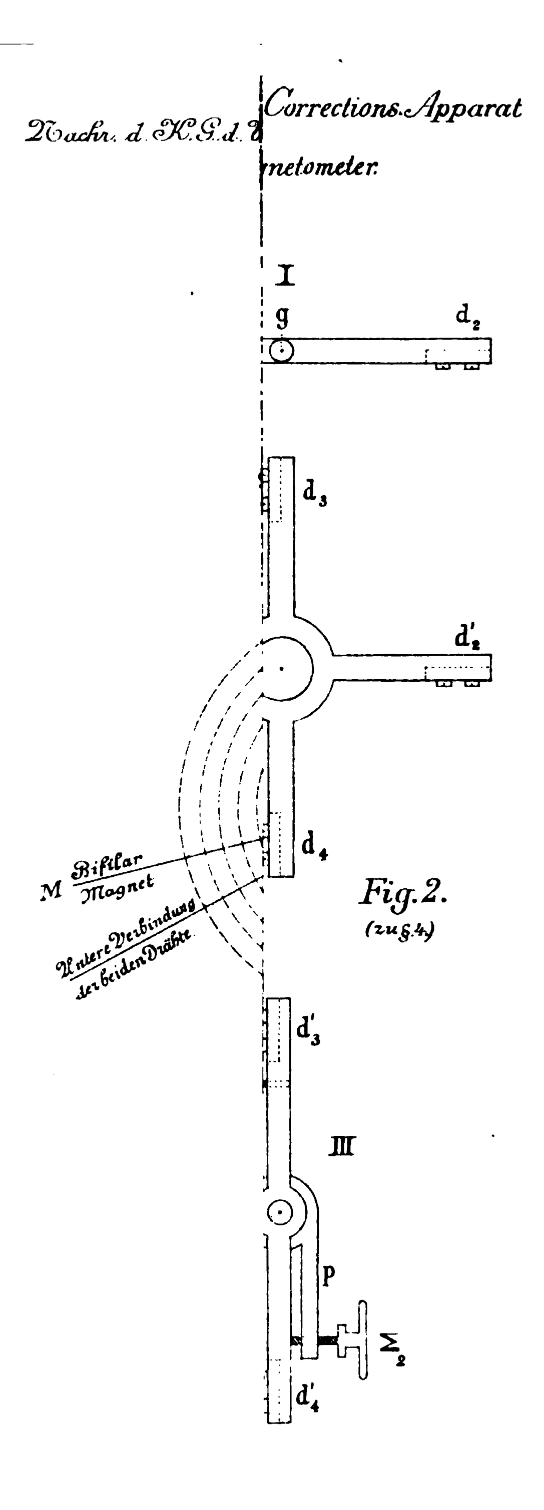


Fig. 2.
(zu §. 4.)

I

Lith. F. Krannich, Göttingen


Widener Library
3 2044 092 891 571